UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Fisica



CONDENSATI DI BOSE-EINSTEIN DEBOLMENTE INTERAGENTI IN UN RETICOLO OTTICO

Relatore : Dott. Davide GALLI

Relatore esterno : Dott. Giacomo ROATI

Correlatore : Prof. Giovanni MODUGNO

Tesi di Laurea di: Luca TANZI matr. 738006 PACS: 67.85.-d

Anno Accademico 2008 - 2009

All'inesplicabile in noi e sopra di noi

Indice

Introduzione				
1	Cor	ndensazione di Bose-Einstein	5	
	1.1	Bosoni non interagenti	5	
	1.2	Bosoni non interagenti in trappola armonica	6	
	1.3	Gas di Bose interagente	7	
	1.4	Controllo dell'interazione tramite risonanze di Feshbach	9	
2	Pro	duzione sperimentale di un condensato	15	
	2.1	Raffreddamento laser	16	
		2.1.1 Melassa ottica	17	
		2.1.2 Trappola magneto-ottica (MOT)	19	
	2.2	Raffreddamento evaporativo	19	
3	Ret	icoli ottici	23	
	3.1	Forza di dipolo	23	
	3.2	BEC in un reticolo	27	
		3.2.1 Struttura a bande	27	
		3.2.2 Dinamica nel regime lineare	31	
	3.3	Schema sperimentale del reticolo ottico tridimensionale $\ldots \ldots \ldots$	34	
4	Sta	bilizzazione del reticolo ottico	39	
	4.1	Fluttuazioni nella costante elastica	39	
		4.1.1 Calcolo dell'heating rate	39	
		4.1.2 Realizzazione sperimentale	41	
	4.2	Fluttuazioni nella posizione dei minimi del potenziale	47	
5	Car	atterizzazione del reticolo con condensati di Bose-Einstein	51	
	5.1	Calibrazione del reticolo ottico: Bragg scattering	52	

	5.2	Frequenza di oscillazione radiale di un condensato di $^{87}\mathrm{Rb}$	56
	5.3	Riscaldamento parametrico di un condensato di $^{39}\mathrm{K}$ intrappolato nel	
		reticolo ottico	58
	5.4	Tempo di vita di un condensato di $^{39}{\rm K}$ nel reticolo ottico $~.~.~.~.$	60
6	Esp	ansione di un condensato di Bose-Einstein nel reticolo ottico	69
	6.1	Ocillazione in trappola ottica	69
	6.2	Espansione del condensato nel reticolo ottico	71
	6.3	Verso lo studio della diffusione di un sistema bosonico disordinato	
		interagente	77
Conclusioni			81
Ringraziamenti			83

Introduzione

Tra gli anni '80 e gli anni '90 del secolo scorso sono stati raggiunti due tra i traguardi sperimentali più importanti nel campo della fisica atomica: lo sviluppo della tecnica di raffreddamento laser degli atomi, premiata con il Nobel nel 1997 (Chu, 1998; Cohen-Tannoudji, 1998; Phillips, 1998) [1, 2, 3], e la realizzazione sperimentale del condensato di Bose-Einstein (BEC), Nobel nel 2001 (Cornell e Wiemann, 2002; Ketterle, 2002) [4, 5]. In particolare il raffreddamento laser, attraverso il quale è stato per la prima volta raggiunto il regime di temperature dell'ordine dei micro-Kelvin, ha tra le altre cose permesso la realizzazione di cristalli artificiali costituiti di luce, i cosiddetti *reticoli ottici*. L'affinamento di questa tecnica ha inoltre aperto la strada ad altre tecniche di raffreddamento ancora più potenti, tra le quali il raffreddamento evaporativo, che hanno reso possibile nel 1995 la condensazione di Bose-Einstein di un gas diluito di atomi alcalini. Poco dopo la prima realizzazione di una BEC molti gruppi di ricerca hanno cominciato ad investigare le proprietà dei condensati in reticoli ottici.

I condensati di Bose-Einstein sono *sistemi quantistici controllabili*. Essi costituiscono una finestra di osservazione del mondo quantistico, essendo oggetti macroscopici e manipolabili che si comportano secondo le leggi della meccanica quantistica.

In questo senso lo studio di atomi ultrafreddi in reticoli ottici getta un ponte tra il mondo della fisica atomica e quello della *fisica dello stato solido*: sfruttando l'interazione tra gli atomi e la luce laser, è infatti possibile intrappolare gli atomi condensati in potenziali periodici ideali senza difetti e senza fononi, creando così un banco di prova eccezionale per le teorie del trasporto quantistico di sistemi bosonici e fermionici in strutture periodiche. Questi sistemi permettono un controllo molto preciso dei parametri di interazione, poichè la profondità del potenziale può essere facilmente cambiata variando la frequenza e l'intensità della luce laser che origina l'onda stazionaria. Vari esperimenti svolti alla fine degli anni '90 hanno dimostrato l'analogia esistente tra il comportamento degli atomi ultrafreddi in un reticolo ottico e quello degli elettroni in un cristallo ionico [6, 7]. Molti degli effetti predetti dalla teoria delle bande ed impossibili da osservare direttamente sugli elettroni, come le oscillazioni di Bloch o il tunnelling di Landau-Zener, sono stati verificati sperimentalmente attraverso l'utilizzo di atomi utrafreddi in reticoli ottici [8].

I reticoli ottici sono inoltre uno strumento fondamentale per lo studio delle proprietà superfluide dei condensati di Bose-Einstein. Una prima dimostrazione della connessione tra superfluidità e condensazione di Bose-Einstein risale al 1938, con la teoria di F. London sul comportamento di ⁴He liquido al di sotto del punto lambda [9]. I reticoli ottici possono essere utilizzati per osservare e modificare le proprietà superfluide e di coerenza a lungo raggio del condensato di Bose-Einstein. In particolare variando la profondità del potenziale periodico è possibile osservare transizioni dalla fase superfluida, ottenibile per basse profondità del potenziale [10, 11, 12], a nuovi regimi. Questo è il caso della transizione da superfluido a Mott insulator, una fase isolante ordinata, nella quale le interazioni repulsive tra gli atomi forzano la localizzazione delle funzioni d'onda nei siti reticolari, distruggendo la coerenza a lungo raggio [13]. Transizioni di fase analoghe (da uno stato delocalizzato ad uno localizzato) accadono se si aggiunge un potenziale disordinato al potenziale periodico iniziale, come nel caso della localizzazione di Anderson [14, 15]. I potenziali quasidisordinati alla base di tali fenomeni di localizzazione possono essere creati sovrapponendo due diversi reticoli ottici di lunghezze d'onda incommensurate [16].

Questi sono solo alcuni degli ambiti fisici che possono essere investigati studiando il comportamento di condensati di Bose-Einstein, ovvero sistemi quantisici macroscopici e controllabili, in reticoli ottici, potenziali periodici ideali e privi di difetti. In questo lavoro di tesi, svolto presso l'istituto europeo di ricerca LENS (European Laboratory for Nonlinear Spectroscopy) a Firenze, ho partecipato alla realizzazione di un esperimento che studia le proprietà di trasporto di un condensato di ³⁹K debolmente interagente in sistemi disordinati e in varie dimensionalità, prestando particolare attenzione alla realizzazione sperimentale del reticolo ottico tridimensionale, e specialmente alla sua stabilizzazione. L'importanza di costruire reticoli ottici ultrastabili risiede nella particolare sensibilità dei gas quantistici intrappolati nel reticolo: piccole fluttuazioni in intensità e in frequenza della luce laser che genera il potenziale periodico causano spesso il riscaldamento e la perdita degli atomi intrappolati nel reticolo ottico, se questo non è adeguatamente stabilizzato. La realizzazione di reticoli ottici ultrastabili permette lo studio sperimentale di problematiche complesse ed affascinanti quali appunto le proprietà di trasporto in sistemi disordinati, approfondendo così la comprensione del ruolo reciproco che disordine ed interazione hanno nei fenomeni di localizzazione e delocalizzazione presenti in questi sistemi.

La presentazione del lavoro si articola nei seguenti punti. La descrizione teorica del fenomeno della condensazione di Bose-Einstein, nel caso di particelle non interagenti ed interagenti (con un accenno particolare alla tecnica di controllo dell'interazione via risonanze di Feschbach), è brevemente discussa nel primo capitolo. Nel secondo capitolo vengono spiegati i principi fondamentali del raffreddamento laser e del raffreddamento evaporativo, necessari per comprendere la realizzazione sperimentale di un condensato di ³⁹K. Il terzo capitolo conclude la parte teorica di questa tesi, introducendo il reticolo ottico, e discutendo il comportamento di un condensato non interagente in un potenziale periodico.

Nel quarto capitolo affrontiamo il problema della stabilizzazione in intensità e in frequenza della luce laser che costituisce il reticolo ottico; dopo un preambolo teorico, nel quale determiniamo il legame tra rumore in intensità o in frequenza del laser ed il rate di riscaldamento degli atomi nel reticolo, discutiamo lo schema sperimentale dell'apparato di stabilizzazione.

Nel quinto capitolo descriviamo le tecniche sperimentali di calibrazione del reticolo ottico; in particolare presentiamo la misura di Bragg scattering, necessaria per determinare la profondità del reticolo, e la misura della frequenza di oscillazione radiale del condensato nella trappola ottica. Infine verifichiamo la stabilità del reticolo ottico misurando il tempo di vita di un condensato che evolve nel potenziale periodico, e paragonando i risultati sperimentali con il rate di riscaldamento stimato nel Cap. 4.

Nel sesto ed ultimo capitolo studiamo l'espansione di un condensato di Bose-Einstein nel reticolo ottico ultrastabile, verificando alcune delle leggi che ne descrivono la dinamica in un potenziale periodico introdotte nel Cap. 3. Per concludere presentiamo alcune osservazioni preliminari delle proprietà dinamiche di un condensato in un sistema disordinato interagente, prodotto dalla sovrapposizione di due reticoli ottici incommensurati, dando così un sapore della fisica osservabile con l'apparato realizzato.

Capitolo 1

Condensazione di Bose-Einstein

In questo primo capitolo introduciamo brevemente il primo dei due ingredienti che compongono gli esperimenti descritti in questa tesi: la condensazione di Bose-Einstein. In particolare presentiamo un approccio qualitativo alla teoria della condensazione nel caso di bosoni non interagenti [17, 18], per poi considerare l'effetto dell'interazione tra le particelle nell'ambito della teoria di campo medio di Gross-Pitaevskii.

1.1 Bosoni non interagenti

Nel 1924 il fisico indiano Satyendra Nath Bose ottenne la distribuzione di Planck per lo spettro di corpo nero, basandosi su una nuova statistica fotonica. Nello stesso anno Einstein, prendendo spunto dalla nuova idea di de Broglie sulla natura ondulatoria della materia, estese i calcoli di Bose al caso delle particelle, affermando che se queste sono onde, allora devono obbedire alla stessa statistica dei fotoni. Inoltre, nel secondo dei suoi tre famosi articoli sulla meccanica statistica, dimostrò che sotto queste ipotesi un gas di particelle non interagenti, in condizioni estreme di densità e temperatura, può manifestare una nuova transizione di fase caratterizzata da un'occupazione macroscopica dello stato fondamentale. Tutte le particelle che partecipano a tale transizione formano un'unica onda di materia con proprietà di coerenza a lungo raggio.

Tale fenomeno è oggi chiamato Condensazione di Bose-Einstein (BEC).

Diamo una breve interpretazione qualitativa del processo di condensazione ricavando le condizioni termodinamiche critiche alle quali bisogna lavorare per osservarlo. Consideriamo un sistema di N bosoni identici non interagenti. Secondo l'ipotesi di de Broglie ad ogni particella di massa m è associato un pacchetto d'onda di estensione spaziale

$$\lambda_{dB}(T) \equiv \frac{h}{mv} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mK_BT}}$$
(1.1)

dove T è la temperatura del sistema bosonico. La grandezza λ_{dB} identifica l'incertezza della posizione a causa della sua velocità termica. Poichè sia λ_{dB} sia la densità n dell'intero sistema bosonico dipendono da T, ha senso chiedersi se esiste una temperatura critica T_c alla quale λ_{dB} diventa dell'ordine della distanza media tra due particelle. A questa temperatura le funzioni d'onda di ogni particella cominciano a sovrapporsi e poichè sono indistinguibili formano un'unica funzione d'onda la cui ampiezza è N volte quella di singola particella. Questo processo di sovrapposizione è reso possibile dalla natura bosonica delle particelle, la cui statistica impone l'occupazione macroscopica di uno stesso stato del sistema. La transizione di fase si manifesta quindi se $\lambda_{dB} \geq n^{-\frac{1}{3}}$ o analogamente quando $n\lambda_{dB}^3 \geq 1$. Se effettuiamo il calcolo formale di T_c nel caso di bosoni non interagenti confinati in una scatola troviamo che

$$n\lambda_{dB}^3(T_c) = g_{3/2}(1) = 2.612, \tag{1.2}$$

dove abbiamo introdotto la funzione di Bose

$$g_{3/2}(z) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l^{3/2}}.$$
(1.3)

L'Eq (1.2) è in buon accordo con la stima qualitativa $n\lambda_{dB}^3 \sim 1$.

1.2 Bosoni non interagenti in trappola armonica

Sperimentalmente è più frequente lavorare con bosoni confinati in potenziali quadratici del tipo $V(x) = \frac{1}{2}\bar{\omega}^2 x^2$, con $\bar{\omega}$ frequenza della trappola; la natura della transizione di fase che caratterizza la condensazione di Bose-Einstein è la medesima: esiste una temperatura critica T_c al di sotto della quale parte degli atomi condensano in uno stesso stato quantistico del potenziale armonico esterno. In particolare, è possibile ricavare il valore della temperatura critica dall'uguaglianza

$$N = \frac{(k_B T_C)^3}{\hbar^3 \bar{\omega}^3} g_3(1), \tag{1.4}$$

con N numero di atomi e

$$g_3(z) = \sum_{l=1}^{\infty} z^l / l^3.$$
 (1.5)

Il fenomeno della condensazione all'interno di un potenziale armonico presenta però il vantaggio di possedere alcune osservabili che identificano l'insorgere della transizione. In particolare si ottiene che le particelle condensate nello stato fondamentale sono tutte rappresentate dalla stessa funzione d'onda di larghezza $\Delta x_0 \sim \sqrt{\hbar/m\omega}$, mentre le particelle non condensate formano una nuvola termica di larghezza $\Delta x_T(T) \sim \sqrt{\frac{K_BT}{m} \frac{1}{\omega}}$. A $T = T_c$ il rapporto tra le due larghezze è $\frac{\Delta x_0}{\Delta x_T} \sim N^{-1/6}$, quindi per un numero di particelle elevato la parte condensata risulta più stretta del fondo termico, dando origine ad una condensazione nello spazio delle coordinate, e non solo nello spazio delle fasi. Questa particolarità ci permette di identificare se alla fine di ogni round sperimentale abbiamo prodotto un condensato o semplicemente una nuvola molto fredda.

1.3 Gas di Bose interagente

Einstein predisse l'esistenza della transizione di fase nel caso di un gas ideale di bosoni non interagenti. Nella visione qualitativa di condensazione sopra descritta possiamo intuire come l'interazione modifichi notevolmente questo processo. Una forte interazione tra le particelle, ad esempio repulsiva, tende infatti a separare le funzioni d'onda di ogni atomo impedendo l'occupazione macroscopica di un singolo livello energetico. Si può quindi capire come la generalizzazione di questo fenomeno a sistemi interagenti non sia concettualmente immediata tanto che anche lo stesso Einstein aveva forti dubbi dell'esistenza di tale transizione in presenza di una interazione. La soluzione definitiva del problema fu trovata tra gli anni '50 e '60 con lo svilupparsi della teoria dei sistemi a molti corpi. Di seguito discutiamo brevemente il caso di un condensato "debolmente interagente"; per maggiori dettagli rimando a [6, 7].

La descrizione matematica del sistema a molti corpi in considerazione è notevolmente semplificata dall'approssimazione di gas diluito, nella quale trascuriamo le interazioni a tre corpi: il termine d'interazione risulta soltanto delle collisioni binarie a basse energie, caratterizzate da un singolo parametro, la lunghezza di scattering in onda s, a_s , indipendente dai dettagli del potenziale a due corpi. L'Hamiltoniana a molti corpi del sistema di N bosoni interagenti in un potenziale di trappola V_{ext} risulta essere

$$\hat{H} = \int d^3x \hat{\psi}^{\dagger}(\mathbf{x}) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ext} \right] \hat{\psi}(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \frac{4\pi a_s \hbar^2}{m} \int d^3x \hat{\psi}^{\dagger}(\mathbf{x}) \hat{\psi}^{\dagger}(\mathbf{x}) \hat{\psi}(\mathbf{x}), \quad (1.6)$$

con $\hat{\psi}(\mathbf{x})$ operatore di campo bosonico. Lo stato fondamentale del sistema, così come le sue proprietà termodinamiche, possono essere calcolati da questa Hamiltoniana. Spesso questi calcoli sono molto complicati, talvolta impossibili. Al fine di aggirare il problema è utile introdurre un approccio di campo medio. L'idea base dell'approccio di campo medio fu formulata per il caso omogeneo ($V_{ext} = 0$) da Bogoliubov nel 1947. La generalizzazione dell'idea originale di Bogoliubov alla situazione fisica reale dell'esperimento, è data descrivendo l'operatore di campo nella rappresentazione di Heisenberg attraverso

$$\hat{\psi}(\mathbf{x},t) = \phi(\mathbf{x},t) + \delta\hat{\psi}(\mathbf{x},t), \qquad (1.7)$$

dove $\phi(\mathbf{x}, t)$ è una funzione complessa definita come il valore di aspettazione dell'operatore di campo, $\phi(\mathbf{x}, t) = \langle \hat{\psi}(\mathbf{x}, t) \rangle$, il cui modulo quadro rappresenta la densità del condensato: $n_0(\mathbf{x}, t) = |\phi(\mathbf{x}, t)|^2$; $\phi(\mathbf{x}, t)$ è un campo classico con fase ben determinata e viene spesso identificato come "funzione d'onda macroscopica del condensato".

Nel limite in cui le fluttuazioni quantistiche $\delta \hat{\psi}(\mathbf{x}, t)$ sono trascurabili, l'evoluzione temporale della funzione d'onda del condensato $\phi(\mathbf{x}, t)$ alla temperatura T = 0è ottenuta inserendo la forma dell'operatore di campo data dall'Eq. (1.7) nell'equazione di Heisenberg $i\hbar\partial\hat{\psi}(\mathbf{x})/\partial t = [\hat{\psi}, \hat{H}]$. Questo porta alla famosa equazione di Gross-Pitaevskii (GP) per il campo medio $\phi(\mathbf{x}, t)$,

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\phi(\mathbf{x},t) = \left(-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} + V_{ext}(\mathbf{x}) + g|\phi(\mathbf{x},t)|^2\right)\phi(\mathbf{x},t),\tag{1.8}$$

con

$$g = \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m}.\tag{1.9}$$

L'equazione di GP è valida se la lunghezza di scattering in onda s è molto minore della distanza media tra gli atomi, e se il numero di atomi appartenenti al condensato è molto maggiore di 1.

