

SCUOLA DI SCIENZE MATEMATICA FISICHE E NATURALI Corso di Laurea in Fisica e Astrofisica

Realizzazione di un gradiometro con atomi ultrafreddi intrappolati in potenziali a doppia buca

Realization of a gradiometer with ultra-cold atoms trapped in DW potentials

Relatore: Prof. Marco Fattori Candidato: Andrea Santoni

Sessione Anno Accademico 2020-2021 "La fisica non è una religione. Se lo fosse, sarebbe per noi molto più facile raccogliere denaro.". Leon Max Lederman

Indice

Introduzione					
1	Teo	ria Base	4		
	1.1	Equazione di Gross-Pitaevskii	4		
	1.2	Teoria della doppia buca	6		
		1.2.1 Bose-Hubbard Model	9		
	1.3	Teoria dei <i>fit</i>	12		
		1.3.1 Il metodo dei minimi quadrati	13		
		1.3.2 <i>Fit</i> Ellittico	15		
2	Set	Up Sperimentale	20		
	2.1	Generation of BEC	20		
	2.2	Interazione Variabile	21		
	2.3	Sistema di Imaging	23		
3	Pot	enziale Periodico Di Doppie Buche	26		
-	3.1	Teoria \ldots	28		
	-	3.1.1 Beat-Note Super Lattice	28		
		3.1.2 Array di Doppie Buche	29		
	3.2	Realizzazione dell'Array di Doppie Buche	35		
		3.2.1 Stabilizzazione in Frequenza delle Sorgenti Laser	37		
		3.2.2 Studio del rumore della stabilizzazione	40		
	3.3	Analisi e Caratterizzazione	47		
		3.3.1 Potenziale a Doppia Buca Bilanciato	47		
		3.3.2 Rabi Oscillation	49		
		3.3.3 Curvatura del Potenziale Indotta	50		
		3.3.4 Imbalance dovuto alla fase Gouy	51		
4	Inte	erferometro di Mach-Zehnder	55		
	4.1	Primo Beam-Splitter	57		
	4.2	Secondo Beam-Splitter	59		
	4.3	Mach-Zehnder Completo	60		
	4.4	Gradiometro	63		

INDICE

	4.5	Analisi Differenziali	64	
5	Dop	opia buca con atomi interagenti	73	
	5.1	Riduzione del rumore indotta dall'interazione	74	
	5.2	Definizione del termine di interazione	78	
	5.3	Simulazione alzamento della barriera con rumore	81	
	5.4	Realizzazione di stato <i>squeezed</i>	82	
6	Con	clusioni e Prospettive Future	84	
Ri	Ringraziamenti			

1

Introduzione

Gli interferometri atomici sono strumenti molto interessanti perché permettono grazie all'uso di particelle massive, di fare misure di alta precisione di gravità [1] e campi elettromagnetici, costanti fondamentali [2], forze inerziali [3], campi esotici [4].

Lo stato dell'arte degli interferometri atomici sono gli interferometri con atomi in caduta libera. Questi ultimi utilizzano campioni di atomi diluiti, dove si può di trascurare l'interazione riuscendo a raggiungere elevate sensibilità. Questi interferometri hanno però delle limitazioni: hanno una bassa risoluzione spaziale e il tempo di interrogazione è limitato dalle dimensioni finite dell'apparato. Infatti in questi interferometri la differenza di fase $\Delta \phi \propto T^2$, dove T è il tempo di volo degli atomi. Quindi per aumentare la risoluzione devo aumentare il tempo di volo, ma per farlo devo aumentare le dimensioni dell'apparato sperimentale.

Un'altra famiglia di interferometri atomici sono quelli in trappola. Questi interferometri sono caratterizzati da un tempo di interrogazione potenzialmente infinito (essendo gli atomi sorretti contro la gravità) e da un'alta risoluzione spaziale. Però, sono afflitti dalle instabilità del potenziale di trappola e l'utilizzo di nuvole atomiche altamente dense (in particolare i condensati) porta una decoerenza del segnale interferometrico causata dall'interazione atomica.

In questo lavoro di tesi descrivo la realizzazione di un interferometro Mach-Zhender con condensati di Bose-Einstein (BEC) intrappolati con un potenziale a doppia buca. Nella figura 1 riporto lo schema del nostro l'interferometro di Mach-Zehnder atomico. Durante il primo "*Beam-Splitter*" atomico il BEC viene separato nei due modi spaziali che accumulano una fase relativa $\Delta \varphi$ durante il secondo passaggio chiamato "tempo di interrogazione" T. Con il secondo "*Beam-Splitter*" atomico gli atomi sono parzialmente ricombinati per convertire le informazioni relative di fase in numero di atomi nei due modi.