Il parametro adimensionale che controlla la validità dell'approssimazione di gas diluito, richiesta per derivare la GP, è il numero di particelle in un "volume di scattering" $|a_s|^3$. Può essere scritto come $\bar{n}|a_s|^3$, dove \bar{n} è la densità media del gas. Quando $\bar{n}|a_s|^3 \ll 1$ il sistema viene detto "fortemente diluito" o "debolmente interagente". Normalmente in esperimenti fatti con campioni di atomi alcalini neutri le lunghezze di scattering variano tra -1.45nm (⁷Li) e 5.77nm (⁸⁷Rb), mentre le densità massime sono dell'ordine di 10¹⁵ atomi/cm³, cosicchè $\bar{n}|a_s|^3$ è sempre minore di 10⁻³. Le soluzioni stazionarie dell'equazione (1.8) possono essere calcolate utilizzando l'ansatz $\phi(\mathbf{x}, t) = e^{-i\mu t/\hbar}\phi(\mathbf{x})$, dove μ è il potenziale chimico del condensato. Sostituendo questa espressione nell'equazione (1.8) otteniamo l'equazione di GP indipendente dal tempo

$$\left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{ext}(\mathbf{x}) + g|\phi(\mathbf{x})|^2\right)\phi(\mathbf{x}) = \mu\phi(\mathbf{x}).$$
(1.10)

L'approssimazione di Thomas-Fermi. Possiamo calcolare analiticamente lo stato fondamentale del sistema risolvendo questa equazione nella cosiddetta approssimazione di Thomas-Fermi: $Na_s/a_{ho} \gg 1$, dove $a_{ho} = \sqrt{\hbar/m\bar{\omega}}$ è la lunghezza media dell'oscillatore armonico e $\bar{\omega} = \sqrt[3]{\omega_x \omega_y \omega_z}$. In questo regime caratterizzato da un grande numero di atomi, il termine di interazione $g|\phi(\mathbf{x})|^2$ domina il termine cinetico $\hbar^2 \nabla^2/2m$, che può essere trascurato. Con questa assunzione l'equazione differenziale 1.3 diventa un'equazione algebrica dalla quale otteniamo la densità del condensato

$$n(\mathbf{x}) = |\phi(\mathbf{x})|^2 = \begin{cases} \frac{1}{g}(\mu - V_{ext}(\mathbf{x})) & \text{se } \mu > V_{ext}(\mathbf{x}) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Nel caso di una trappola armonica, la forma esplicita della distribuzione di densità del condensato è una parabola invertita, ed il potenziale chimico vale

$$\mu = \frac{\hbar\bar{\omega}}{2} \left(\frac{15Na_s}{a_{ho}}\right)^{2/5}.$$
(1.11)

Il termine d'interazione repulsiva nell'equazione (1.3) ha dunque l'effetto di allargare la distribuzione di densità dello stato fondamentale di singola particella.

1.4 Controllo dell'interazione tramite risonanze di Feshbach

Nella sezione precedente abbiamo introdotto la lunghezza di scattering in onda s a_s come l'unico parametro che caratterizza l'interazione in un gas di Bose diluito. La lunghezza di scattering a_s presenta una proprietà particolare: il suo valore può essere modificato, grazie alla presenza delle cosiddette risonanze di Feshbach magnetiche. In questa sezione descriviamo brevemente il meccanismo alla base di questo fenomeno fondamentale che permette la realizzazione sperimentale di ogni regime di interazione. Per una descrizione più dettagliata del problema possono essere consultati vari libri base di meccanica quantistica [19, 20]. Accenni alla teoria dello scattering. La funzione d'onda totale che descrive lo scattering di due particelle (nell'ipotesi in cui lo scatteratore sia puntiforme) ha la forma

$$\psi_k(\mathbf{r}) \sim e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + f(k, \mathbf{n}, \mathbf{n}')\frac{e^{ikr}}{r},$$
(1.12)

con $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$ e $\mathbf{n}' = \mathbf{r}/r$; è cioè la sovrapposizione di un'onda piana incidente e dell'onda sferica diffusa. Questa funzione è la soluzione asintotica dell'equazione di Schrödinger, ovvero fotografa la situazione molto prima e molto dopo l'urto. L'informazione sull'urto è contenuta nel fattore $f(k, \mathbf{n}, \mathbf{n}')$, detto ampiezza di scattering e connesso alla sezione d'urto differenziale da

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(k, \mathbf{n}, \mathbf{n}')|^2.$$
(1.13)

Nel caso semplice in cui il potenziale è a simmetria sferica, la funzione d'onda dipende generalmente dal numero quantico l. È stato però dimostrato che se k tende a zero (quindi a basse energie) nello sviluppo in onde parziali conta soltanto la componente in onda s, quindi il termine l = 0. La funzione d'onda soluzione dell'equazione di Schrödinger è allora

$$u_k(r) \propto \frac{1}{ikr} \left(e^{-ikr} + e^{2i\delta_0} e^{ikr} \right). \tag{1.14}$$

Se confrontiamo la (1.14) con una soluzione dell'equazione di Schrödinger libera in onda s (senza cioè il potenziale di interazione), come l'armonica sferica

$$u_k(r) \propto \frac{1}{ikr} \left(e^{-ikr} + e^{ikr} \right),$$
 (1.15)

possiamo interpretare il termine δ_0 come un'alterazione di fase nella componente uscente della funzione d'onda.

Utilizzando l'equazione (1.13) nel caso di particelle indistinguibili, in particolare nel caso di bosoni, troviamo che la sezione d'urto vale

$$\sigma_{l=0}(k) = 8\pi a_s^2, \tag{1.16}$$

dove definiamo la lunghezza di scattering in onda s come

$$a_s = -\lim_{k \to 0} \frac{\tan \delta_0(k)}{k}.$$
(1.17)

In un gas di Bose diluito quindi le interazioni tra gli atomi possono essere descritte tramite il singolo parametro a_s , come già anticipato nel paragrafo precedente.

Un caso semplice: la buca di potenziale quadrata. Cerchiamo di comprendere il comportamento di a_s applicando i risultati appena descritti al caso in cui l'interazione tra gli atomi sia una buca di potenziale quadrata. Il potenziale ha dunque la forma

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & \text{se } r < b \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

È facile derivare la soluzione dell'equazione di Schrödinger per lo scattering in onda s

$$u(r) = \begin{cases} c_1(r-a_s) & \text{se } r < b \\ c_2 \sin(k_0 r) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove $k_0 \equiv \sqrt{2\mu V_0}/\hbar$. Dalla condizione di continuità della funzione d'onda e della sua derivata prima in *b* troviamo la relazione

$$a_s = b - \frac{\tan(k_0 b)}{k_0}.$$
 (1.18)

che esprime l'andamento della lunghezza di scattering in questo potenziale d'interazione. Da questo semplice modello, possiamo derivare alcune idee molto generali. Le riassumiamo nei seguenti punti:

- Se la buca è poco profonda, $k_0 b < \pi/2$ e la lunghezza di scattering è negativa (vedi la (1.18)). Questa condizione equivale ad avere un potenziale di scattering troppo basso per permettere la formazione di uno stato legato [22].
- All'aumentare della profondità del potenziale si raggiunge la situazione in cui il primo stato legato si avvicina all'energia di soglia: questo accade ogni volta che $k_0 b = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$, provocando quindi una divergenza nella lunghezza di scattering. Questa relazione generale è nota come teorema di Levinson.
- Quando V_0 è appena al di sotto (o al di sopra) del valore necessario perchè appaia un nuovo stato legato all'energia di soglia, la lunghezza di scattering è grande e negativa (o positiva). Questo risultato è generale.

La risonanza di Feshbach Si ha una risonanza di Feshbach quando, in un processo di scattering tra due atomi, la soglia dell'energia di interazione è in risonanza con uno stato legato molecolare, in analogia con quanto accade nel caso semplice della buca quadrata. La condizione di risonanza viene raggiunta grazie all'applicazione di un campo magnetico omogeneo (Fig. 1.1). Poichè in presenza di un campo magnetico gli atomi presentano una separazione Zeeman dei livelli, e le energie dei



Interatomic distance (arb. units)

Figura 1.1: La differenza in energia tra uno stato legato molecolare (closed channel) e la soglia dell'energia di interazione di due atomi che collidono (open channel) può essere modificata tramite un campo magnetico esterno.



Figura 1.2: Lunghezza di scattering per collisioni di $|F = 1, m_f = 1\rangle + |F = 1, m_f = 1\rangle$ ³⁹K in funzione del campo magnetico. Le linee tratteggiate indicano le posizioni di risonanza. Nell'esperimento utilizziamo la risonanza a 400 G larga abbastanza da permettere di modificare l'interazione con grande precisione.

diversi canali solitamente si comportano in modo diverso al variare del campo, può in effetti accadere che lo stato legato di un canale chiuso diventi risonante con l'energia di soglia. La dipendenza della lunghezza di scattering dal campo magnetico può essere descritta con la formula approssimata [22]

$$a_s(B) = a_{bg} \left(1 - \frac{\Delta}{B - B_0} \right), \tag{1.19}$$

dove a_{bg} è la lunghezza di scattering lontano dalla risonanza, B_0 è il centro della risonanza, $\Delta \equiv B_{ZC} - B_0$ la larghezza della risonanza e B_{ZC} è il campo al cui valore la lunghezza di scattering si annulla, detto *zero crossing*. Mentre la risonanza è un fenomeno generale, i parametri che caratterizzano la sua dipendenza da *B* dipendono dal particolare sistema atomico in esame. Nel caso del ³⁹K la risonanza di Fescbach utilizzata sperimentalmente è quella riportata in Fig. 1.2.

Capitolo 2

Produzione sperimentale di un condensato

Descriviamo ora brevemente il principio delle tecniche utilizzate per produrre in laboratorio condensati di Bose-Einstein, in particolare raffreddando la miscela ³⁹K-⁸⁷Rb e condensando il così ³⁹K. In linea di principio, al fine di raggiungere la condizione di degenerazione quantistica, potremmo pensare di comprimere il gas piuttosto che raffreddarlo. In realtà la compressione del sistema comporterebbe una sua solidificazione, perchè per grandi valori di densità, interverrebbero collisioni a tre atomi con conseguenti formazioni di molecole e successivamente di aggregati sempre più grandi; in poche parole l'interazione tenderebbe a localizzare gli atomi, a renderli spazialmente distinguibili gli uni dagli altri prevenendo così la BEC.

Ecco quindi la necessità di lavorare con gas diluiti $(n \sim 10^{14} \text{ atomi/cm}^3)$ dove le collisioni a due corpi sono gli unici processi di interazione, pagando però il dazio di dovere lavorare a temperature bassissime $(T \sim 100 \text{ nK})$.

Usualmente per raffreddare campioni di atomi in fase gassosa dalla temperatura ambiente fino a temperature dell'ordine di 100 nK, si usa una combinazione di due diverse tecniche. Con il raffreddamento laser si può diminuire la temperatura del campione atomico fino a decine di μ K, mentre attraverso una successiva fase di raffreddamento evaporativo è possibile portare il campione gassoso sino alla temperatura di condensazione.

2.1 Raffreddamento laser

Un atomo, in seguito all'assorbimento di un fotone di impulso \mathbf{k} , subisce, per la conservazione della quantità di moto, una variazione di velocità pari a

$$\Delta \mathbf{v} = \frac{\hbar \mathbf{k}}{M} \tag{2.1}$$

dove M è la massa dell'atomo. Successivamente l'atomo può diseccitarsi per emissione spontanea o stimolata. Il risultato netto del processo di assorbimento ed emissione mediato su molti cicli è una variazione della quantità di moto dell'atomo lungo la direzione del fotone incidente: può essere visto come una forza agente sull'atomo stesso. Tale forza sarà differente se l'emissione è spontanea o stimolata. Nel processo di emissione spontanea l'impulso del fotone emesso è random, quindi a seguito di ogni ciclo di assorbimento-emissione la componente della quantità di moto nella direzione \mathbf{k} cambierà (pressione di radiazione). Nel secondo caso l'atomo dopo avere assorbito il primo fotone, non cambierà più velocità, poichè emette e riassorbe contemporaneamente fotoni con lo stesso impulso (forza di dipolo).

Uno studio quantistico più dettagliato dell'interazione di un atomo a due livelli con luce monocromatica, fornisce le seguenti espressioni per le due forze considerate [23]

$$\mathbf{f}_{press} = -\hbar \frac{\Gamma}{2} \frac{s}{s+1} \nabla \Phi \tag{2.2}$$

$$\mathbf{f}_{dip} = -\hbar\Delta \frac{s}{s+1} \frac{\nabla\Omega}{\Omega} \tag{2.3}$$

con $s = (\Omega^2/2)/(\Delta^2 + \Gamma^2/4)$ parametro di saturazione della transizione atomica, Γ larghezza naturale di riga della transizione, Δ detuning della frequenza della radiazione incidente rispetto alla frequenza di risonanza ω_0 , Ω frequenza di Rabi della transizione e Φ fase della radiazione incidente. Lavoriamo nell'approssimazione che la radiazione del laser incidente sia un'onda piana

$$\mathbf{E}_L = \mathbf{E}_0 \cos(\omega_L t - \mathbf{k}_L \cdot \mathbf{r}). \tag{2.4}$$

Allora $\nabla \Phi = -\mathbf{k}_L \in \nabla \Omega = 0$, da cui si ottiene

$$\mathbf{f}_{press} = -\hbar \mathbf{k}_L \frac{\Gamma}{2} \frac{I/I_s}{1 + I/I_s + (2\Delta)^2}$$
(2.5)

$$\mathbf{f}_{dip} = 0 \tag{2.6}$$

dove $I/I_s = \Omega^2/(\Gamma^2/2)$, con I_s intensità di saturazione della transizione. La forza di dipolo in questo caso è nulla perchè i fotoni emessi hanno stessa direzione di quelli

assorbiti. Nel caso di una generica combinazione di onde piane la forza di dipolo non sarà nulla; può essere ugualmente trascurata se pensiamo di utilizzare intensità molto minori a quella di saturazione. La pressione di radiazione ha direzione e verso ben stabiliti dal vettore d'onda del fotone incidente, perchè nel calcolo il contributo random del fotone diffuso viene mediato a zero; la forza tende a zero sia nel limite di intensità nulle che nel limite di Δ elevati; inoltre nel limite di alte intensità incidenti si ha un'accalerazione massima pari a

$$a_{max} = \frac{\hbar k_L}{M} \frac{\Gamma}{2}.$$
(2.7)

Questa espressione mette in luce la natura della pressione di radiazione: infatti per intensità incidenti abbastanza grandi il numero di fotoni assorbiti dipende dalla larghezza naturale della transizione, ovvero dalla velocità con cui l'atomo si diseccita Per il ⁸⁷Rb la lunghezza d'onda della luce utilizzata è 780 nm e la larghezza naturale della transizione coinvolta è $\Gamma_{Rb} = 2\pi \cdot 5.9$ MHz, mentre per il ³⁹K $\lambda_L = 767$ nm e $\Gamma_K = 2\pi \cdot 6.2$ MHz. in entrambi i casi $a_{max} \sim 10^3$ g, dove g è l'accelerazione di gravità.

2.1.1 Melassa ottica

Fino ad ora abbiamo esclusivamente descritto il processo di interazione di un atomo fermo rispetto alle sorgenti laser. Nel caso reale la velocità degli atomi non è unica (ed in particolare nulla), ma ha una distribuzione. Per generalizzare i risultati precedenti al caso di un atomo in movimento con velocità \mathbf{v} rispetto alle sorgenti laser (quindi per ogni atomo della distribuzione), è sufficiente mettersi nel sistema di riferimento dell'atomo stesso e considerare che esso vede la radiazione laser ω_L spostata in frequenza di una quantità pari a $-\mathbf{k}_L \cdot \mathbf{v}$ a causa dell'effetto Doppler. Quindi la formula per \mathbf{f}_{press} è ancora valida a patto di sostituire $\omega_L \operatorname{con} \omega_L - \mathbf{k}_L \cdot \mathbf{v}$. Consideriamo un sistema unidimensionale composto da un atomo in movimento con velocità \mathbf{v} , in interazione con una coppia di fasci laser contropropaganti (approssimati con onde piane), che emettono luce coerente ad una frequenza ω_L (tutto nel riferimento del laboratorio). Se $I \ll I_s$ possiamo trascurare la forza di dipolo e considerare che la forza totale sull'atomo sia semplicemente la somma dei contributi delle pressioni di radiazione dei laser di destra e di sinistra. Considerando la formula (2.2) per ogni laser e trascurando i termini in I/I_s al denominatore otteniamo l'espressione per la forza totale F che agisce sull'atomo

$$F = \hbar k_L \frac{\Gamma}{2} \frac{I}{I_s} \frac{16k_L v\Delta/\Gamma^2}{1 + 8(\Delta^2 + k_L^2 v^2)/\Gamma^2 + 16((\Delta^2 + k_L^2 v^2)/\Gamma^2)^2}$$
(2.8)

Il segno della forza è determinato dal segno del detuning Δ . In particolare, se $\Delta < 0$ la forza totale agisce sull'atomo in verso opposto alla velocità frenandolo. Se $|k_L v| \ll \Gamma$ possiamo sviluppare l'espressione di F in potenze di $k_L v/\Gamma$: fermandosi al primo ordine otteniamo

$$F = -\alpha v \tag{2.9}$$

dove

$$\alpha = -4\hbar k_L^2 \frac{I}{I_s} \frac{2\Delta/\Gamma}{(1 + (\frac{\Delta}{\Gamma/2})^2)^2}$$
(2.10)

Quindi un atomo illuminato da due fasci laser contropropaganti e con frequenza spostata verso il rosso rispetto alla transizione atomica, nel limite di basse velocità, è soggetto ad una forza di natura viscosa che lo rallenta. Un sistema di questo tipo viene chiamato melassa ottica unidimensionale.

I fotoni diffusi in onda s conferiscono all'atomo una velocità media nulla, ma una velocità quadratica media diversa da zero che contribuisce ad un riscaldamento relativo. Bilanciando il termine di raffreddamento col termine di riscaldamento random si trova la temperatura minima raggiungibile, chiamata temperatura Doppler ottenibile per $\Delta = -\Gamma/2$ e data dall'espressione

$$K_B T_{min} = \hbar \frac{\Gamma}{2} \tag{2.11}$$

Per il ⁸⁷Rb $T_{min} \sim 130 \mu \text{K}$ mentre per il ³⁹K $T_{min} \sim 150 \mu \text{K}$.