Figura 1: Rappresentazione schematica dell'interferometro Mach-Zehnder con condensati intrappolati in un potenziale a doppia buca realizzato in questa tesi.

Nel nostro esperimento, per cercare di risolvere in parte i problemi degli inter-

Introduzione

ferometri in trappola, si va ad utilizzare condensati di Potassio 39 (${}^{39}K$). Questo particolare atomo è utile per la possibilità di utilizzare la sua risonanza di Feshbach per andare a modificare l'interazione atomica mediante un campo magnetico, così da annullarla l'energia di interazione.

In questa tesi descriviamo un metodo innovativo, implementato nel nostro esperimento, che ci ha permesso di realizzare un potenziale di doppia buca mediante reticoli a nota di battimento [5]. Questa nuova tecnica si basa sulla realizzazione di un super reticolo mediante la sovrapposizione di tre reticoli standard ottenuti dalla retro-riflessione di tre laser su un singolo specchio. La particolarità fondamentale di questo set up per generare il potenziale è la sua stabilità che dipendente dalla stabilità di un singolo specchio e quella delle frequenze dei tre laser utilizzati.

Il super reticolo usato ci permette di realizzare una serie di doppie buche con una separazione tra i due modi pari a 5 μm , con ogni doppia buca separata 10 μm dalle altre.

Nel primo capitolo daremo una breve introduzione sulle teoria base del comportamento dei BEC in presenza di un potenziale esterno, con una sezione dedicata completamente alla teoria della doppia buca. Inoltre affronteremo la teoria che sta dietro i *fit* ellittici, che verranno eseguiti per effettuare misure differenziali tra due interferometri operanti contemporaneamente, ossia una misura gradiometrica.

Nel secondo capitolo parleremo del *set up* sperimentale parlando della procedura di realizzazione della BEC e il caricamento degli atomi nel potenziale di trappola, della risonanza di Feshbach usata e infine del sistema di *immaging*.

Il terzo capitolo riguarda invece la descrizione e caratterizzazione del potenziale di trappola usato per generare una *array* di doppie buche, con una visione sulle tecniche di stabilizzazione delle frequenze dei laser impiegati. Riporteremo anche delle immagini acquisite nel nostro esperimento dove mostreremo la nostra capacità di caricare tre doppie buche contemporaneamente. In questo capitolo vengono riportate anche alcune simulazioni e misure svolte per studiare le caratteristiche del potenziale.

Il quarto capitolo riguarda i vari passaggi usati per realizzare l'interferometro di Mach-Zehnder, insieme alle immagini e ai dati che abbiamo acquisito. In particolare si mostra come, avendo più interferometri che lavorano simultaneamente, è possibile realizzare un Gradiometro ed eseguire un'analisi differenziale per ottenere informazioni sulla differenza di fase tra due interferometri cancellando il rumore comune.

Nell'ultimo capitolo invece riportiamo alcuni studi sulla possibilità di utilizzare l'interazione per ridurre l'incertezza nel numero di atomi relativo tre le due buche. Nel capitolo cercheremo anche di riuscire a eseguire delle simulazioni dinamiche in presenza di una iterazione per replicare i dati sperimentali. La parte di esperimento relativa a questa tesi si è svolta presso uno dei laboratori del Dipartimento di Fisica dell'Università degli Studi di Firenze.

Capitolo 1 Teoria Base

In questo capitolo presenteremo una panoramica sui principali strumenti teorici utili per comprendere l'evoluzione delle funzioni d'onda dei nostri atomi sottoposti a potenziali esterni e le analisi fatte in questa tesi. Nel prima sezione riportiamo la ben nota derivazione della Equazione Gross-Pitaevskii (GPE) a partire dall'Hamiltoniana a molti corpi per un Condensato di Bose-Einstein (BEC). Nella seconda sezione affronteremo lo studio del condensato sottoposto ad un pontenziale di doppia buca nell'approssimazione a due modi arrivando a scrivere l'equazione nota come "Equazione Josephson", e la scrittura dell'Hamiltoniana per il modello di Bose-Hubbard. Infine studiamo le tecnica che è stata utilizzata in questa tesi per effettuare dei fit ellittici dei segnali di due interferometri affetti da rumore comune.