Ricordiamo brevemente le approssimazioni fatte. In primo luogo abbiamo considerato un semplice modello unidimensionale, quando invece le vere melasse utilizzate nel raffreddamento richiedono la presenza di tre coppie di fasci laser contropropaganti e mutuamente ortogonali. Secondariamente abbiamo utilizzato un modello di atomi a due livelli in interazione con un fascio monocromatico, mentre in realtà i livelli che intervengono nella fase di emissione ed assorbimento sono più di due. Uno studio più generale che tenga conto anche di questo aspetto prevede il raggiungimento di temperature inferiori di quella calcolata, a causa dell'innescarsi di meccanismi più complessi, noti come meccanismi SubDoppler. Infine ci siamo dimenticati le polarizzazioni dei due laser e abbiamo trascurato la forza di dipolo.

Nonostante le approssimazioni le temperature minime sperimentalmente osservate sono in buon accordo con le previsioni teoriche, che sbagliano soltanto di un fattore 2-3.

2.1.2 Trappola magneto-ottica (MOT)

La melassa ottica è un buon strumento per raffreddare, ma non può garantire grandi densità atomiche. Infatti a causa della riemissione random dei fotoni assorbiti, gli atomi presentano un moto diffusivo che li allontana dalla regione di intersezione dei fasci laser, provocandone la perdita. Un notevole passo avanti venne fatto nel 1990 da C. Wieman [24] il quale riuscì a portare un gas atomico (cesio) alla temperatura di 1 μ K ma con densità molto maggiori di quelle raggiunte nelle melasse ottiche. Wienman concretizzò sperimentalmente le idee di J. Dalibard e D.E. Pritchard [25] i quali proposero di aggiungere ai due fasci contropropaganti un gradiente di campo magnetico. Questa nuova configurazione venne chiamata trappola magneto-ottica (MOT).

Gli atomi sono illuminati da due fasci laser contropropaganti con polarizzazione σ^+ , σ^- e con frequenza spostata verso il rosso. Due bobine in configurazione di quadrupolo generano un campo magnetico che si annulla al centro della trappola e cresce linearmente lungo l'asse di propagazione dei fasci. Il processo di raffreddamento in una MOT è uguale a quello di una melassa; l'energia cinetica che possiede l'atomo a causa della temperatura è dissipata dalla riemissione random dei fotoni assorbiti dai fasci. Tuttavia la presenza del campo magnetico separa i sottolivelli Zeeman da ogni livello coinvolto e poichè l'intensità del campo magnetico dipende dalla posizione, anche l'energia di ogni sottolivello Zeeman coinvolto nella transizione dipenderà dalla posizione. La polarizzazione dei fasci laser è tale che l'atomo che si trova in $z \neq 0$ assorba preferibilmente il fascio che lo spinge nuovamente verso z = 0.

Le temperature minime raggiungibili con una MOT sono simili a quelle ottenibili con una melassa classica; il vantaggio dell'utilizzo di una MOT è la maggiore densità del gas raffreddato

2.2 Raffreddamento evaporativo

Anche se le temperature raggiunte con una MOT sono dell'ordine delle decine di μ K (nei casi migliori), le densità atomiche sono ancora troppo basse per sperare di osservare la transizione di fase. Tale limite in densità è fissato dal riassorbimento, da parte degli atomi precedentemente rallentati, dei fotoni scatterati dagli atomi in fase di rallentamento. Il metodo di raffreddamento che accoppiato al preraffreddamento

laser garantisce minori temperature e maggiori densità atomiche è il raffreddamento evaporativo.

Il processo fisico alla base del raffreddamento evaporativo [26] è molto semplice. Consideriamo un sistema di particelle confinato in un potenziale esterno di profondità V_0 ben definita. Tutte le particelle del sistema con energia maggiore della profondità della buca abbandoneranno il sistema, diminuendone l'entropia. Le collisioni tra le rimanenti particelle ripopoleranno la coda ad alta energia della distribuzione di Boltzmann permettendo al sistema di raggiungere un nuovo stato di equilibrio termodinamico caratterizzato da una temperatura minore. Esiste però un vicolo sperimentale che limita l'efficienza del processo evaporativo: il tempo di vita finito τ_p degli atomi all'interno della trappola; una loro perdita riduce la densità ndel campione e di conseguenza la frequenza di collisioni elastiche definita come

$$\gamma_{el} = n\sigma_{el}v \tag{2.12}$$

dove σ_{el} è la sezione d'urto per collisioni elastiche in onda s e v la velocità media atomica. La velocità di termalizzazione è proporzionale a γ_{el} ; la costante di proporzionalità è diversa nei casi di campione atomico puro (⁸⁷Rb) o di miscela (⁸⁷Rb - ³⁹K). L'efficienza del raffreddamento evaporativo peggiorerà se γ_{el} diminuisce. Ovviamente affinchè il raffreddamento sia efficace, occorre che γ_{el} sia maggiore di $1/\tau_p$ e che resti almeno costante nel tempo. In un potenziale armonico $n \propto T^{-3/2}$ e $v \propto \sqrt{T}$, allora $\gamma_{el} \propto N/T$. Dovremo quindi fare in modo che le perdite di atomi, intrinseche nel processo di evaporazione, siano minori della diminuzione di temperatura.

È possibile eseguire l'evaporazione in due diversi modi. Il primo metodo viene utilizzato quando il potenziale di trappola ha un'estensione finita sulle dimensioni tipiche del condensato ($\sim 1 \text{ mm}$), come accade in un potenziale ottico che presenta un profilo gaussiano. È allora possibile evaporare diminuendo la profondità finita della buca, ad esempio abbassando l'intensità del laser.

Il secondo metodo è invece effettuato in potenziali infiniti sulle dimensioni del condensato, nei quali è necessario inserire un cutoff. In particolare in trappola magnetica questo metodo sfrutta la separazione dei livelli energetici iperfini dell'atomo in un campo magnetico a causa dell'effetto Zeeman. Alcuni livelli Zeeman intrappolano gli atomi nel potenziale magnetico, altri invece li espellono. Tale separazione Zeeman dipende dal campo magnetico **B**, che a sua volta dipende dalla posizione. L'evaporazione viene eseguita attraverso l'utilizzo di radiofrequenze (MHz) o micro-onde (GHz) in risonanza con le transizioni da sottolivelli Zeeman intrappolati a sottolivelli non intrappolati. Fissata una frequenza ν_{taglio} corrispondente con la separazione in frequenza tra due sottolivelli Zeeman che si trovano nella posizione \mathbf{x} tale che $\Delta U_{F,m_F} = h\nu_{taglio}$, la posizione spaziale di tali atomi è definita dalle superfici equipotenziali $U_{F,m_F} \propto |\mathbf{B}(\mathbf{x})| = cost$. Tutti gli atomi che a causa dell'agitazione termica attraversano la superficie equipotenziale, subiscono la transizione verso sottolivelli Zeeman non confinati e abbandonano il sistema. Al diminuire della frequenza di taglio verranno espulsi atomi sempre più freddi, sino al raggiungimento della temperatura desiderata.

Capitolo 3

Reticoli ottici

In questo capitolo introduciamo il secondo dei due ingredienti che compongono gli esperimenti descritti in questa tesi: i reticoli ottici. Per intrappolare un condensato di Bose-Einstein in un potenziale periodico, è sufficiente sfruttare la forza che la luce esercita sugli atomi condensati, ad esempio creando un pattern di interferenza attraverso la sovrapposizione di due o più fasci laser. Nella prima sezione di questo capitolo introdurremo le nozioni fondamentali riguardanti l'interazione tra atomi e luce laser, per descrivere la natura della forza costituente il reticolo [27]. Esamineremo poi brevemente i parametri caratteristici di trappole ottiche e di reticoli ottici.

Nella seconda sezione del capitolo esamineremo invece da un punto di vista teorico il comportamento statico e dinamico di un condensato di Bose-Einstein in un potenziale periodico, utilizzando un approccio analogo a quello usato in fisica dello stato solido per la descrizione del moto di elettroni in un reticolo [28].

Infine illustriamo lo schema ottico del reticolo che abbiamo realizzato sperimentalmente.

3.1 Forza di dipolo

Quando un atomo è immerso in una luce laser, il campo elettrico complesso $\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \hat{\mathbf{e}}\tilde{E}(\mathbf{r})\exp(-i\omega t) + c.c.$ induce un momento di dipolo $\mathbf{p}(\mathbf{r},t) = \hat{\mathbf{e}}\,\tilde{p}(\mathbf{r})\exp(-i\omega t) + c.c.$ sull'atomo che oscilla alla stessa frequenza ω del campo. L'ampiezza \tilde{p} del momento di dipolo ed \tilde{E} del campo elettrico sono legate dalla relazione $\tilde{p} = \alpha \tilde{E}$, dove $\alpha = \alpha(\omega)$ è la polarizzabilità complessa. Il potenziale d'interazione tra il dipolo indotto ed il

campo elettrico è

$$V_{dip} = -\frac{1}{2} \langle \mathbf{pE} \rangle = -\frac{1}{2\epsilon_0 c} \operatorname{Re}(\alpha) I, \qquad (3.1)$$

dove le parentesi $\langle \rangle$ denotano una media temporale e l'intensità del campo è $I = 2\epsilon_0 c |\tilde{E}|^2$. L'energia potenziale è quindi proporzionale all'intensità I del laser e alla parte reale della polarizzabilità, che descrive la componente in fase al campo dell'oscillazione del dipolo. Il gradiente di V_{dip} è la forza di dipolo.

La potenza assorbita dall'oscillatore a causa del campo esterno (e riemessa come radiazione di dipolo) è

$$P_{abs} = \langle \dot{\mathbf{p}} \mathbf{E} \rangle = \frac{\omega}{\epsilon_0 c} \mathrm{Im}(\alpha) I.$$
(3.2)

L'assorbimento è proporzionale alla parte immaginaria della polarizzabilità, che descrive la componente fuori fase dell'oscillazione del dipolo. Considerando la luce come flusso di fotoni $\hbar\omega$, l'assorbimento può essere interpretato in termini di scattering di fotoni. Il corrispondente rate di scattering è

$$\Gamma_{sc}(\mathbf{r}) = \frac{P_{abs}}{\hbar\omega} = \frac{1}{\hbar\epsilon_0 c} Im(\alpha)I(\mathbf{r}).$$
(3.3)

Attraverso un approccio semiclassico è possibile calcolare la plarizzabilità considerando sistemi quantistici a due livelli in interazione con campi classici. Si trova che, quando gli effetti di saturazione possono essere trascurati

$$\alpha = 6\pi\epsilon_0 c^3 \frac{\Gamma/\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i(\omega^3/\omega_0^2)\Gamma},\tag{3.4}$$

dove ω_0 è la frequenza di transizione ottica e Γ è il rate di attenuazione, determinato quantisticamente dall'elemento di matrice dell'operatore di dipolo valutato tra stato fondamentale ed eccitato

$$\Gamma = \frac{\omega_0^3}{3\pi\epsilon_0\hbar c} |\langle e|\mu|g\rangle|^2.$$
(3.5)

Utilizzando questa espressione della polarizzabilità è possibile derivare le seguenti espressioni per il potenziale di dipolo ed il rate di scattering, nel caso rilevante in di grande detuning $\Delta \equiv \omega - \omega_0$ (ma comunque tale che $|\Delta| \ll \omega_0$) e saturazione trascurabile

$$V_{dip}(\mathbf{r}) = -\frac{3\pi c^2}{2\omega_0^3} \frac{\Gamma}{\Delta} I(\mathbf{r}), \qquad (3.6)$$

$$\Gamma_{sc}(\mathbf{r}) = -\frac{3\pi c^2}{2\hbar\omega_0^3} \left(\frac{\Gamma}{\Delta}\right)^2 I(\mathbf{r}).$$
(3.7)

Queste sono le equazioni fondamentali necessarie per descrive la fisica di un atomo intrappolato otticamente in una luce laser con frequenza lontana dalla risonanza atomica. Evidenziamo in particolare due aspetti emergenti dalle equazioni.

- Segno del detuning: sotto la risonanza atomica ($\Delta < 0$, detuning rosso) il potenziale di dipolo è negativo e quindi l'interazione attrae gli atomi nel campo della luce laser. I minimi del potenziale si trovano allora nelle posizioni di massima intensità del laser. Sopra la risonanza ($\Delta > 0$, detuning blu) l'interazione di dipolo respinge gli atomi fuori dal campo, e i minimi di potenziale corrispondono ai minimi di intensità. In accordo con questa distinzione le trapple di dipolo possono essere distinte in due categorie, trappole red-detuned e trappole blue-detuned.
- Rapporto tra I e Δ : il potenziale di dipolo scala come I/Δ , mentre la frequenza di scattering scala come I/Δ^2 . Quindi, al fine di mantenere il tasso di scattering il più basso possibile per una fissata profondità del potenziale, si costruiscono solitamente trappole ottiche con grandi detuning ed alte intensità.

Questo non è il solo approccio possibile per derivare la forza di dipolo. Seguendo un'analisi più quantistica, è possibile ottenere la forza di dipolo dallo spostamento in energia introdotto dall'accoppiamento del campo elettrico con i livelli atomici. Consideriamo un sistema composto da uno stato fondamentale $|q\rangle$ e uno stato eccitato $|e\rangle$ aventi energia rispettivamente $\hbar\omega_q \in \hbar\omega_e$. In presenza di un campo elettrico questi due stati cessano di essere gli autostati del sistema. Diagonalizzando la nuova Hamiltoniana che include i termini di interazione atomo-radiazione, troviamo due nuovi autostati $|g'\rangle \in |e'\rangle$, scrivibili come combinazione lineare degli stati iniziali $|g\rangle \in |e\rangle$. I nuovi autostati hanno energia $\hbar\omega_q + \hbar(-\Delta + \sqrt{\Omega^2 + \Delta^2}/2)$ e $\hbar\omega_e + \hbar(-\Delta - \sqrt{\Omega^2 + \Delta^2}/2)$. Lo spostamento nell'energia degli stati atomici introdotto dall'accoppiamento con il campo elettrico è chiamato ac Stark shift. Quando $\Delta \gg \Omega$ lo spostamento in energia si riduce a $+\hbar \Omega^2/4\Delta = -\hbar \Omega^2/4\Delta$. Assumendo che l'intensità del campo $I \propto \Omega^2$ dipenda della posizione, poichè l'ac Stark shift è proporzionale all'intensità, anche l'energia dello stato fondamentale risulta essere funzione della posizione. Il potenziale di dipolo può quindi essere definito come l'ac Stark shift dello stato fondamentale

$$V_{dip} = \frac{\hbar\Omega^2}{4\Delta} = \frac{\mu^2 E^2}{4\hbar\Delta}.$$
(3.8)

Usando la definizione del momento di dipolo atomico $\mu = \sqrt{3\pi\epsilon_0 \hbar c^3 \Gamma/\omega_0^3}$ e dell'intensità media del campo elettrico $I = 2\epsilon_0 cE^2$ è facile ridurre questa definizione all'Eq. (3.6).

Queste equazioni sono valide per il caso di un atomo a due livelli. Per il caso reale di un atomo a molti livelli le cose si complicano introducendo in particolare una dipendenza del potenziale di dipolo dal particolare sottostato dell'atomo. La dipendenza generale del potenziale ottico da intensità e detuning del laser rimane comunque vera.

Trappola ottica. Una trappola ottica stabile può essere realizzata semplicemente focalizzando un fascio laser su di un waist di dimensione w. Se il profilo di intensità del fascio è gaussiano, sfruttando l'Eq. (3.6), troviamo la forma dell'energia potenziale d'interazione

$$V(r,z) = V_0 \exp\left(-\frac{2r^2}{w(z)^2}\right),$$
(3.9)

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2},$$
 (3.10)

dove $V_0 \propto I_p/\Delta$ è la profondità della trappola , con I_p intensità del picco del fascio, w_0 waist (raggio) del fascio gaussiano e $z_R = w_0^2 \pi / \lambda_L$ lunghezza di Rayleigh; z indica la direzione di propagazione del fascio, r indica invece la direzione radiale, cioè perpendicolare alla direzione di propagazione. Sviluppando questa espressione per z = 0 attorno a r = 0 troviamo che il potenziale ha una forma armonica e la frequenza di oscillazione radiale di un atomo di massa m in tale potenziale è

$$\omega_{\perp} = \frac{1}{w} \sqrt{\frac{2V_0}{m}}.$$
(3.11)

Oltre alla forza di trappola radiale, sugli atomi agisce anche una forza longitudinale. Poichè la scala di lunghezza nella direzione longitudinale (data dalla lunghezza di Rayleigh z_R) è molto maggiore della scala di lunghezza radiale, la forza è molto minore di quella agente radialmente. Per confinare strettamente gli atomi in ogni direzione spaziale, è necessario usare due (o più) fasci laser sovrapposti.

Reticolo ottico unidimensionale. Consideriamo cosa succede quando due fasci laser identici di intensità I_p contropropagano in modo tale che le loro sezioni d'urto si sovrappongano completamente. Imponiamo inoltre che le loro polarizzazioni siano parallele. Allora i due fasci creano un pattern di interferenza, con una distanza tra due massimi successivi pari a $\lambda_L/2$. Il potenziale visto dagli atomi è semplicemente

$$V(x) = V_0 \cos^2(\pi x/d), \qquad (3.12)$$

dove $d = \lambda_L/2 = \pi/k_L$ è la spaziatura del reticolo e V_0 è la profondità della buca, ricavabile, nel caso semplice di atomi a due livelli, dal potenziale di dipolo (3.6); in ogni caso V_0 è direttamente proporzionale all'intensità del laser ed inversamente proporzionale al suo detuning. Per considerazioni quantitative utilizziamo l'energia caratteristica

$$E_R = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2md^2},$$
 (3.13)

che è l'energia cinetica dello stato fondamentale di una particella confinata in una scatola unidimensionale di dimensione d (essendo l'incertezza sul momento dell'ordine di \hbar/d); indichiamo la profondità della buca attraverso il parametro adimensionale $s = V_0/E_R$. Se $s \gg 1$ ($V_0 \gg E_R$) il tunneling delle particelle tra i minimi di potenziale è soppresso, mentre nel limite opposto, le particelle sono essenzialmente libere. Poichè $k_L = \pi/d$, E_R è anche pari all'energia di rinculo di un atomo dopo l'assorbimento di un fotone.

Sviluppando il potenziale in serie di potenze attorno un suo minimo (ad esempio x = d/2) troviamo, in analogia coi calcoli fatti per la trappola di dipolo, che la frequenza di oscillazione armonica di un atomo intrappolato in una delle buche del reticolo è

$$\omega_{lat} = \frac{\pi}{d} \sqrt{\frac{2V_0}{m}} \qquad \text{o anche} \qquad \hbar \omega_{lat} = 2\sqrt{V_0 E_R}. \tag{3.14}$$

Paragonando questa frequenza a ω_{\perp} , vediamo che entrambe dipendono dall'inverso delle loro rispettive scale di lunghezza ($w \in d$): per trappole di dipolo con $w = 10 \ \mu$ m, è possibile avere frequenze di oscillazione fino a qualche centinaia di Hz. La scala di lunghezza per un reticolo con $\lambda_L = 1064$ nm è pressapoco 20 volte minore. Questo significa che con la stessa intesità del laser possiamo realizzare una trappola che possiede (localmente) una frequenza di oscillazione armonica dell'ordine di qualche kHz.