1.1 Equazione di Gross-Pitaevskii

Con l'approccio di seconda quantizzazione possiamo andare a scrivere l'hamiltoniana generale per un sistema a multi-corpi per n bosoni in presenza di un potenziale esterno $V_{ext}(\vec{r})$ e uno di interazione $V_{int}(\vec{r} - \vec{r'})$:

$$\hat{H} = \int d^{3}r \hat{\Psi}^{\dagger}(\vec{r}) (-\frac{\nabla^{2}}{2m} + V_{ext}(\vec{r})) \hat{\Psi}(\vec{r}) + \frac{1}{2} \int d^{3}r d^{3}r' \hat{\Psi}^{\dagger}(\vec{r}) \hat{\Psi}^{\dagger}(\vec{r'}) V_{int}(\vec{r} - \vec{r'}) \hat{\Psi}(\vec{r}) \hat{\Psi}(\vec{r'})$$
(1.1)

dove l'operatore di campo $\hat{\Psi}(\vec{r})$ è definito:

$$\hat{\Psi}(\vec{r}) = \sum_{i} \psi_i(\vec{r}) a_i^{\dagger} \tag{1.2}$$

dove a_i^{\dagger} è l'operatore di creazione di singola particella nell'i-esimo stato descritto dalla funzione d'onda $\psi_i(\vec{r}) \in \int |\hat{\Psi}|^2 d^3x = N.$

CAPITOLO 1. TEORIA BASE

Per basse temperature e con gas neutri diluiti l'interazione può essere approssimata con una interazione di contatto, quindi:

$$V_{int}(\vec{r} - \vec{r'}) = g\delta(\vec{r} - \vec{r'})$$
(1.3)

dove il parametro di interazione g è proporzionale alla lunghezza di scattering a_s dell'onda s:

$$g = \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m} \tag{1.4}$$

Il parametro g ci dice il segno e l'ampiezza dell'interazione. Quindi posso riscrivere l'hamiltoniana 1.1:

$$\hat{H} = \int d^3 r \hat{\Psi}^{\dagger}(\vec{r}) (-\frac{\nabla^2}{2m} + V_{ext}(\vec{r})) \hat{\Psi}(\vec{r}) + \frac{1}{2}g \int d^3 \vec{r} \hat{\Psi}^{\dagger}(\vec{r}) \hat{\Psi}^{\dagger}(\vec{r}) \hat{\Psi}(\vec{r}) \hat{\Psi}(\vec{r})$$
(1.5)

E' possibile andare oltre con l'analisi mediante l'approssimazione di campo medio.

Mean Field Approximation

Un condensato di Bose-Einstein è caratterizzato da un numero molto elevato di atomi che si trovano nello stato fondamentale del sistema. Se il numero di atomi è molto elevato possiamo trascurare le fluttuazioni di singolo atomo del condensato. In poche parole stiamo considerando il numero di atomi costante (N_0) e tutti situati nello stato fondamentale.

$$\hat{a}_0 = \hat{a}_0^{\dagger} = \sqrt{N_0} \quad \Rightarrow \quad \hat{a}_0^{\dagger} \hat{a}_0 = N_0$$

Posso riscrivere l'equazione 1.2:

$$\hat{\Psi} \simeq \sqrt{N_0} \Psi_0(\vec{r}, t) \tag{1.6}$$

Attraverso questa approssimazione possiamo andare a ricavare l'equazione di Gross-Pitaevskii dinamica [6]:

$$i\hbar \frac{\mathrm{d}\Psi_0(\vec{r},t)}{\mathrm{d}t} = \left[-\frac{\nabla^2}{2m} + V_{ext}(\vec{r}) + gN_0|\Psi_0|^2 \right] \Psi_0(\vec{r},t)$$
(1.7)

E' possibile ricavare anche l'equazione di Gross-Pitaevskii stazionaria

$$\left[-\frac{\nabla^2}{2m} + V_{ext}(\vec{r}) + gN_0|\Psi_0|^2\right]\Psi_0(\vec{r}) = \varepsilon\Psi_0(\vec{r})$$
(1.8)

Queste forme dell'equazioni di Gross-Pitaevskii sono fondamentali, e sono state utilizzate durante il mio lavoro di tesi per le simulazioni che vedremo nei capitoli successivi.

1.2 Teoria della doppia buca

Two-Mode Approssimation

Lo studio di un condensato di Bose-Einstein in un potenziale a doppia buca può essere svolto nell'approssimazione di due modi. Nell'ipotesi in cui le scale di temperatura ed energia di interazione tra atomi del sistema siano sufficientemente piccole da produrre eccitazioni trascurabili rispetto alla separazione $\hbar\omega_{trap}$. Dove ω_{trap} è la frequenza di trappola del potenziale in assenza della barriera che separa i due modi.

$$k_B T \ll \hbar \omega_{trap} \qquad \mu \ll \hbar \omega_{trap}$$
(1.9)

Possiamo assumere che gli unici stati significativamente popolati siano quelli corrispondenti ai primi due livelli energetici.