3.2 BEC in un reticolo

Studiamo ora il comportamento di un condensato di Bose-Einstein in un reticolo periodico. Ci limitiamo al caso lineare, cioè al caso in cui il condensato è non interagente

3.2.1 Struttura a bande

Per semplicità restringiamo la discussione al potenziale periodico sinusoidale unidimensionale (3.12) che scriviamo nella forma

$$V(x) = sE_R \cos^2(k_L x), \qquad (3.15)$$

con $k_L = \pi/d$. L'estensione ai casi bidimensionale e tridimensionale è diretta. È possibile calcolare le soluzioni stazionarie di questo sistema con metodi analoghi a quelli utilizzati in fisica dello stato solido per risolvere il problema di elettroni in un potenziale periodico, anche se i parametri numerici nei due casi sono molto diversi. Nei solidi infatti la distanza tra minimi di potenziale adiacenti è la distanza interatomica, $\sim 10^{-8}$ cm; in un reticolo ottico la distanza dipende dalla lunghezza d'onda della luce laser, che è tipicamente tre ordini di grandezza maggiore. Inoltre l'altezza della barriera di potenziale in un reticolo di ioni è dell'ordine dell'elettronvolt, $\sim 10^5$ K, dieci ordini di grandezza maggiore della profondità della buca in un reticolo ottico.

Per il teorema di Bloch le autofunzioni hanno forma

$$\Phi_{n,q}(x) = e^{iqx} u_{n,q}(x), \qquad (3.16)$$

dove q viene detto quasimomento, n è l'indice di banda e le funzioni $u_{n,q}$ sono periodiche con periodicità d (cioè $u_{n,q}(x+d) = u_{n,q}(x)$). Allora è possibile scrivere le funzioni d'onda ed il potenziale periodico in serie di Fourier, definendo il vettore del reticolo reciproco $G = 2\pi/d$,

$$\Phi_{n,q}(x) = e^{iqx} \sum_{m} c_m^n e^{imGx}, \qquad (3.17)$$

$$V(x) = \sum_{m} V_m e^{imGx}.$$
(3.18)

Inserendo queste espressioni nell'equazione di Schrödinger e troncando la somma per |m| = N (N numero di siti reticolari), si giunge ad un sistema di 2(2N + 1) equazioni lineari

$$\left(\frac{\hbar^2}{2m}(q-mG)^2 - E_q\right)c_{q-mG} + \sum_{m'} V_{m'-m} c_{q-m'G} = 0$$
(3.19)

con m = -N, -N + 1, ..., N - 1, N. Fissato q, esistono 2N + 1 diversi autovalori E_n con n = 0, 1, ..., 2N; queste sono le bande di energia. Tra una banda e l'altra a causa della degenerazione degli stati atomici, si possono aprire gap di energia. Per ogni autovalore esiste un'autofunzione corrispondente data dalla componente di Fourier c_{q-mG}^n . Le autoenergie e gli autostati dipendono dalla profondità del potenziale V_0 e dal quasimomento q. Cerchiamo di riassumere brevemente le proprietà degli autostati e delle bande di energia nei due casi di maggiore interesse: per potenziali deboli $(V_0 \sim E_R)$ e per potenziali profondi $(V_0 \sim 10E_R)$.



Figura 3.1: (a) Struttura a bande in un potenziale debole con s = 1. (b) Distribuzione spaziale di probabilità delle autofunzioni per ogni energia (scala di grigio) e dipendenza spaziale degli stati di Bloch al bordo delle zone di Brillouin (linee nere). Il potenziale periodico è rappresentato attraverso la linea tratteggiata [28].

Potenziale debole. In questo limite $(s \sim 1)$ la struttura a bande è approssimativamente data da

$$\frac{E(\tilde{q})}{E_R} = \tilde{q}^2 \mp \sqrt{4\tilde{q}^2 + \frac{s^2}{14}},\tag{3.20}$$

con $\tilde{q} = q/k_L - 1$. Il segno meno (più) da luogo alla prima (seconda) banda. Le energie dipendono criticamente dal quasimomento q, come mostrato in Fig. 3.1 (a). Poichè l'energia di gap tra la banda n ed n + 1 scala come V_0^{n+1} i soli stati legati del sistema, nel limite di potenziale debole, sono quelli appartenenti alle prime due banda. Particelle con energie più alte si comporteranno come particelle libere. Il gap si apre per $q = k_L = \pi/d$ e vale: $\Delta E_{gap} = \frac{1}{2}sE_R$.

Il Fig. 3.1 (b) descriviamo la situazione nello spazio reale: la distribuzione di probabilità delle autofunzioni è rappresentata in scala di grigio in modo tale che le aree di maggiore probabilità siano nere. Le autofunzioni alle energie più basse e più alte sono quasi costanti, perchè a queste energie le funzioni d'onda atomiche sono in gran parte date da onde piane corrispondenti al caso di particella quasi libera. Al contrario per energie vicine al bordo superiore della banda più bassa, la probabilità di distribuzione è periodica e i suoi massimi coincidono con i minimi del potenziale.



Figura 3.2: (c) Struttura a bande nel limite tight binding con s = 10. (d) Distribuzione spaziale di probabilità delle autofunzioni in scala di grigio. Il potenziale periodico è rappresentato attraverso la linea tratteggiata. Fig. presa da [28].

Per questa energia (ovvero al bordo della zona di Brillouin) abbiamo disegnato anche la funzione d'onda che è uno stato di Bloch, la cui fase cambia di π tra due buche adiacenti.

Modello tight binding. Nel limite di potenziali profondi $(s \ge 5)$, o tight binding, le energie degli stati appartenenti alle bande più basse sono solo debolmente dipendenti dal quasimomento q (vedi Fig. 3.2 (c)). La forma analitica dell'energia nella banda più bassa in funzione del quasimomento, calcolata a partire da una Hamiltoniana in seconda quantizzazione detta Hamiltoniana tight binding, è data da

$$E(q) = E_R \sqrt{s} - 2J \cos(qd), \qquad (3.21)$$

con

$$J = E_R \frac{4}{\sqrt{\pi}} (s)^{3/4} e^{-2\sqrt{s}}, \qquad (3.22)$$

energia di tunneling attraverso la barriera di potenziale. Le autofunzioni corrispondenti sono disegnate in Fig. 3.2 (d); sebbene il valore assoluto delle autofunzioni non mostra una dipendenza significativa dal quasimomento, le funzioni d'onda a q = 0e $q = k_L = \pi/d$ differiscono di una fase relativa tra minimi adiacenti del potenziale (linee nere in Fig. 3.2 (d)).
I fenomeni tipici studiati in questo regime coinvolgono solo le bande piè basse, che sono ben descritte da funzioni d'onda localizzate in ogni sito. Quindi, in questo limite, il sistema può essere descritto utilizzando la base delle funzioni localizzate di Wannier, definite come una sovrapposizione di funzioni di Bloch (3.16),

$$\phi_n(R, x) = \frac{1}{d} \int dq \ e^{-iRq} \Phi_{n,q}(x), \tag{3.23}$$

dove R indica il centro della funzione di Wannier. La dinamica viene descritta il tramite tunneling tra buche. La scala di energia caratteristica di tunneling tra due siti è data dalla larghezza della banda pari a 4J.

3.2.2 Dinamica nel regime lineare

Per una descrizione teoretica della propagazione delle funzioni d'onda, dobbiamo distinguere tra la situazione in cui sono coinvolti soltanto gli stati di Bloch di una singola banda (dinamica intrabanda) e processi che implicano una variazione della popolazione delle bande (dinamica tra bande).

Dinamica intrabanda: puro potenziale periodico. La descrizione della dinamica nel regime lineare è in genere molto semplice. Un pacchetto d'onda in un reticolo ottico può essere decomposto in stati di Bloch con ampiezze corrispondenti $f_n(q)$; l'evoluzione temporale della funzione d'onda iniziale è semplicemente la conseguenza di una fase accumulata $\phi_{n,q}(t) = E_n(q)t/\hbar$,

$$\psi(x,t) = \sum_{n} \int_{-\pi/d}^{\pi/d} dq \, f_n(q) \Phi_{n,q}(x) e^{-i\phi_{n,q}(t)}.$$
(3.24)

Se la larghezza della distribuzione di quasimomenti è paragonabile con la larghezza della prima zona di Brillouin, la dinamica non può essere condensata in un'unica formula analitica, ma è ancora risolvibile numericamente.

Se la distribuzione di q coinvolge solo un piccolo intervallo di quasimomenti centrato attorno q_0 e una singola banda di energia, allora la descrizione della dinamica diventa più semplice. Nella fisica di stato solido questa è la nota approssimazione semiclassica. In questo caso, la relazione di dispersione dell'energia può essere sviluppata in serie di Taylor

$$E(q) = E(q_0) + (q - q_0)\frac{\partial E(q)}{\partial q} + \frac{(q - q_0)^2}{2}\frac{\partial^2 E(q)}{\partial q^2} + \dots$$
(3.25)



Figura 3.3: Propagazione lineare di un pacchetto d'onda in un potenziale periodico debole. (a) La velocità di gruppo (in unità di $v_R = \hbar k/m$) per energie della banda più bassa, rivela che al centro ed al bordo della zona di Brillouin il pacchetto d'onda non si muove. Esiste inoltre un valore massimo di tale velocità. (b) La diffusione del pacchetto d'onda è una conseguenza della velocità di dispersione descritta dalla massa efficace. Questa può essere maggiore della massa reale $(q = q_{\infty}^{\pm})$, o anche minore e negativa ($q = k_L = \pi/d$). L'evoluzione del pacchetto nello spazio dei momenti, indicato in nero (grigio), è mostrata con maggiore dettaglio in (c) [(d)]. (c) Evoluzione nello spazio reale di un pacchetto d'onda preparato in una regione con massa efficace costante. (d) Se la distribuzione allargata di quasimomento non permette un'approssimazione quadratica dell'energia, termini di ordine superiore nello sviluppo di Taylor diventano importanti e implicano una distorsione del pacchetto d'onda. (e) Evoluzione del pacchetto d'onda preparato in $q_0 = q_{\infty}^+$, dove la massa efficace è infinita, per un tempo di propagazione 2.5 e 5 volte maggiore che in (c) e (d). Questo pacchetto d'onda si muove con velocità massima permessa nella prima banda, e disperde molto poco. Fig. presa da [28].

Inoltre assumiamo $\Phi_{n,q}(x) \approx u_{q_0}(x)e^{iq_0x}$, trascurando l'evoluzione temporale su scale di lunghezza della periodicità. Allora la dinamica del pacchetto d'onda è data da

$$\psi(x,t) = u_{q_0}(x)e^{-(i/\hbar)E(q_0)t} \int dq \ f(q)e^{-i(q-q_0)(x-v_g(q_0)t) - \frac{i\hbar(q-q_0)^2}{2m_{eff}(q_0)}t},$$
(3.26)

dove abbiamo definito

$$v_g(q_0) = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E(q)}{\partial q} \Big|_{q_0}$$
(3.27)

е

$$m_{eff}(q_0) = \hbar^2 \left(\frac{\partial^2 E(q)}{\partial q^2} \Big|_{q_0} \right)^{-1}.$$
(3.28)

Il pacchetto di materia si muove quindi con una velocità di gruppo v_g e, analogamente a quanto accade ad un pacchetto d'onda libero, diffonde. In Fig. 3.3 è rappresentato l'andamento della velocità di gruppo e della massa efficace in funzione di q. La diffusione in un reticolo ottico è però descritta dalla massa efficace m_{eff} . In alcuni casi particolari (per $q_0 = 0$ e $q_0 = \pi/d$), il pacchetto d'onda non si muove ma si allarga soltanto. Per $q = q_{\infty}$ la velocità di gruppo è massima (o minima) e la massa efficace diverge. Questo significa che il pacchetto lineare preparato a $q = q_{\infty}$ si muove con la velocità massima permessa nella prima banda e in prima approssimazione non diffonde.

Oscillazioni di Bloch. La dinamica di un pacchetto d'onda in presenza di un potenziale esterno non è generalmente semplice da risolvere. Il problema si semplifica nell'ipotesi che il pacchetto d'onda sia stretto nello spazio dei quasimomenti, cioè caratterizzato da un singolo quasimomento medio q_0 . La forza esterna introduce una dipendenza temporale in q_0 : $\hbar q_0(t) = F_x$. Nel caso di una forza costante F risulta che $q_0(t) = q_0(t = 0) + Ft/m$. Poichè la velocità di gruppo del pacchetto dipende dal quasimomento, la posizione del pacchetto d'onda cambia nel tempo. La velocità di gruppo cambia segno quando il quasimomento medio attraversa la zona di Brillouin: il risultato della forza non è quindi un'accelerazione del pacchetto d'onda, ma un'oscillazione. Queste oscillazioni sono note come oscillazioni di Bloch nello spazio reale.

Le oscillazioni di Bloch sono state studiate anche nel limite tight binding, giungendo essenzialmente agli stessi risultati ottenuti nel limite di potenziale debole.

Dinamica interbanda. Nel caso di grandi forze esterne agenti sul pacchetto d'onda, possono accadere transizioni in bande più alte. Per una data accelerazione a_{exp} dovuta ad una forza costante è possibile calcolare la probabilità di tunneling attraverso il gap. La risultante dinamica porta ad una separazione del pacchetto d'onda.

3.3 Schema sperimentale del reticolo ottico tridimensionale

Per concludere questo capitolo dedicato ai reticoli ottici descriviamo brevemente lo schema ottico del reticolo che abbiamo realizzato sperimentalmente, soffermandoci in particolare sulla descrizione della sorgente laser e dei cammini ottici dei vari fasci reticolari. Affronteremo invece il problema della stabilizzazione del reticolo più dettagliatamente nel capitolo successivo.

La sorgente laser. La luce del reticolo ottico proviene da un sistema laser Mephisto, che consiste in un laser infrarosso a stato solido Nd:YAG pompato otticamente da un laser a diodo. Il laser Nd:YAG consiste in una cavità risonante monolitica in cui le facce stesse del cristallo hanno la funzione di specchi risonanti; la frequenza della luce laserata (1064 nm) è in effetti molto stabile, e la larghezza spettrale di riga molto stretta, tipicamente inferiore a 1 kHz. La potenza massima della luce emessa dal laser è 2 W. In realtà nello schema ottico del laser esiste un secondo cristallo che funge da amplificatore e, se utilizzato, permette di raggiungere una potenza massima di 10 W, senza modificare lunghezza d'onda e larghezza di riga della luce. Il laser ha una lunghezza d'onda $\lambda_L = 1064$ nm, abbastanza lontana dalla frequenza di risonanza del ³⁹K ($\lambda_0 = 766.1$ nm a campo nullo) da permettere l'intrappolamento degli atomi condensati con potenze raggiungibili dal laser.

Schema ottico del reticolo. Riportiamo lo schema ottico del reticolo in Fig. 3.4 e in Fig. 3.5 In Fig. 3.4 è mostrata la suddivisione della luce laser nei tre fasci che compongono le tre direzione del reticolo ottico tridimensionale. I telescopi sono stati costruiti in modo tale da avere beam waist che massimizzino l'efficienza degli AOM (a più dell'80%) e dell'accoppiamento in fibra ottica (al 75%). Il funzionamento di un AOM (modulatore ottico acustico) sarà descritto dettagliatamente nel capitolo successivo: si tratta comunque di un oggetto capace di diffrarre il fascio che lo attraversa e spostarlo in frequenza (lo spostamento in frequenza provocato da un AOM è dell'ordine dei 100 MHz), permettendo un controllo analogico dell'inten-



Figura 3.4: Schema ottico: suddivisione della luce laser nei tre fasci che compongono le tre direzione del reticolo ottico tridimensionale.



Figura 3.5: Schema ottico del reticolo verticale dopo la fibra.



Figura 3.6: Schema dell'apparato sperimentale.

sità della luce che genera il reticolo. Utilizzeremo gli AOM per caricare il reticolo adiabaticamente sugli atomi e per spegnerlo, velocemente o attraverso rampe adiabatiche. I tre fasci sono portati sugli atomi tramite le fibre ottiche nelle tre direzioni perpendicolari: \hat{x} , $\hat{y} \in \hat{z}$, dove \hat{z} è la dirazione della trappola magnetica (vedi Fig. 3.6).

In Fig. 3.5 è mostrato lo schema ottico del reticolo verticale (direzione \hat{z}) dopo la fibra: i telescopi sono stati costruiti affinchè il fascio sia focalizzato sugli atomi con un waist $w_0 \sim 100 \ \mu$ m, al fine di avere una frequenza di oscillazione radiale degli atomi nel singolo tubo pari a circa 50 Hz, per un fascio con 700 mW di potenza sul condensato (cfr. l'equazione (3.11)). Il fascio del laser infrarosso si mescola sul cubo con la luce prodotta da un laser a stato solido Ti:Sa di lunghezza d'onda 866 nm, con cui costruiamo il reticolo bicromatico disordinato. Una piccola parte della luce (meno del 4%) viene riflessa da un vetro su un reticolo che separa le due lunghezze d'onda riflettendo i due fasci ad angoli diversi sui due fotodiodi di stabilizzazione. Lo schema di stabilizzazione della luce dell'infrarosso è spiegato in modo dettagliato nel capitolo seguente. Il laser rosso viene stabilizzato seguendo uno schema del tutto analogo.



Figura 3.7: L'apparato sperimentale.

Schema dell'apparato sperimentale sugli atomi. In Fig. 3.6 è rappresentato lo schema dell'apparato sperimentale sugli atomi: il fascio laser infrarosso viene allineato lungo la direzione \hat{z} della trappola magnetica e, dopo essere passato attraverso la cella a vuoto contenente gli atomi, viene retroriflesso da uno specchio producendo così la configurazione di onda stazionaria. Se ai due fasci orizzontali che costituiscono la trappola ottica (generata da una luce di lunghezza d'onda 1030 nm) si aggiungono gli altri due fasci del Mephisto, otteniamo il reticolo ottico tridimensionale, adatto a studiare sistemi monodimensionali. Sebbene i fasci siano configurati e stabilizzati secondo uno schema analogo a quello discusso per il fascio verticale, gli esperimenti presentati in questa tesi di laurea sono prodotti nel solo reticolo unidimensionale verticale. Oltre alle bobine che producono il campo della MOT, sono presenti le bobine Feshbach, che producono appunto il campo feshbach necessario per variare la lunghezza di scattering degli atomi, e una bobina che genera un campo necessario per annullare gli effetti della gravità sugli atomi, compensando il gradiente di potenziale presente nella direzione \hat{z} .

Capitolo 4

Stabilizzazione del reticolo ottico

In questo capitolo affrontiamo il problema della stabilizzazione della luce laser che genera il reticolo ottico. Fluttuazioni in intensità e in frequenza del laser possono infatti causare un riscaldamento degli atomi intrappolati nel reticolo ottico, provocandone una conseguente perdita. In particolare il rumore in intensità causa fluttuazioni nella costante elastica di una singola buca armonica del reticolo generato dal laser, mentre il rumore in frequenza causa fluttuazioni nella posizione dei minimi di potenziale [29].

Nella sezione 4.1 ci occupiamo del rumore in intensità del laser. Per cominciare calcoliamo i rate di riscaldamento degli atomi intrappolati cosiderando, quale semplice modello teorico, il caso di un atomo in un potenziale armonico unidimensionale la cui costante elastica fluttua nel tempo. Successivamente descriviamo lo schema dell'apparato di stabilizzazione, riportando le misure dello spettro di potenza della luce laser nel caso in cui sia o non sia stabilizzata, ed i corrispettivi rate di riscaldamento.

Applicheremo lo stesso schema alla sezione 4.2 nel caso del rumore in frequenza del laser.

4.1 Fluttuazioni nella costante elastica

4.1.1 Calcolo dell'heating rate

Il reticolo ottico è generato da un laser molto detunato rispetto alla transizione degli atomi di potassio e rubidio che vogliamo intrappolare. In trappole ottiche lontane dalla risonanza la costante elastica è proporzionale all'intensità del laser. Il rumore in intensità della luce laser che genera il reticolo è quindi proporzionale alla fluttuazione $\epsilon(t)$ della costante elastica che viene definita come

$$\epsilon(t) = \frac{I(t) - I_0}{I_0}.$$
(4.1)

Per calcolare il riscaldamento prodotto sugli atomi da tali fluttuazioni nella costante elastica, consideriamo l'Hamiltoniana di un atomo intrappolato di massa M

$$H = \frac{p^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega_x^2 [1 + \epsilon(t)]x^2, \qquad (4.2)$$

dove $\omega_x^2 = k_x/M$ è la frequenza di oscillazione quadratica media dell'atomo in trappola nella direzione x, e k_x è il valore medio della corrispondente costante elastica. La costante elastica esibisce fluttuazioni $\epsilon(t)$. L'equazione (4.2) è ben nota, ed è stata studiata nel trattamento classico della risonanza parametrica. Quando $x(t) = x_0 \cos \omega_x t$ e $\epsilon(t) = \epsilon_0 \sin 2\omega_x t$, è semplice mostrare che l'energia cresce esponenzialmente con un rate costante $\epsilon_0 \omega_x$, che è anche la larghezza della risonanza parametrica [30].

Nel caso attuale siamo interessati a fluttuazioni stocastiche piuttosto che ad una modulazione sinusoidale della costante elastica, essendo il rumore in intensità del laser appunto di natura stocastica. La parte dominante del rate di riscaldamento sorge comunque dalla componente della densità spettrale del rumore $\epsilon(t)$ alla frequenza doppia della frequenza di oscillazione degli atomi in trappola ω_x . Esistono in realtà risonanze analoghe anche per frequenza di trappola ω_x e a $\omega_x/2$, come osserveremo sperimentalmente nella Sez. 5.3; per una spiegazione dettagliata di questo fenomeno di risonanza parametrica rimando a [31]. Calcoliamo il rate di riscaldamento nell'ambito della teoria quantistica, utilizzando la teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo al primo ordine al fine di calcolare le probabilità di transizione medie tra gli stati quantici della trappola. Considerando l'Hamiltoniana (4.2), la perturbazione di interesse è data da

$$H'(t) = \frac{1}{2}\epsilon(t)M\omega_x^2 x^2.$$
(4.3)

Per un atomo nello stato $|n\rangle$ al tempo t = 0, la probabilità media di transizione su uno stato $|m \neq n\rangle$ in un intervallo di tempo T è

$$R_{n \to m} \equiv \frac{1}{T} \left| \frac{-i}{\hbar} \int_0^T dt' H'_{mn}(t') e^{i\omega_{mn}t'} \right|^2$$
$$= \left(\frac{M\omega_x^2}{2\hbar} \right)^2 \int_{-\infty}^\infty d\tau e^{i\omega_{mn}\tau} \langle \epsilon(t)\epsilon(t+\tau) \rangle |\langle m|x^2|n\rangle|^2. \tag{4.4}$$

Assumiamo che il tempo T sia piccolo sulla scala dei tempi di variazione della popolazione del livello, ma grande se paragonato al tempo di correlazione delle fluttuazioni: in questo modo τ si estende formalmente tra $\pm \infty$. La funzione di correlazione per le fluttuazioni nella costante elastica è definita come

$$\langle \epsilon(t)\epsilon(t+\tau)\rangle \equiv \frac{1}{T} \int_0^T dt \ \epsilon(t)\epsilon(t+\tau).$$
 (4.5)

Usando gli elementi di matrice $m \neq n$ di x^2 e $\omega_{n\pm 2,n} = \pm 2\omega_x$ l'equazione (4.4) diventa

$$R_{n \to n \pm 2} = \frac{\pi \omega_x^2}{16} S_{\epsilon}(2\omega_x)(n+1\pm 1)(n\pm 1).$$
(4.6)

Nell'equazione (4.6) compare $S_{\epsilon}(\omega)$, ovvero la densità spettrale del rumore in intensità del laser,

$$S_{\epsilon}(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\tau \cos(\omega\tau) \langle \epsilon(t)\epsilon(t+\tau) \rangle.$$
(4.7)

La densità spettrale è definita tale che

$$\int_0^\infty d\omega \ S_\epsilon(\omega) = \int_0^\infty d\nu \ S_\epsilon(\nu) = \langle \epsilon^2(t) \rangle \equiv \epsilon_0^2, \tag{4.8}$$

dove ϵ_0^2 è il valore quadratico medio delle fluttuazioni nella costante elastica, e $\omega = 2\pi\nu$, con ν frequenza in Hz.

Assumendo che gli atomi intrappolati occupino uno stato $|n\rangle$ con probabilità P(n, t) al tempo t, il rate di riscaldamento medio è

$$\langle \dot{E}_x(t) \rangle = \sum_n P(n,t) 2\hbar \omega_x (R_{n \to n+2} - R_{n \to n-2}) = \frac{\pi}{2} \omega_x^2 S_\epsilon(2\omega_x) \langle E_x(t) \rangle, \qquad (4.9)$$

dove l'energia media è $\langle E_x(t) \rangle = \sum_n P(n,t)(n+\frac{1}{2})\hbar\omega_x.$

L'equazione (4.9) mostra che l'energia media cresce esponenzialmente nel tempo,

$$\langle \dot{E}_x \rangle = \Gamma_x \langle E_x \rangle,$$
 (4.10)

dove Γ_x è

$$\Gamma_x \equiv \frac{1}{T_x(sec)} = \pi^2 \nu_x^2 S_\epsilon(2\omega_x). \tag{4.11}$$

Qui ν_x è la frequenza di oscillazione della trappola in Hertz, e T_x è il tempo che $\langle E \rangle$ impiega per crescere di un fattore *e* in secondi.

4.1.2 Realizzazione sperimentale

Lo scopo sperimentale di questo lavoro è ridurre il rate di riscaldamento degli atomi alle frequenze di oscillazione tipiche di trappola e di reticolo ottico. Le frequenza di trappola ottica sono in genere molto basse, possono variare dai 10 Hz ai 100 Hz a seconda del waist del fascio laser (vedi Sez. 5.2); il reticolo possiede invece frequenze di oscillazione tipiche dell'ordine di 10-30 kHz, dipendenti dalla lunghezza d'onda della radiazione e dalla profondità della buca. La radiazione emessa dal laser utilizzato per la costruzione del reticolo ha una lunghezza d'onda $\lambda_L = 1064$ nm (vedi Sez. 3.3). Nel caso di un reticolo di profondità s = 5 la frequenza di oscillazione degli atomi intrappolati sarebbe dunque $\nu_{lat} = 20$ kHz, avendo utilizzato l'equazione (3.14). Come mostrato in precedenza il rate di riscaldamento medio di atomi intrappolati in un reticolo ottico dipende dalla densità spettrale della fluttuazione nella costante elastica $S_{\epsilon}(\nu)$, a sua volta proporzionale allo spettro di potenza del rumore in intensità del laser che genera il reticolo. Al fine di ridurre l'heating rate è quindi necessario necessario ridurre il rumore in intensità della luce laser ovvero diminuire il valore di $S_{\epsilon}(\nu)$ al variare di ν .

Lo schema dell'apparato di stabilizzazione è rappresentato in Fig. 4.1. La luce proveniente dal laser passa attraverso un modulatore ottico acustico (AOM) che ne controlla l'intensità nel tempo. Parte del fascio viene deviato su un fotodiodo dove l'intensità è trasformata in una tensione V(t) e comparata con un segnale di tensione a basso rumore, generato dal computer di controllo. Il segnale di errore regola la radiofrequenza che comanda l'AOM. È così possibile stabilizzare attraverso l'AOM l'intensità della luce laser che verrà utilizzata nell'esperimento. Nei paragrafi successivi saranno descritti nel dettaglio i componenti che permettono la stabilizzazione in intensità del laser.

Modulatore ottico acustico e fotodiodo. L'AOM consiste in un trasduttore piezoelettrico che crea un'onda acustica periodica in un materiale vetroso; il fascio di luce passante attraverso l'AOM viene quindi diffratto in molti ordini e deviato in frequenza. L'AOM è allineato in modo tale che il 90% della luce entrante sia diffratta sul primo ordine. Questa luce sarà utilizzata per creare il reticolo ottico. L'ordine zero (quello non deviato in frequenza) non viene utilizzato. Il fotodiodo è utilizzato per rivelare l'intensità della luce diffratta dall'AOM; calcolando il modulo quadro della trasformata di Fourier del segnale acquisito dal fotodiodo è possibile risalire alla densità spettrale del rumore in intensità della luce laser e calcolare di conseguenza l'heating rate degli atomi intrappolati in questa luce al variare della frequenza.



Figura 4.1: Schema a blocchi dell'apparato: Un controllore PID calcola il segnale di errore come la differenza tra il segnale rilevato dal fotodiodo e il valore di riferimento impostato dal computer tramite un convertitore digitale-analogico (analog out). Questo segnale di errore deforma il segnale di ingresso del driver che genera la radiofrequenza dell'AOM. In questo modo è possibile stabilizzare in intensità la luce laser.

AOM driver. La radiofrequenza, necessaria al trasduttore piezoelettrico per creare onde acustiche, è generata da un driver. Il driver da noi utilizzato genera in realtà due diverse radiofrequenze: la prima è la frequenza caratteristica dell'AOM (nel nostro caso 110 MHz in una banda larga 15 MHz) ed è detta frequenza master; la seconda è fuori dal range di frequenze utili all'AOM ed è chiamata frequenza slave. Durante l'esperimento sarà spesso necessario spegnere e accendere il reticolo ottico. La potenza dei fasci del reticolo è dell'ordine di 1 Watt; il reticolo viene acceso e spento tramite l'AOM che ne controlla l'intensità. Questo continuo succedersi di accensioni e spegnimenti può provocare una variazione della temperatura dell'AOM causando deviazioni del fascio di luce diffratta. Utilizzando due diverse radiofrequenze è possibile mantenere l'AOM a temperatura costante: quando è necessario spegnere il reticolo ottico l'AOM rimane acceso ma lavora sulla frequenza slave che non devia la luce laser, evitando però di raffreddarsi. Uno schema semplificato del circuito che genera le due radiofrequenze è mostrato in Fig. 4.2. Il driver può lavorare in due diversi regimi: se il loop è aperto le due radiofrequenze vengono generate con ampiezze indipendenti entrambe regolabili. Se il loop è chiuso, le due radiofrequenze vengono generate tali che la somma delle ampiezze sia costante, e sia



Figura 4.2: Schema semplificato del circuito dell'AOM driver: se l'interruttore è chiuso l'intensità della frequenza *slave* è regolata sull'intensità del *master* attraverso un feedback in modo tale che la somma delle intensità sia costante. Il segnale di uscita contiene le due frequenze alle intensità desiderate.

modificabile soltanto l'ampiezza della frequenza *master*. L'ampiezza della frequenza *slave* è regolata di conseguenza attraverso il feedback.

In Fig. 4.4 sono mostrati il rate di riscaldamento medio ed il constant rate Γ_x calcolati dalle equazioni (4.9) e (4.11) al variare della frequenza di trappola per il laser, quando il loop è chiuso.

Controllore PID e stabilizzazione. Il segnale in tensione che regola l'ampiezza della frequenza *master* generata dall'AOM driver è prodotto da un controllore proporzionale-integrativo-derivativo (PID). Il controllore PID acquisisce in ingresso il segnale rivelato dal fotodiodo, e lo confronta con un valore di riferimento a basso rumore impostato dal computer di controllo e convertito da segnale digitale in segnale analogico da un analog out. La differenza, il cosiddetto segnale di errore, viene usata come segnale di ingresso dell'AOM driver. In questo modo è possibile stabilizzare attraverso l'AOM l'intensità della luce laser che colpisce il fotodiodo, ovvero l'intensià della luce laser che utilizzeremo per costruire i reticolo ottico. Per una buona stabilizzazione è necessario manipolare e ottimizzare i guadagni proporzionali, integrali e derivati del controllore PID.

In Fig.4.3 è rappresentata la trasformata di Fourier del rumore in intensità del laser $\sqrt{S_{\epsilon}(\nu)}$ misurato in una banda di 100 kHz con un fotodiodo illuminato da 1.5 mW. Il rumore in intensità è misurato in due diversi regimi: il primo, quando il loop sopra descritto è chiuso e la luce stabilizzata, è disegnato in blu; il secondo, quando



Figura 4.3: Trasformata di Fourier del rumore in intensità del laser $\sqrt{S}_k(\nu)$ in dBV quando il loop è chiuso (linea blu) e quando il loop è aperto (linea rossa). La linea verde mostra lo spettro di potenza del rumore in intensità del laser quando la luce non passa attraverso l'AOM. In nero è rappresentato il contributo del rumore elettronico di background allo spettro.



Figura 4.4: Rate di riscaldamento medio in nanokelvin al secondo (in alto) e constant rate Γ_x in hertz (in basso) rappresentati in funzione della frequenza di trappola ν_x nei due regimi: in blu quando il circuito PID-AOM-fotodiodo è chiuso, in rosso quando è aperto.

il loop è aperto cioè l'analog out è direttamente connesso all'AOM escludendo il controllore PID, è in rosso. Quando il loop è chiuso lo spettro di potenza dell'intensità del laser è ridotto di circa 5 dBV, e il picco presente a 15 kHz scompare, indicando come il segnale sia meno rumoroso.

4.2 Fluttuazioni nella posizione dei minimi del potenziale

Anche fluttuazioni nelle posizioni di minimo del potenziale periodico possono causare un riscaldamento degli atomi. Se consideriamo un singolo atomo in una sola buca di potenziale armonica monodimensionale l'Hamiltoniana efficace è

$$H = \frac{p^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega_x^2[x - \epsilon_x(t)]^2, \qquad (4.12)$$

dove $\epsilon_x(t)$ è la fluttuazione nella posizione del minimo del potenziale.

Il potenziale di trappola degli atomi ha una forma del tipo $V(x) = V_0 \cos^2(k_L x)$, dove k_L è l'impulso del laser. Fluttuazioni nelle posizioni di minimo del reticolo possono essere causate da fluttuazioni nella posizione dello specchio che retroriflette le luce laser sugli atomi. Questo è un rumore che si estende in alto solo fino a frequenze dell'ordine di 100 Hz, provocato da vibrazioni acustiche dell'aria o del banco ottico; non dovrebbe quindi interessare l'intervallo di frequenze di oscillazione degli atomi nel reticolo ottico (10-30 kHz).

Una seconda possibile origine di fluttuazioni nelle posizioni di minimo del reticolo è la fluttuazione in frequenza del laser. Le posizioni di minimo del potenziale ottico sono date infatti dalla condizione $k_L L = n\pi$, dove $k_L = \nu_L c$ è l'impulso del laser e Lla distanza degli atomi dallo specchio retroriflettente. Un allargamento medio $\Delta \nu_L$ della frequenza del ν_L del laser deve essere compensato da una deviazione standard nelle posizioni dei minimi del potenziale ϵ_x : $(k_L + \Delta k_L)(L + \epsilon_x) = n\pi$. Da cui otteniamo che lo spostamento medio delle posizioni di equilibrio degli atomi nel potenziale è dato da

$$\epsilon_x = -L \frac{\Delta \nu_L}{\nu_L}.\tag{4.13}$$

Utilizzando metodi analoghi a quelli usati per ottenere l'Eq.(4.10), stimiamo il rate di riscaldamento prodotto da queste fluttuazioni. I rate di transizione calcolati per l'Eq.(4.12) sono

$$R_{n\pm 1\to n} = \frac{\pi}{2\hbar} M \omega_x^3 S_x(\omega_x) (n + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}).$$
(4.14)

dove $S_x(\omega_x)$ è la densità spettrale della fluttuazione nella posizione di equilibrio degli atomi nel reticolo ottico lungo l'asse x

$$S_x(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\tau \cos(\omega\tau) \langle \epsilon_x(t+\tau)\epsilon_x(t) \rangle.$$
(4.15)

La densità spettale è normalizzata tale che $\int_0^\infty d\omega S_x(\omega) = \epsilon_x^2$ è la variazione quadratica nella posizione del minimo del potenziale, proporzionale al rumore in frequenza del laser.

Il corrispondente heating rate è

$$\langle \dot{E}_x \rangle = \sum_n P(n,t)\hbar\omega_x (R_{n+1\to n} - R_{n-1\to n}) = \frac{\pi}{2}M\omega_x^4 S_x(\omega_x).$$
(4.16)

Agitare la trappola causa quindi un riscaldamento che è indipendente dall'energia della trappola. Il tempo di raddoppiamento T'_x dell'energia può essere definito come il tempo necessario per incrementare l'energia dell'energia media a t = 0: $\langle \dot{E}_x \rangle / \langle E_x(0) \rangle \equiv 1/T'_x$. Allora usando $\langle E_x(0) \rangle = M \omega_x^2 \langle x^2 \rangle$, dove $\langle x^2 \rangle$ è la posizione quadratica media di un atomo intrappolato a t = 0, si ottiene

$$\frac{\langle \dot{E}_x \rangle}{\langle E_x(0) \rangle} \equiv \frac{1}{T'_x} = \pi^2 \nu_x^2 \frac{S_x(\nu_x)}{\langle x^2 \rangle}.$$
(4.17)

Sperimentalmente non è stata misurata, come nel caso del rumore in intensità, la densità spettrale delle fluttuazioni delle posizioni di minimo del potenziale periodico, ma piuttosto ϵ_x , ovvero la loro variazione media, dovuta all'allargamento $\Delta \nu_L$ della frequenza del laser come mostrato in Eq.(4.13). Quello da noi calcolato è dunque una sorta di heating rate integrato su tutto il range di frequenze di oscillazione degli atomi in trappola

$$\int d\omega_x \langle \dot{E}_x \rangle(\omega_x) = \int d\omega_x \frac{\pi}{2} M \omega_x^4 S_x(\omega_x) = \frac{\pi}{2} M \omega_L^4 \epsilon_x^2.$$
(4.18)

La larghezza di riga del laser $\Delta \nu_L$ può essere dovuta sia ad un allargamento intrinseco al laser stesso, ma anche ad un allargamento aggiuntivo provocato dall'AOM che sposta la frequenza del laser di 110 MHz. Per il nostro laser la larghezza di riga intrinseca, così come indicato dal costruttore, è di 1 kHz per un segnale integrato su 10 msec. La lunghezza d'onda del laser è 1064 nm, corrispondente ad un frequenza pari a 300 THz. In Fig. 4.5 è mostrata la larghezza di riga dell'AOM: l'immagine è stata acquisita per mezzo di un analizzatore di spettri collegato all'uscita del driver dell'AOM. Il tempo di integrazione del segnale è 300 msec, la bandwidth di risoluzione è 1 kHz. La larghezza a metà altezza è dell'ordine di 1 kHz,



Figura 4.5: Larghezza di riga dell'AOM. L'immagine è stata acquisita per mezzo di un analizzatore di spettri collegato all'uscita del driver dell'AOM. Il tempo di integrazione del segnale è 300 msec, la bandwidth di risoluzione è 1 KHz. La larghezza a metà altezza è dell'ordine di 1 KHz attorno alla frequenza centrale tipica dell'AOM di 110 MHz.

comparabile quindi con la larghezza di riga del laser. Se dall'equazione (4.13) calcoliamo lo spostamento medio della posizione del minimo del potenziale otteniamo che $\epsilon_x = -L\Delta\nu_L/\nu_L \sim 3 \cdot 10^{-12}$ m, per L = 1 m distanza tra gli atomi e lo specchio retroriflettente. Questo spostamento è piccolo se confrontato con l'ampiezza tipica di oscillazione di un atomo nella trappola armonica $a_{h_0} = \sqrt{\hbar/m\omega} \sim 100$ nm. L'heating rate prodotto da questa fluttuazione del centro della trappola calcolato tramite l'Eq. (4.18) risulta essere trascurabile essendo il suo integrale in frequenza dell'ordine di $6.5 \cdot 10^{-10}$ K/sec.

Capitolo 5

Caratterizzazione del reticolo con condensati di Bose-Einstein

In questo capitolo descriviamo le tecniche sperimentali utilizzate per caratterizzare il reticolo ottico; in particolare vogliamo misurare l'altezza V_0 del potenziale reticolare, la frequenza di oscillazione radiale degli atomi intrappolati nel singolo tubo (e quindi il confinamento radiale del fascio sugli atomi) e la frequenza di oscillazione degli atomi nel reticolo. In linea di principio è possibile calcolare i parametri che caratterizzano il reticolo ottico se si conoscono alcune quantità quali l'intensità di saturazione della transizione atomica ed il waist, il detuning, la potenza dei fasci reticolari. Sfortunatamente non è facile risalire al valore reale di queste quantità. La potenza ed il waist del fascio (e quindi la sua intensità nella posizione del condensato) sono difficilmente misurabili. Anche se il waist è accuratamente misurato in qualche punto del cammino ottico del fascio laser, la propagazione attraverso le finestre del sistema di vuoto può in qualche modo distorcere il fascio e provocare una deviazione dal profilo di intensità calcolato. Le potenze ottiche assolute sono d'altra parte notoriamente difficili da misurare, a causa di errori sistematici dell'ordine del 10-20% o più. È perciò più semplice caratterizzare i parametri del reticolo sfruttando il comportamento particolare dei condensati di Bose-Einstein in un potenziale periodico, misurando l'intensità di effetti noti prodotti dal reticolo sugli atomi condensati.

Dopo avere caratterizzato i parametri fondamentali del reticolo ottico, vogliamo infine stimarne la stabilità verificando che il riscaldamento prodotto dal rumore in intensità ed in frequenza del laser sia in accordo con quanto calcolato nel capitolo 4 (circa 2 nK al secondo per frequenze pari a 50 kHz). L'osservazione di un rate di riscaldamento così piccolo in un reticolo ottico è un risultato eccezionale, mai ottenuto sino ad ora, che permette l'allestimento di una serie di esperimenti delicati e complessi (introdotti nel Cap. 6) fino ad ora irrealizzabili. Nell'ultima sezione di questo capitolo descriviamo dettagliatamente la misura del tempo di vita di atomi che evolvono nel potenziale periodico che dimostra l'elevata stabilità del reticolo ottico.

5.1 Calibrazione del reticolo ottico: Bragg scattering

La diffrazione Bragg è un fenomeno che provoca un'oscillazione della popolazione degli stati di momento $+\hbar k_L e -\hbar k_L$ di un condensato che interagisce con il reticolo ottico a particolari velocità, dove k_L è il vettore d'onda del reticolo. Questo particolare effetto viene spesso utilizzato per misurare l'altezza V_0 del reticolo [32].

Assumiamo che il condensato si muova inizialmente lungo \hat{z} con un momento $-\hbar k_L$ nel sistema di riferimento del laboratorio. Al tempo t = 0 accendiamo improvvisamente il reticolo. I due fasci laser possono indurre una transizione Raman tra gli stati di momento $-\hbar k_L e + \hbar k_L$ attraverso un processo a due fotoni che conserva sia l'energia che il momento, come mostrato schematicamente in Fig. 5.1. È necessario che lo stato iniziale abbia momento $-\hbar k_L$ per soddisfare la condizione di risonanza: così infatti, poichè i due fotoni contropraganti hanno stessa energia, anche gli stati atomici iniziale e finale avranno energia uguale. Se lo stato iniziale avesse un momento diverso da $\pm \hbar k_L$ l'energia non sarebbe conservata e la probabilità del processo sarebbe molto minore. In conseguenza all'eccitazione la popolazione atomica comincia ad oscillare tra gli stati di momento accoppiati dal reticolo ottico. La popolazione nello stato di momento $+\hbar k_L$ è

$$N_{+\hbar k} = \frac{N}{2} \Big(1 - \cos(\Omega_B t) \Big), \tag{5.1}$$

con Ω_B frequenza di Rabi efficace di un'eccitazione a due fotoni

$$\Omega_B = \frac{\Omega_0^2}{2\Delta},\tag{5.2}$$

dove Δ è il detuning dallo stato eccitato e $\Omega_0 = \mu E_0/\hbar$ è la frequenza di Rabi associata all'eccitazione provocata dal singolo fascio, con μ momento di dipolo atomico e E_0 ampiezza del campo del singolo fascio. Nel regime far detuned è possibile trascurare transizioni allo stato eccitato tramite processi ad un fotone, e questa transizione a due fotoni risulta quindi il processo dominante.



Figura 5.1: Schema della transizione Bragg. Un atomo è illuminato da due fasci contropropaganti. Se il momento iniziale dell'atomo è $-\hbar k_L$ (con k_L vettore d'onda del laser) può avvenire una transizione a due fotoni allo stato di momento $+\hbar k_L$ tramite l'assorbimento di un fotone da un fascio del reticolo e l'emissione stimolata nell'altro fascio. Questo processo, nel quale l'energia è conservata ed il momento netto trasferito è $2\hbar k_L$, viene detto processo Raman.



Figura 5.2: Oscillazione di Rabi indotta dal Bragg scattering: grafico della popolazione dello stato eccitato $+\hbar k_L$ in funzione della lunghezza Δt dell'impulso. In rosso è disegnato il fit dei dati aquisiti sperimentalmente; tramite la frequenza di Rabi estrapolata dal fit è possibile calcolare l'altezza s del reticolo attraverso l'Eq. (5.4).



Figura 5.3: Oscillazione di Rabi indotta dal Bragg scattering: immagini del condensato di ³⁹K nei due stati di momento $+\hbar k_L$ e $-\hbar k_L$ per diverse lunghezze Δt dell'impulso; in particolare in figura è riportato un periodo di oscillazione della popolazione del condensato nei due stati. Da queste immagini è estrapolato il fit rappresentato in Fig. 5.2.

La frequenza di Rabi (5.2) della transizione Bragg viene utilizzata per calibrare l'altezza del reticolo ottico. Nei massimi dell'onda stazionaria, dove i due fasci del reticolo interferiscono costruttivamente, l'ampiezza del campo è $2E_0$, quindi la frequenza di Rabi locale Ω che appare nell'espressione del potenziale di dipolo (3.8), è il doppio di Ω_0 , frequenza di Rabi del singolo fascio. Sostituendo $\Omega = 2\Omega_0$ nella (3.8) valutata nei massimi dell'onda stazionaria, e utilizzando l'equazione (5.2), troviamo che

$$V_0 = V_{dip}^{max} = \frac{\hbar\Omega^2}{4\Delta} = \frac{\hbar\Omega_0^2}{\Delta} = 2\hbar\Omega_B,$$
(5.3)

quindi l'altezza del reticolo ottico in unità di energia di rinculo $E_R = \hbar \omega_R$ è

$$s = \frac{2\Omega_B}{\omega_R}.$$
(5.4)

Abbiamo eseguito la calibrazione dell'altezza del reticolo utilizzando condensati di ³⁹K. La procedura sperimentale è la seguente. Al tempo t = 0 lasciamo cadere il condensato spegnendo la trappola ottica nella quale era intrappolato. Dopo 800 μ s di caduta, quando la velocità verticale del condensato è $-v_B = -\hbar k_L/m$, accendiamo il reticolo per un tempo Δt ; quindi lasciamo espandere la nube atomica per un tempo abbastanza lungo affinchè le componenti di momento $-\hbar k_L e + \hbar k_L$ si separino spazialmente. Dopo un tempo totale di espansione $t_{esp} = 18$ ms acquisiamo un'immagine in assorbimento degli atomi e misuriamo la popolazione nei due stati di momento. In Fig. 5.2 riportiamo la frazione di popolazione nello stato $+\hbar k_L$ in funzione del tempo Δt . Dal fit dei dati sperimentali con una funzione sinusoidale smorzata ricaviamo la frequenza di Rabi dell'oscillazione e attraverso l'equazione (5.3) l'altezza del reticolo ottico, pari nel nostro caso a s = 4,7 per una potenza di 260 mW del laser sugli atomi.

Dai dati sperimentali osserviamo uno smorzamento nell'oscillazione; questo accade perchè la nuvola atomica accelera sotto l'azione della forza di gravità: dopo un tempo t la velocità del condensato non è più pari a $v_B = \hbar k_L/m_K$ ma è maggiore, rendendo meno probabile la diffrazione Bragg.

5.2 Frequenza di oscillazione radiale di un condensato di ⁸⁷Rb

La frequenza di oscillazione radiale degli atomi intrappolati nel reticolo ottico è un parametro importante perchè dice quanto il sistema (ovvero il singolo tubo che compone il reticolo) possa essere considerato unidimensionale. Maggiore è la frequenza radiale di trappola, più il sistema è confinato radialmente e quindi meglio approssimabile ad un sistema di una sola dimensione. Ovviamente le scale di lunghezza radiali devono essere paragonate a quelle assiali se si vuole dare una qualche definizione della monodimensionalità del sistema. Nel nostro caso, il sistema che vogliamo costruire non deve necessariamente essere unidimensinale, ma deve possedere un buon confinamento radiale. Per questo motivo siamo interessati a misurare la frequenza di oscillazione radiale degli atomi intrappolati.

Il condensato viene caricato in trappola ottica ed il reticolo ottico viene acceso. Attraverso una semplice procedura sperimentale, ovvero spegnendo improvvisamente i fasci di trappola ottica, trasferiamo un impulso sugli atomi intrappolati nel reticolo ottico in direzione radiale e misuriamo la posizione del condensato a tempi diversi. In Fig. 5.4 riportiamo la misura effettuata su atomi di ⁸⁷Rb intrappolati nella luce prodotta da un laser di potenza 550 mW. Dal fit dei dati sperimentali attraverso un funzione sinusoidale smorzata abbiamo quindi ricavato la frequenza di oscillazione armonica radiale degli atomi di Rubidio intrappolati nel reticolo, che risulta essere (per questa potenza del laser) $\nu_{\perp}^{Rb} = 36 \pm 1$ Hz. Poichè $\nu \propto (m)^{-1/2}$ possiamo ricavare da questa misura la frequenza di oscillazione radiale degli atomi di Potassio, pari a $\nu_{\perp}^{K} = \nu_{\perp}^{Rb} \sqrt{m_{Rb}/m_K} = 53, 8 \pm 1$ Hz.



Figura 5.4: Posizione radiale in funzione del tempo di un condensato di ⁸⁷Rb intrappolato nel reticolo ottico e sottoposto ad un impulso nella direzione radiale.

5.3 Riscaldamento parametrico di un condensato di ³⁹K intrappolato nel reticolo ottico

Nel paragrafo seguente misuriamo il riscaldamento prodotto sul condensato aggiungendo al reticolo una modulazione sinusoidale nella costante elastica. Nella sezione 4.1 è emerso come, per particolari frequenze del rumore indotto, il condensato si possa riscaldarsi sino ad essere perso. In particolare, detta ν_{lat} la frequanza di oscillazione degli atomi nel reticolo, ci aspettiamo un riscaldamento della nuvola atomica per un rumore di frequenza pari a $\nu_{lat}/2$, ν_{lat} e soprattutto $2\nu_{lat}$ (vedi paragrafo 4.1.1). Come mostrato nel terzo capitolo ν_{lat} dipende dall'intensità e dalla lunghezza d'onda del laser (vedi l'equazione (3.14)); nel nostro caso, essendo $\lambda_L = 1064$ nm e s circa 5 ci aspettiamo un frequenza di oscillazione degli atomi nel reticolo dell'ordine di $\nu_{lat} \sim 20$ kHz.

In Fig. 5.5 riportiamo la misura della temperatura degli atomi in funzione della frequenza della modulazione sinusoidale indotta. Le misure sono state effettuate su condensati di ³⁹K non interagente. La procedura sperimentale è la seguente: dopo avere caricato il condensato nel reticolo ottico, abbiamo aggiunto al segnale stabile generato dal PID, una modulazione sinusoidale di ampiezza A_0 e frequenza ν per un tempo t, inducendo così un rumore nell'intensità del laser, e quindi una fluttuazione nella costante elastica della buca di potenziale, di frequenza ν . Abbiamo poi acquisito l'immagine della nuvola atomica dopo avere spento il reticolo e lasciato espandere il condensato per un tempo $t_{esp} = 5$ ms. Dalle immagini del condensato è stato possibile calcolare la temperatura degli atomi attraverso i metodi descritti più in dettaglio nella sezione 5.4. La modulazione sinusoidale, creata da un generatore di funzioni, è stata aggiunta al segnale stabilizzato tramite un ingresso predisposto del PID. La banda di guadagno del PID non supera però i 30 kHz. Il PID dunque filtra le frequenze superiori ai 30 kHz, impedendo così l'osservazione del riscaldamento parametrico alla frequenza dominante $\nu = 2\nu_{lat} \sim 50$ kHz. Siamo perciò riusciti ad osservare il riscaldamento parametrico degli atomi solo alle frequenze $\nu_{lat} \in \nu_{lat}/2$.

In Fig. 5.5 (a) riportiamo la temperatura degli atomi per un rumore indotto con frequenza tra i 10 ed i 15 kHz, ampiezza $A_0 = 3$ mV, e durata temporale t = 20ms. Notiamo un picco nella temperatura della nuvola termica per $\nu \simeq 13$ kHz. In Fig. 5.5 (b) è invece riportata la temperatura del condensato se la modulazione sinusoidale ha frequenza tra i 20 e i 30 kHz, ampiezza $A_0 = 2$ mV, e l'impulso ha una durata temporale t = 5 ms. Il massimo riscaldamento degli atomi si ha per $\nu \simeq 25$ kHz, che corrisponde alla frequenza di trappola degli atomi nel reticolo.



Figura 5.5: Riscaldamento parametrico: temperatura della nuvola atomica a variare della frequenza della modulazione sinusoidale aggiunta al segnale stabile del PID. In (a) l'ampiezza della modulazione è $V_0 = 3$ mV e l'impulso dura 20 ms. In (b) la modulazione ha un'ampiezza $V_0 = 2$ mV e una durata di 5 ms.

Questa misura può essere utilizzata per calibrare il reticolo ottico: nota la frequenza di oscillazione degli atomi nel reticolo $\nu_{lat} \simeq 25$ kHz possiamo stimare la profondità del reticolo invertendo la (3.14), correggendo così la stima che abbiamo inizialmente dato di *s* circa 5 con $s = (h\nu_{lat}/2E_R)^2 \simeq 7.7$.

5.4 Tempo di vita di un condensato di ³⁹K nel reticolo ottico

In questo paragrafo riportiamo le misure del tempo di vita di un condensato di ³⁹K non interagente nel reticolo ottico stabilizzato. Scopo dell'esperimento è verificare la stabilità del reticolo ottico, osservando direttamente il suo effetto sugli atomi condensati. La procedura sperimentale consiste nel caricare il condensato nel reticolo e lasciarlo nel potenziale periodico per un tempo Δt variabile. Quindi spegniamo il reticolo ottico e acquisiamo l'immagine degli atomi dopo un tempo di espansione $t_{esp} = 40$ ms. Dall'immagine del condensato è possibile risalire al numero di atomi ed alla temperatura della nube atomica, determinando così il tempo di vita ed il rate di riscaldamento degli atomi nel reticolo. Sarà importante verificare che il tempo di vita degli atomi nel reticolo sia lungo abbastanza da permettere lo svolgimento di un esperimento (quindi dell'ordine di qualche secondo). Potremo inoltre paragonare il rate di riscaldamento misurato con quello calcolato nel capitolo 4 come conseguenza del rumore in intensità ed in frequenza della luce che genera il reticolo ottico e, nel caso in cui i due rate non siano compatibili, cercare altre possibili fonti di riscaldamento degli atomi nel reticolo.

In Fig. 5.6 riportiamo un esempio delle immagini che abbiamo acquisito ed analizzato per misurare tempo di vita e rate di riscaldamento degli atomi nel reticolo. Il campione è in parte condensato e in parte termico; eseguiamo dunque un fit bimodale utilizzando due gaussiane bidimensionali: in blu è disegnata la funzione di fit della frazione termica, in rosso la funzione di fit totale di parte termica e parte condensata. Riportiamo le sezioni delle funzioni bidimensionali di fit nelle due direzioni x (direzione radiale) e z (direzione assiale, essendo il reticolo disposto in dirzione verticale, cioè lungo z). I punti in nero corrispondo invece al reale profilo dell'immagine. Attraverso questo fit bimodale possiamo ricavare per ogni tempo Δt di permanenza del condensato nel reticolo, la larghezza radiale ed assiale di parte condensata e parte termica, ed il numero di atomi condensati e termici. Noto il tempo di espansione $t_{esp} = 40$ ms ricaviamo temperature rappresentate in Fig. 5.7.



Figura 5.6: (a) Immagine di una nuvola atomica lasciata evolvere nel reticolo per 1.5 s e acquisita dopo un tempo di espansione di 40 ms. Le dimensioni dell'immagine sono in pixel. (b) e (c) In nero è disegnata la sezione lungo l'asse x (z) dell'immagine (a); in linea blu continua è disegnata la sezione della funzione bidimensionale di fit della frazione termica, in linea rossa tratteggiata la sezione della funzione della funzione bidimensionale di fit totale. Le dimensioni sono in metri.



Figura 5.7: Stime della temperatura degli atomi al variare del tempo di permanenza del condensato nel reticolo. Le diverse stime sono state ricavate dal fit bidimensionale delle immagini delle nuvole atomiche. I punti rossi e blu rappresentano la temperatura stimata dal fit radiale ed assiale della parte termica, calcolata tramite l'equazione (5.8). In nero è invece rappresentata la stima della temperatura derivata dal fit della parte condensata tramite la (5.10). In linea continua sono rappresentati i fit lineari delle temperature eseguiti per $\Delta t > 1$; dalla pendenza delle rette è possibile ricavare il rate di riscaldamento degli atomi nel reticolo.

La temperatura può essere stimata dal fit della parte termica utilizzando l'equazione che ne descrive l'espansione [21]

$$\sigma(t) = \sigma_0 \sqrt{1 + (\omega t)^2},\tag{5.5}$$

con σ_0 dimensione del campione per t = 0, che nel caso di un gas termico vale

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{K_B T}{m\omega^2}}.$$
(5.6)

Nel caso in cui $\omega t \gg 1$ la (5.5) diventa

$$\sigma(t) = \sigma_0 \omega t = \sqrt{\frac{K_B T}{m}} t, \qquad (5.7)$$

da cui è possibile ricavare la temperatura come

$$T = \frac{m}{K_B} \left(\frac{\sigma(t)}{t}\right)^2.$$
(5.8)

Misurando le ampiezze σ_x e σ_z della nuvola termica dopo l'espansione di 40 ms, note le frequenze di oscillazione radiale (30 Hz, per un'intensità del laser $I = \dots$ W) e assiale (5 Hz, misurata nella sezione 5.1), ricaviamo quindi le stime della temperatura T_x e T_z .

Confrontiamo la temperatura del sistema ottenuta dal fit della parte termica con la temperatura ricavata dalla misura della frazione condensata: per un condensato di Bose-Einstein in trappola ottica la temperatura critica di condensazione vale

$$K_B T_C = \hbar \bar{\omega} \sqrt[3]{\frac{N}{g_3(1)}},\tag{5.9}$$

dove la funzione $g_3(z)$ è stata definita in (1.12) e $\bar{\omega} = \sqrt[3]{\omega_x^2 \omega_z d/\sqrt{\pi}a_{lat}}$, con $a_{lat} = \sqrt{\hbar/m\omega_{lat}}$. Il termine $d/\sqrt{\pi}a_{lat}$ viene introdotto per considerare, oltre al confinamento armonico radiale ($\omega_x = 30$ Hz) ed assiale ($\omega_z = 5$ Hz), la presenza del reticolo ($\omega_{lat} = 50$ kHz). Allora noto il numero totale di atomi ed il numero di atomi condensati, possiamo calcolare la temperatura del condensato da

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_C}\right)^3. \tag{5.10}$$

In Fig. 5.7 sono riportate la stime della temperatura ricavate dal fit termico radiale (in rosso) ed assiale (in blu) tramite dell'equazione (5.8); la stima della



Figura 5.8: Frazione condensata al variare del tempo di permanenza Δt degli atomi nel reticolo ottico, calcolata dal fit delle immagini delle nuvole atomiche come $n_0 = N_0/(N_0 + N_{ter})$.

temperatura ricavata dal fit della parte condensata tramite la (5.10), disegnata in nero, risulta compatibile con le stime termiche, sebbene sia leggermente più alta

In Fig. 5.8 riportiamo la frazione condensata, calcolata come $n_0 = N_0/(N_0 + N_t)$, in funzione del tempo Δt di permanenza degli atomi nel reticolo ottico. Il numero degli atomi condensati N_0 (termici N_t) è calcolato dalla dimensione del picco di assorbimento della parte condensata (termica) dell'immagine acquisita come

$$N_0 = \frac{4\pi^2 \sigma_x \sigma_z}{3\lambda},\tag{5.11}$$

dove σ_x e σ_z sono le varianze della funzione gaussiana bidimensionale di fit e λ è lunghezza d'onda della luce di imaging, che nel caso in cui acquisiamo immagini di ³⁹K è $\lambda = 767$ nm. Per tempi Δt brevi, fino a quasi un secondo, gran parte del campione è condensato. In questo caso la funzione di fit bimodale non può fittare la forma della nuvola atomica; abbiamo quindi impostato nella funzione di fit un filtro: definita *B* l'ampiezza della gaussiana termica ed *A* l'ampiezza della gaussiana condensata, se B < A/10 imponiamo la parte termica uguale a zero e la frazione condensata pari a uno.

L'andamento della frazione condensata evidenzia una transizione da una fase in cui tutto il campione è condensato, lunga circa un secondo, ad un fase in cui la nuvola atomica è in parte condensata in parte termica, e la frazione condensata



Figura 5.9: Rate di perdite a tre corpi Γ , al variare del tempo di permanenza degli atomi nel reticolo, calcolato utilizzando la definizione (5.13), a partire dalle densità misurate sperimentalmente

vale $n_0 = 0.3$. Il valore della frazione condensata resta quindi costante per tempi molto lunghi, fino a più di tre secondi, permettendoci di stimare un tempo di vita del condensato nel reticolo superiore ai tre secondi. Questo è in buon accordo con quanto osservato dall'andamento della temperatura (termica e condensata) che cresce nel primo secondo per poi stabilizzarsi attorno ai 15 nK, ben al di sotto della temperatura critica (calcolata attorno ai 20 nK dalla (5.9)).

Cerchiamo di comprendere quello che accade a tempi brevi; dobbiamo cioè capire cosa causa il riscaldamento degli atomi e la conseguente diminuzione della frazione condensata nel primo secondo di permanenza del condensato nel reticolo ottico. L'incremento della temperatura a tempi brevi, così come il decadimento della frazione condensata, non ha un andamento esponenziale: è molto più brusco. Questo ci fa pensare alla possibilità di ricombinazioni a tre corpi. Quando tre atomi sono abbastanza vicini (quando cioè la densità è abbastanza elevata), due di essi possono formare una molecola cedendo il momento e l'energia necessari per creare uno stato legato al terzo atomo. L'energia di uno stato legato molecolare è molto maggiore del potenziale chimico del nostro sistema ($E_{bound}/h = \nu_{bound}$ è dell'ordine del MHz, da confrontarsi con potenziali chimici dell'ordine del kHz): il processo di ricombinazioni a tre corpi produce quindi una perdita di atomi. Il decadimento nella densità n indotto da questo processo ha la forma [21]

$$\dot{n} = -K_3 n^3,$$
 (5.12)

dove $K_3 = 1.3 \cdot 10^{-29} \text{ cm}^6/\text{s}$ sullo zero crossing (quando cioè la lunghezza di scattering $a_s = 0$). Il rate di perdite a tre corpi dipende quindi non dalla densità ma dal quadrato della densità

$$\Gamma \equiv \frac{\dot{n}}{n} = -K_3 n^2, \tag{5.13}$$

provocando un decadimento più brusco di un decadimento esponenziale, compatibile con quanto osservato dai dati sperimentali. Gli urti a tre corpi avvengono dunque preferenzialmente nelle zone a densità maggiore; la parte condensata è in generale molto più densa della parte termica. L'effetto di ricombinazione a tre corpi induce quindi una perdita degli atomi condensati producendo un conseguente riscaldamento del sistema.

In Fig. 5.9 riportiamo il rate di perdite a tre corpi Γ , al variare del tempo di permanenza degli atomi nel reticolo, stimato utilizzando la definizione (5.13). Poichè la parte condensata è, come detto, di gran lunga più densa della parte termica, nel calcolo di Γ abbiamo considerato soltanto la densità del condensato ottenuta come

$$n = \frac{N_0}{V} = \frac{N_0}{\pi a_x^2 \sqrt{\pi} a_z} \frac{d}{\sqrt{\pi} a_{lat}},$$
(5.14)

dove N_0 è il numero di atomi condensati ricavato dalla (5.11), $a_{x,z,lat} = \sqrt{\hbar/m\omega_{x,z,lat}}$ è la larghezza dello stato fondamentale dell'oscillatore armonico, e $d = \lambda_L/2$ è la periodicità del reticolo. Fino a $\Delta t \sim 500$ ms la stima teorica del rate di perdite a tre corpi è dell'ordine di 0.13 s⁻¹: questo significa che circa il 15% degli atomi condensati viene perso nel primo secondo di permanenza nel reticolo ottico a causa di urti a tre corpi. La misura della frazione condensata evidenzia in realtà una perdita nel primo secondo di vita del condensato nel reticolo pari a circa il 50% degli atomi; stiamo dunque sottostimando il rate di perdita a tre corpi.

Per $\Delta t > 1$ s la frazione condensata è stabile attorno al valore 0.3 ed il rate di perdita a tre corpi è minore di 0.05 s⁻¹. Possiamo allora tralasciare il primo secondo di permanenza degli atomi nel reticolo, tempo influenzato da un rate di perdite a tre corpi elevato, e misurare il rate di riscaldamento della nuvola atomica per $\Delta t > 1$ s. Fittando i dati sperimentali con una retta, disegnata in linea continua in Fig. 5.7, ricaviamo un heating rate di 1.5 nK/s per la parte termica e 1 nK/s per la parte condensata. Dalla misura dello spettro di potenza dell'intensità del laser che genera il reticolo ottico abbiamo calcolato nella sezione 4.1 un rate di
riscaldamento altrettanto piccolo, pari a 2 nK/s, per atomi che oscillano nelle buche di potenziale con una frequenza di 50 kHz (Fig. 4.4). Le misure sperimentali eseguite sui condensati di Bose-Einstein nel reticolo ottico sono dunque consistenti con l'incremento di temperatura calcolato per gli atomi in trappola nella sezione 4.1. Il reticolo è effettivamente stabile, il tempo di vita del condensato nel reticolo è decisamente lungo.

Capitolo 6

Espansione di un condensato di Bose-Einstein nel reticolo ottico

Lo studio della fisica dei sistemi disordinati è uno dei campi più affascinanti della fisica moderna. Un modo efficace per studiare la fisica di un sistema disordinato è osservare l'espansione di un pacchetto d'onda inizialmente confinato, come ad esempio è stato fatto in [34]. In linea di principio vorremmo lavorare in un potenziale nullo nella direzione del reticolo, in modo da osservare solo gli effetti del disordine sull'evoluzione delle funzioni d'onda. Nella pratica questo non avviene mai. Il primo passo da fare è dunque caratterizzare l'andamento del potenziale nella direzione verticale (Sez. 6.1). La caratterizzazione del comportamento del condensato nel reticolo ottico è invece necessaria per fissare le scale di tempo, energia e dimensione del problema. Svolgeremo questo tipo di misure nella sezione centrale del capitolo, verificando così alcune proprietà dinamiche dei condensati introdotte nel Cap. 3. Soltanto dopo un accurato studio della dinamica del condensato nel reticolo ottico è possibile provare a misurarne l'espansione in un potenziale disordinato.

Nell'ultima sezione di questo capitolo introdurremo qualitativamente la dinamica del condensato in un potenziale disordinato, senza affrontare il problema nella sua complessità, ma riportando alcune misure preliminari quali aperitivo della fisica che ci apprestiamo ad indagare con questo apparato sperimentale.

6.1 Ocillazione in trappola ottica

Per cominciare effettuiamo una misura dell'oscillazione del condensato nel singolo tubo verticale, impedendo la retroriflessione della luce laser così da non generare



Figura 6.1: Oscillazione di un condensato di ³⁹K non interagente nel singolo tubo verticale: in grafico è riportato l'andamento della posizione z della nuvola atomica in funzione del tempo. Il condensato oscilla con frequenza $\nu = 5$ Hz.

il reticolo ottico. Siamo interessati alla dinamica del condensato nella direzione del reticolo, ovvero nella direzione verticale che chiameremo \hat{z} . Sperimentalmente misuriamo in questa direzione un intrappolamento degli atomi non provocato dal confinamento assiale dovuto alla trappola ottica: il Rayleigh range del nostro fascio gaussiano è infatti dell'ordine di 3 cm, essendo il waist del fascio nel fuoco dell'ordine di 100 $\mu{\rm m}$ e $\lambda_L=1064$ n
m. Ci aspettiamo allora una frequenza di oscillazione assiale dell'ordine di 1 Hz, per l'equazione (3.11). Eseguendo misure analoghe a quelle effettuate nella sezione precedente per la misura della frequenza radiale nel reticolo su un campione condensato di ³⁹K non interagente, troviamo invece una frequenza di oscillazione assiale $\nu_z = 5$ Hz, come mostrato il Fig 6.1. Le immagini della nuvola atomica sono state fittate con una funzione gaussiana $f_{fit} = A \exp\left(-(z-\bar{z})^2/2\sigma_z^2\right)$ dove \bar{z} è la posizione media verticale degli atomi e σ_z il size del condensato. In questo caso abbiamo intenzionalmente messo il condensato fuori dalla posizione di equilibrio (spegnendo il campo di compensazione della gravità), al fine di osservare le oscillazioni del centro di massa. Questo intrappolamento nella direzione \hat{z} è dovuto probabilmente alla presenza di campi magnetici residui generati da impurezze ferromagnetiche presenti nelle strutture metalliche circostanti gli atomi.

6.2 Espansione del condensato nel reticolo ottico

Le misure riportate in questo paragrafo sono state eseguite aggiungendo al potenziale armonico di 5 Hz il reticolo ottico verticale, permettendo così lo studio della dinamica di un condensato di Bose-Einstein di ³⁹K interagente nel potenziale periodico. Abbiamo eseguito misure per tre diversi regimi d'interazione, bassa, intermedia e forte, in un reticolo di profondità $s \simeq 5$, ripetendo la medesima procedura sperimentale: il condensato viene inizialmente caricato in trappola ottica e nel reticolo ottico; è inoltre acceso il gradiente di campo magnetico che annulla gli effetti della gravità, ed il campo Feshbach, necessario per tunare l'interazione. Al tempo t_0 viene spenta la trappola ottica ed il condensato viene lasciato espandere nel potenziale creato dal reticolo e dalla trappola a 5 Hz descritta nel paragrafo precedente, per un tempo di evoluzione Δt variabile. Poichè siamo interessati all'espansione del condensato nel reticolo accendiamo il campo di compensazione della gravità, in modo tale che il centro di massa del condensato non si muova nella direzione \hat{z} : così facendo non misuriamo la posizione della nuvola atomica ma il suo allargamento nella direzione del reticolo. Al termine dell'evoluzione Δt spegniamo il reticolo e acquisiamo l'immagine a campo alto dopo un tempo di espansione trascurabile $(t_{esp} < 1 \text{ ms})$, ottenendo così un'immagine in situ del campione.

In Fig. 6.2 è riportata la dimensione del condensato nella direzione \hat{z} al variare del tempo di evoluzione Δt , per un valore del campo Feshbach B = 356.5 G, corrispondente ad una lunghezza di scattering $a \sim 4 a_0$. In Fig. 6.3 riportiamo l'andamento di σ_z per un valore del campo B = 381.5 G, corrispondente ad $a \sim 45$ a_0 , ed infine in Fig. 6.4 è rappresentato l'andamento del size per B = 396.5 G, pari ad $a \sim 250 a_0$. Abbiamo eseguito un fit dei dati sperimentali con una funzione sinusoidale smorzata nel caso di interazione bassa e intermedia, ricavando una frequenza di oscillazione $\nu_{quad} = 7.2$ Hz per B = 356.5 G e $\nu_{quad} = 6.4$ Hz per B = 381.5 G. Tipicamente il size del condensato compie oscillazioni di quadrupolo, oscilla cioè con una frequenza doppia della frequenza di trappola; nel nostro caso dunque misuriamo frequenze di trappola pari a $\nu_{dip} = 3.6$ Hz (B = 356.5 G) e $\nu_{dip} = 3.2$ Hz (B = 381.5G), inferiori alla frequenza di oscillazione del condensato nella sola trappola a 5 Hz. Nel caso TF=395 non osserviamo oscillazioni: il size del condensato cresce ad una velocità minore dei casi meno interagenti, per poi stabilizzarsi attorno ad un valore costante.

Questo comportamento particolare è causato dalla presenza del potenziale periodico. Per comprendere quanto accade alla dinamica di un condensato di BoseEistein in un potenziale periodico dobbiamo recuperare il concetto di massa efficace, già discusso nella sezione 3.2. L'effetto di un reticolo sul condensato si traduce in una modifica della massa efficace degli atomi dipendente dalla curvatura dello spettro energetico (vedi Fig. 3.3). Poichè nell'approssimazione tight binding $E(q) \propto -2J \cos(qd)$, dove J è l'energia di tunneling (dipendente dalla profondità del reticolo dalla (3.22)), $d = \lambda_L/2$ è la periodicità del reticolo e q è il quasimomento, dalla definizione (3.28) di massa efficace ricaviamo

$$m_{eff} = \hbar^2 \left(\frac{\partial^2 E(q)}{\partial q^2}\right)^{-1} = \frac{\hbar^2}{2Jd^2\cos(qd)} = m \frac{E_R}{J\pi^2\cos(qd)}.$$
(6.1)

La frequenza di oscillazione degli atomi in un potenziale armonico dipende dalla massa, in particolare $\omega = \sqrt{k/m}$ dove k è la costante elastica. L'effetto del reticolo sugli atomi è quindi quello di modificarne la frequenza di oscillazione in trappola armonica. La massa efficace dipende comunque dal quasimomento q del condensato. La distribuzione dei quasimomenti di un condensato nel reticolo non è deltiforme. All'aumentare dell'energia di interazione, la distribuzione di q si allarga ed il quasimomento medio diviene via via più grande. Questo fenomeno produce un duplice effetto nell'evoluzione temporale della nuvola condensata: in primo luogo aumentando l'energia d'interazione diminuisce la velocità di espansione, perchè popolare stati con quasimomento medio maggiore provoca un aumento nella massa efficace e quindi un rallentamento nella dinamica. In secondo luogo avviene uno smorzamento dell'oscillazione provocato da uno sfasamento nelle oscillazioni delle varie componenti a quasimomento diverso.

Cerchiamo di utilizzare questa immagine qualitativa nel dare un'interpretazione dei dati sperimentali. Cominciamo con le misure riportate in Fig. 6.2, nel caso in cui $a \sim 4a_0$. Poichè l'interazione è piccola ipotizziamo che il condensato popoli soltanto lo stato q = 0; in questa approssimazione il rapporto tra la frequenza di oscillazione degli atomi intrappolati nel potenziale armonico con e senza il reticolo risulta essere dalla (6.1)

$$\frac{\omega^*}{\omega_0} = \sqrt{\frac{m}{m_{eff}(q=0)}} = \sqrt{\frac{J\pi^2}{E_R}},\tag{6.2}$$

da cui possiamo ricavare J come

$$J = \frac{E_R}{\pi^2} \left(\frac{\omega^*}{\omega_0}\right)^2. \tag{6.3}$$

Nel nostro caso $\omega_0 = 2\pi * (10\pm 0.2)$ Hz e $\omega^* = 2\pi * (7.2\pm 0.4)$ Hz, da cui ricaviamo $J = 238\pm 25$ Hz. Possiamo confrontare la stima di J fatta in questa approximazione, con



Figura 6.2: Espansione di un condensato di ³⁹K debolmente interagente $(a_s \sim 4a_0)$ in un reticolo di profondità s = 5.3. In grafico è riportato l'andamento del size σ_z del condensato in funzione del tempo Δt di permanenza nel reticolo. In rosso è disegnato il fit dei dati sperimentali, rappresentati dai punti neri.



Figura 6.3: Espansione di un condensato di ³⁹K interagente $(a_s \sim 45a_0)$ in un reticolo di profondità s = 5.3. In grafico è riportato l'andamento del size σ_z del condensato in funzione del tempo Δt di permanenza nel reticolo. In rosso è disegnato il fit dei dati sperimentali, rappresentati dai punti neri.

il calcolo analitico di J dato dalla (3.22). Dopo avere calibrato il reticolo attraverso una misura di Bragg scattering e stimato $s = 5.3 \pm 0.15$, possiamo ricavare J =277.3 ± 14 Hz, in buon accordo con il calcolo fatto a q = 0. Noto J possiamo stimare il quasimomento medio \bar{q} del condensato; utilizzando la (6.1) si ha

$$\frac{\omega^*}{\omega} = \sqrt{\frac{\pi^2 J}{E_R} \cos(\bar{q}d)},\tag{6.4}$$

da cui ricaviamo

$$\bar{q}d = \arccos \frac{E_R}{\pi^2 J} \left(\frac{\omega^*}{\omega_0}\right)^2.$$
(6.5)

Nel caso B = 356.5 G calcoliamo $\bar{q} = 0.17 \pm 0.02 \ \pi/d$, vicino a zero in accordo con l'approssimazione fatta nella stima iniziale di J, ma non nullo. In effetti una stima a bassa interazione della (6.4) è data da

$$\frac{\omega^*}{\omega}\Big|_{\bar{q}\approx 0} = \sqrt{\frac{\pi^2 J}{E_R}} \left(1 + \frac{d^2}{4}\bar{q}^2\right),\tag{6.6}$$

quindi $\omega^* \approx \omega$ se $\bar{q}d \ll 2$, cioè se $\bar{q} \ll 2k_L/\pi$, con $k_L = \pi/d$.

Nel caso B = 381.5 G (vedi Fig. 6.3) la frequenza di oscillazione è $\omega^* = 2\pi * (6.4 \pm 0.3)$ Hz, minore della frequenza di oscillazione osservata nel caso a bassa interazione; ricaviamo in effetti $\bar{q} = 0.26 \pm 0.04 \ \pi/d$, maggiore del quasimomento medio ricavato nel caso precedente. In effetti se $\bar{q} \sim 0.25 \ \pi/d$ la distribuzione gaussiana di quasimomenti si estende almeno fino a $2\bar{q} \sim \pi/2d$, occupando metà banda: questo provoca lo sfasamento tra le varie componenti a q diverso ed il conseguente smorzamento dell'oscillazione.

Possiamo stimare l'ordine di grandezza del tempo di smorzamento dell'oscillazione ipotizziando che la popolazione del condensato si divida in due soli stati d'impulso: quello con q = 0 e quello con $q = \bar{q}$, che è il quasimomento medio del condensato. Allora il tempo \tilde{t} di smorzamento è il tempo necessario affinchè la differenza di fase tra la componente a quasimomento \bar{q} , che oscilla alla frequenza ω^* , e la componente a quasimomento nullo, che oscilla alla frequenza ω_0 , sia $\pi/2$. Quindi \tilde{t} è tale che

$$(\omega_0 - \omega^*)\tilde{t} = \frac{\pi}{2}.\tag{6.7}$$

In effetti applicando questa stima qualitativa al caso in cui B = 356.5 G ed al caso B = 381.5 G, troviamo rispettivamente $\tilde{t}_{356.5} = 90$ ms e $\tilde{t}_{381.5} = 70$ ms; dalle misure sperimentali osserviamo i tempi di smorzamento $\tau_{356.5} = 223 \pm 34$ ms e $\tau_{381.5} = 211 \pm 30$ ms. L'ordine di grandezza dei tempi \tilde{t} calcolati è corretto; in



Figura 6.4: Espansione di un condensato di ³⁹K fortemente interagente $(a_s \sim 250a_0)$ in un reticolo di profondità s = 5.3. In grafico è riportato l'andamento del size σ_z del condensato in funzione del tempo Δt di permanenza nel reticolo.

effetti nell'effettuare questa stima stiamo semplificando notevolmente la dinamica del sistema, trascurando ogni componente del quasi impulso diversa da q = 0 e da $q = \bar{q}$. Per una stima più corretta del tempo di smorzamento si dovrebbe integrare una distribuzione realistica di q sulla banda, così come fatto ad esempio in [33].

Per B = 396.5 G (vedi Fig. 6.4) non possiamo stimare la frequenza d'oscillazione del condensato nel reticolo: l'interazione è troppo grande, il quasimomento medio troppo vicino al π/d . Il condensato non riesce a compiere un'oscillazione completa; prima di terminare l'oscillazione le varie componenti della sua distribuzione di quasimomento sono già fuori fase. La dimensione della nuvola atomica cresce allora linearmente sino a raggiungere un valore costante.

6.3 Verso lo studio della diffusione di un sistema bosonico disordinato interagente

La presenza di disordine dá luogo a fenomeni particolari ed inaspettati quali la localizzazione di onde e di particelle, e modifica le proprietà di trasporto del sistema. In particolare il ruolo del disordine e dell'interazione nella localizzazione o delocalizzazione del sistema è ancora un problema aperto, e non del tutto chiarificato. Attraverso l'utilizzo di atomi freddi in potenziali quasiperiodici creati dalla sovrapposizione di reticoli ottici è possibile riprodurre sperimentalmente sistemi disordinati altamente controllabili ed investigare così le proprietà statiche e dinamiche dei sistemi disordinati.

L'osservazione della dinamica di un condensato di Bose-Einstein in un reticolo ottico è in effetti una misura preliminare ed introduttiva allo studio dell'espansione di un condensato interagente in un sistema disordinato. In questo lavoro di tesi non è stato però possibile effettuare misure in sistemi disordinati interagenti; stiamo infatti lavorando al potenziamento dell'apparato sperimentale al fine di osservare le dinamiche diffusive anche molto lente di questi sistemi. Per questo è stato necessario costruire un reticolo ottico ultrastabile, che permettesse l'osservazione del comportamento degli atomi intrappolati anche per tempi molto lunghi. Vogliamo comunque dare un'idea della ricerca che ci accingiamo ad intraprendere riportando due misure preliminari eseguite in presenza di un potenziale disordinato con e senza interazione.

Per una descrizione dettagliata di quanto accade in sistemi disordinati rimando ai lavori sperimentali fatti al LENS sull'apparato che ho utilizzato in questo lavoro di tesi, nei quali è illustrato il comportamento statico di un condensato non interagente [34] ed interagente [35] in questo tipo di potenziali. Gli esperimenti citati sono eseguiti in un reticolo unidimensionale quasiperiodico ottenuto dalla sovrapposizione di due reticoli ottici incommensurati. Il potenziale quasiperiodico induce una transizione da una fase delocalizzata (nella quale il sistema è descritto dagli autostati del condensato nel reticolo monocromatico) ad una fase localizzata; questa transizione di fase è analoga alla transizione di Anderson già in sistemi unidimensionali, come illustrato nel modello di Aubry-André [16]. Aggiungendo un'interazione repulsiva al sistema le funzioni d'onda localizzate tornano a delocalizzarsi; in un certo senso l'interazione annulla l'effetto del disordine. Le nuove misure che abbiamo intenzione di realizzare vogliono studiare la dinamica di un condensato in questo sistema disordinato.



Figura 6.5: Espansione di un condensato di ³⁹K debolmente interagente $(a_s \sim 4a_0)$ nel reticolo ottico (in nero) e nel potenziale quasiperiodico (in rosso). In linea continua rappresentiamo i fit dei dati sperimentali. Dal fit dell'andamento del size σ_z nel potenziale disordinato calcoliamo $\alpha \sim 0$: per basse interazioni il condensato non espande nel potenziale quasiperiodico ma rimane localizzato.



Figura 6.6: Espansione di un condensato di ³⁹K fortemente interagente $(a_s \sim 250a_0)$ nel reticolo ottico (in nero) e nel potenziale quasiperiodico (in rosso). Dal fit dell'andamento del size σ_z nel potenziale disordinato (rappresentato in linea continua) calcoliamo $\alpha \sim 0.5$: nel regime fortemente interagente il condensato diffonde nel potenziale quasiperiodico.

In Fig. 6.5 riportiamo una misura dell'espansione di un condensato non interagente (B = 356.5 G) in un potenziale quasiperiodico, creato sovrapponendo alla luce laser del reticolo una luce di lunghezza d'onda $\lambda_s = 866$ nm, che genera un reticolo secondario di altezza $V_s = 6J$. In nero è riportato il size σ_z del condensato nel singolo reticolo, la cui misura è stata discussa nel paragrafo precedente (cfr. Fig. 6.2). In rosso riportiamo invece l'andamento di σ_z nel potenziale quasiperiodico in funzione del tempo di evoluzione Δt ; se fittiamo i dati sperimentali con una funzione $f_{fit} = \sigma_0 + A(1+t/t_0)^{\alpha}$, dove il parametro α dice se l'espansione è balistica ($\alpha = 1$), diffusiva ($\alpha = 0.5$) o subdiffusiva ($\alpha < 0.5$), troviamo che in presenza di disordine $\alpha \sim 0$. Il sistema quindi non espande ma rimane localizzato e la sua dimensione resta costante nel tempo. In Fig. 6.6 è illustrata l'espansione di un condensato interagente (B = 396.5 G) nel potenziale quasiperiodico. Il size del condensato nel reticolo è disegnato in nero (cfr. Fig 6.4), il size nel potenziale quasiperiodico è in rosso. Se eseguiamo un fit dei dati sperimentali con la stessa funzione utilizzata nel caso non interagente troviamo che $\alpha \sim 0.5$. In presenza di interazione dunque il condensato non resta localizzato ma espande, e l'andamento dell'espansione è diffusivo.

Queste sono misure preliminari dalle quali non possiamo e non vogliamo trarre conclusioni definitive. Queste misure danno però un sapore della fisica che ci apprestiamo a investigare studiando la dinamica di un condensato di Bose-Einstein nel potenziale disordinato creato dalla sovrapposizione di due reticoli ottici, e delle potenzialità che questi sistemi hanno nello studio di fisiche complicate e difficilmente riproducibili, ma profondamente affascinanti, come la fisica del disordine.

Conclusioni

Negli ultimi anni il comportamento dei condensati di Bose-Einstein in reticoli ottici è stato oggetto di ricerche estremamente intense e gratificanti, sia teoriche che sperimentali. I reticoli ottici possono essere utilizzati per studiare le proprietà superfluide dei sistemi condensati, e rappresentano un banco di prova ideale per lo studio di molti problemi fondamentali di fisica dello stato solido connessi alla teoria del trasporto quantistico in potenziali periodici. L'alto grado di controllo di questi sistemi permette inoltre la realizzazione sperimentale e lo studio di problematiche complesse ed affascinanti quali la fisica del disordine e la fisica di sistemi fortemente confinati e a basse dimensionalità.

In questo lavoro di tesi ho realizzato il sistema ottico di un reticolo ottico tridimensionale, prestando particolare attenzione alla sua stabilizzazione, costruendo cioè un sistema di feedback che minimizzasse il rumore in intensità ed in frequenza della luce che genera il reticolo.

Ho successivamente caratterizzato il comportamento di un condensato di Bose-Einstein nel reticolo ottico unidimensionale, studiandone la dinamica al fine di calibrare il reticolo stesso.

Ho poi misurato l'andamento della temperatura di un condensato lasciato evolvere nel reticolo, verificandone così la stabilità. Il sistema così assestato risulta effettivamente ultrastabile: il condensato ha tempi di vita di varii secondi nel reticolo ottico. Questa che abbiamo realizzato è dunque una situazione ideale per compiere esperimenti delicati, quali lo studio delle proprietà di trasporto in sistemi disordinati.

Infine, ho compiuto alcuni esperimenti volti a caratterizzare l'espansione del condensato nel reticolo ottico, verificando alcune sue proprietà dinamiche. Queste sono le misure preliminari di un prossimo ciclo di esperimenti che vogliono studiare fenomeni affascinanti quali la diffusione di sistemi disordinati ed interagenti, che realizzeremo perturbando opportunamente il potenziale periodico generato dal reticolo.

Ringraziamenti

Ringrazio innanzitutto il Dr. Giacomo Roati, il cui incontro (in quei grigi giorni milanesi) è stato fondamentale nella scelta di avventurarmi in questa tesi fiorentina; e il Dr. Davide Galli, che ha permesso questo incontro organizzando quel seminario sui gas quantistici all'interno del suo (splendido) corso di fisica dei superfluidi. Grazie per avermi sempre sostenuto ed accompagnato.

Un grazie particolare va al Prof. Giovanni Modugno che mi ha costantemente seguito, aiutato ed indirizzato durante tutto il lavoro di tesi, insegnandomi a stare davanti ad un esperimento (io che la fisica sperimentale non sapevo nemmeno cosa fosse); e a tutti i ragazzi del laboratorio: Eleonora, Ben, Matteo e (ovviamente) Giacomo, per la passione che avete nello studio della fisica e nel tentativo di conoscere le cose, e per la pazienza che avete sempre avuto nel far luce sulle mie molte (troppe) idee confuse.

Ringrazio anche il Prof. Massimo Inguscio, che mi ha offerto la possibilità concreta di essere parte di questo entusiasmante esperimento.

Grazie infine allo Ste (Enzo) che mi ha trascinato in questa avventura e a tutti gli amici (i vecchi e i nuovi, dalla Brianza a Firenze, passando per Milano!) che mi hanno accompagnato e sostenuto in questi anni di università, siete la mia forza.

E a mia madre e mio padre, per i quali non ho parole che possano davvero esprimere tutta la mia gratitudine.

Bibliografia

- [1] C. Cohen-Tannoudji, Rev. Mod. Phys. 70, 707 (1998).
- [2] S. Chu, Rev. Mod. Phys. 70, 685706 (1998).
- [3] W. D. Phillips, Rev. Mod. Phys. 70, 721(1998).
- [4] E. A. Cornell & C. E. Wieman, Rev. Mod. Phys. 74, 875893 (2002).
- [5] W. Ketterle, Rev. Mod. Phys. 74, 11311151 (2002).
- [6] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii & S. Stringari, Rev. Mod. Phys. 71, 463512 (1999).
- [7] A. J. Leggett, Rev. Mod. Phys. 73, 307356 (2001).
- [8] M. Raizen, C. Salomon & Q. Niu, Phys. Today 50, 30 (1997) e referenze contenute.
- [9] F. London, Phys. Rev. 54, 947 (1938).
- [10] B. P. Anderson & M. A. Kasevich, Science 282, 1686 (1998).
- [11] M. Greiner, I. Bloch, O. Mandel, T. W. Hansch & T. Esslinger, Phys. Rev. Lett. 87, 160405 (2001).
- [12] P. Pedri, L. Pitaevskii, S. Stringari, C. Fort, S. Burger, F. S. Cataliotti, P. Maddaloni, F. Minardi & M. Inguscio, Phys. Rev. Lett. 87, 220401 (2001).
- [13] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T. W. Hansch & I. Bloch, Nature 415, 39 (2002).
- [14] R. Roth & K. Burnett, Phys. Rev. A 68, 023604 (2003).

- [15] B. Damski, J. Zakrzewski, L. Santos, P. Zoller & M. Lewenstein, Phys. Rev. Lett. 91, 080403 (2003).
- [16] S. Aubry & G. Andr, Ann. Israel Phys. Soc. 3, 133140 (1980).
- [17] C. Cohen-Tannoudji, Cours de physique atomique et moléculaire, Collège de France, année scolaire 1997-1998.
- [18] K. Huang *Statistical mechanics*, John Wiley & Sons (1966).
- [19] J. Brown & A. Carrington, Rotational spectrocopy of diatomic molecules, Cambridge University Press, Cambridge (2003).
- [20] L. D. Landau & E. M. Lifshitz, *Quantum mechanics*, Pergamon Press, Oxford (1977), sect. 131.
- [21] M. Zaccanti, *Ph.D. thesis*, LENS Firenze (2008).
- [22] A. J. Moerdijk, B. J. Verhaar & A. Axelsson, Phys. Rev. A 51, 4852 (1995).
- [23] C. Cohen-Tannoudji, Atomic motion in laser light, foundamental system in quantum optics, Les Houches, edito da J. Dalibard, J. M. Raimond, J. Zinn Justin (1990).
- [24] D. E. Pritchard, E. Raab, V. Bagnato, C. Wieman, R. Watts, Phys. Rev. Lett. 70, 2253 (1993).
- [25] C. Monroe, Swann, H. Robinson & C. Wieman, Phys. Rev. Lett. 65, 1571 (1990)
- [26] C. J. Myatt, *Ph.D. thesis*, University of Colorado (1997).
- [27] R. Grimm, M. Weidemller, Y. B. Ovchinnikov, Optical dipole traps for neutral atoms, arXiv:physics/9902072 (1999).
- [28] O. Morsch, M. Oberthaler, Rev. Mod. Phys. 78, 179215 (2006).
- [29] M. E. Gehm, K. M. OHara, T. A. Savard & J. E. Thomas, Phys. Rev. A 58, 39143921 (1998).
- [30] A. B. Pippard, The Physics of Vibration, Cambridge University Press, Cambridge (1978), pp. 285-305.
- [31] R. Jauregui, N. Poli, G. Roati, & G. Modugno, Phys. Rev. A 64, 033403 (2001).

- [32] L. Fallani, *Ph.D. thesis*, LENS Firenze (2005).
- [33] L. Pezz, L. Pitaevskii, A. Smerzi & S. Stringari, G. Modugno, E. de Mirandes,
 F. Ferlaino, H. Ott, G. Roati & M. Inguscio, Phys. Rev. Lett. 93, 120401 (2004).
- [34] G. Roati, C. D'Errico, L. Fallani, M. Fattori, C. Fort, M. Zaccanti, G. Modugno, M. Modugno & M. Inguscio, Nature 453, 895-898 (2008).
- [35] B. Deissler, M. Zaccanti, G. Roati, C. D'Errico, M. Fattori, M. Modugno, G. Modugno & M. Inguscio, *Delocalization of a disordered bosonic system by repulsive interactions*, arXiv:0910.5062 (2010).