In questa approssimazione possiamo considerare il nostro sistema come un sistema a due livelli. Lo stato *ground* corrispondente al primo stato simmetrico e il primo stato *excited* come il primo antisimmetrico della doppia buca come si vede in figura 1.1.



Figura 1.1: Nell'immagine riporto i primi due livelli energetici del potenziale a doppia buca per particelle non interagenti. In questa approssimazione questi rappresentano i due autostati di un sistema a due livelli. Lo stato simmetrico in rosso (ground state) e lo stato antisimmetrico in giallo (excited state).

Andiamo a scrivere l'hamiltionana di questo sistema:

$$\hat{H} = \varepsilon_s \hat{a}_s^{\dagger} \hat{a}_s + \varepsilon_a \hat{a}_a^{\dagger} \hat{a}_a \tag{1.10}$$

Dovo $\hat{a}_i^{\dagger} \in \hat{a}_i$ sono gli operatori di creazione/distruzione degli stati simmetrici (ground state) e anti-simmetrici (excited state).

Per comodità passiamo a scrivere le funzioni d'onda nella base *right* e *left*:

$$\psi_R = \frac{\psi_s + \psi_a}{\sqrt{2}} \qquad \psi_L = \frac{\psi_s - \psi_a}{\sqrt{2}} \tag{1.11}$$

CAPITOLO 1. TEORIA BASE

che rappresentano le funzioni d'onda della particella nella buca di destra o di sinistra del potenziale.

Nel medesimo modo posso definire le trasformazioni per gli operatori creazione e distruzione:

$$\hat{a}_R = \frac{\hat{a}_s + \hat{a}_a}{\sqrt{2}} \qquad a_L = \frac{\hat{a}_s - \hat{a}_a}{\sqrt{2}}$$
(1.12)

Andando a sostituire queste trasformazioni nell'hamiltoniana 1.10 ottengo:

$$\hat{H} = \varepsilon_S \left(\frac{\hat{a}_L^{\dagger} + \hat{a}_R^{\dagger}}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{\hat{a}_L + \hat{a}_R}{\sqrt{2}} \right) + \varepsilon_A \left(\frac{\hat{a}_R^{\dagger} - \hat{a}_L^{\dagger}}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{\hat{a}_R + \hat{a}_L}{\sqrt{2}} \right) =$$

$$= \varepsilon_S \left(\frac{\left[\hat{a}_L^{\dagger} \hat{a}_L + \hat{a}_R^{\dagger} \hat{a}_R \right] + \hat{a}_L^{\dagger} \hat{a}_R + \hat{a}_R^{\dagger} \hat{a}_L}{2} \right) + \varepsilon_A \left(\frac{\left[\hat{a}_R^{\dagger} \hat{a}_R + \hat{a}_L^{\dagger} \hat{a}_L \right] - \hat{a}_R^{\dagger} \hat{a}_L - \hat{a}_L^{\dagger} \hat{a}_R}{2} \right)$$

$$(1.13)$$

I termini riquadrati rappresentano l'operatore numero di particelle che fornisce sempre come risultato un numero costante e può quindi essere rimosso ai fini di questa analisi. Quindi otteniamo:

$$\hat{H} = (\varepsilon_S - \varepsilon_A) \left(\frac{\hat{a}_L^{\dagger} \hat{a}_R + \hat{a}_R^{\dagger} \hat{a}_L}{2} \right) = -J \left(\frac{\hat{a}_L^{\dagger} \hat{a}_R + \hat{a}_R^{\dagger} \hat{a}_L}{2} \right)$$
(1.14)
$$J = \varepsilon_A - \varepsilon_S \quad \text{Energia di tuneling}$$

Ora andiamo ad introdurre il termine di interazione nella nostra hamiltoniana. Per farlo riprendiamo la definizione vista nel paragrafo 1.1:

$$\hat{H}_{int} = \frac{1}{2}g \int d^3 \vec{r} \hat{\psi}^{\dagger}(\vec{r}) \hat{\psi}^{\dagger}(\vec{r}) \hat{\psi}(\vec{r}) \hat{\psi}(\vec{r})$$
(1.15)

dove:

$$\hat{\psi}(\vec{r}) = \psi_R(\vec{r})\hat{a}_R + \psi_L(\vec{r})\hat{a}_L$$

Se sostituiamo l'operatore di campo all'interno dell'hamiltoniana di interazione dopo una serie di passaggi:

$$\hat{H}_{int} = \frac{1}{2}g\left(\hat{a}_{R}^{\dagger}\hat{a}_{R}^{\dagger}\hat{a}_{R}\hat{a}_{R}|\psi_{R}(\vec{r})|^{4} + \hat{a}_{L}^{\dagger}\hat{a}_{L}^{\dagger}\hat{a}_{L}\hat{a}_{L}|\psi_{L}(\vec{r})|^{4} + \cdots\right)$$
(1.16)

i restanti termini che non sono scritti nella formula precedente sono trascurabili in quanto sono nella forma:

$$\hat{a}_{i}^{\dagger}\hat{a}_{j}^{\dagger}\hat{a}_{k}\hat{a}_{l}\int\psi_{i}^{*}(\vec{r})\psi_{j}^{*}(\vec{r})\psi_{k}(\vec{r})\psi_{l}(\vec{r}) \qquad i,j,l,k=L,R \quad j \neq k$$

Se la barriera è abbastanza alta da definire gli stati $L \in R$ ben localizzati e separati, la funzione d'onda è trascurabile nella regione occupata dalla barriera (ovvero è bassa la probabilità di trovare particelle nella barriera), quando integro su tutto lo spazio ho $\int \psi_i^*(\vec{r})\psi_j^*(\vec{r})\psi_k(\vec{r})\psi_l(\vec{r}) \simeq 0.$

Quindi l'hamiltoniana completa ha la seguente forma:

$$\hat{H} = -J\frac{\hat{a}_{L}^{\dagger}\hat{a}_{R} + \hat{a}_{R}^{\dagger}\hat{a}_{L}}{2} + \frac{U}{2}\left(\hat{a}_{R}^{\dagger}\hat{a}_{R}^{\dagger}\hat{a}_{R}\hat{a}_{R} + \hat{a}_{L}^{\dagger}\hat{a}_{L}^{\dagger}\hat{a}_{L}\hat{a}_{L}\right)$$
(1.17)

Dove il primo termine è quello di *tunneling* mentre il secondo quello che deriva dall'interazione. Il termine di interazione è proporzionale al numero di coppie di interazione che si possono formare in ciascuna buca.

Adesso passiamo allo studio dell'equazione 1.17 nel limite di *mean-field*. Quindi andiamo a sostituire gli operatore di distruzione dell'equazione.

$$a_L = \sqrt{N_L} e^{i\varphi_L} \qquad a_R = \sqrt{N_R} e^{i\varphi_R}$$

Con questa sostituzione stiamo assumendo che ci sia una rottura di simmetria U(1). La simmetria U(1) implica che se andiamo a sostituire un operatore di campo con un altro operatore di campo con una fase generica aggiuntiva l'Hamiltoniana 1.5 non cambia. In altre parola la rottura avviene per la scelta di una fase ben definita in ogni modo. Stiamo assumendo di avere sia numero di atomi che fase ben fissati. Sostituendo nell'hamiltoniana 1.17:

$$H = -J\sqrt{N_L}\sqrt{N_R} \left(\frac{e^{-i(\varphi_L - \varphi_R)} + e^{i(\varphi_L - \varphi_R)}}{2}\right) + \frac{1}{2}U\left(N_R^2 + N_L^2\right)$$
(1.18)

Lo scopo adesso è scrivere l'hamiltoniana in funzione delle seguenti osservabili:

$$z = \frac{N_L - N_R}{N} \in [-1, 1] \qquad \varphi = \varphi_L - \varphi_R \tag{1.19}$$

dove z è la differenza normalizzata fra il numero di atomi nelle due buche (*imbalance*) e φ è la differenza di fase nelle due buche.

Con un po' di algebra è possibile scrivere:

$$z^{2} = \frac{N_{L}^{2} + N_{R}^{2} - 2N_{L}N_{R}}{N^{2}} = \frac{(N_{L}^{2} + N_{R}^{2} + 2N_{L}N_{R}) - 4N_{L}N_{R}}{N^{2}} = \frac{(N_{R} + N_{L})^{2} - 4N_{L}N_{R}}{N^{2}} = 1 - 4\frac{N_{L}N_{R}}{N^{2}}$$
$$\sqrt{1 - z^{2}} = 2\frac{\sqrt{N_{L}N_{R}}}{N}$$

inoltre:

$$\frac{e^{-i(\varphi_L - \varphi_R)} + e^{i(\varphi_L - \varphi_R)}}{2} = \cos \varphi$$

Per quanto riguarda il secondo termine dell'equazione 1.18, di interazione, possiamo aggiungere un termine costante come segue lasciando invariata l'hamiltoniana:

$$\frac{1}{2}U\left(N_{R}^{2}+N_{L}^{2}\right)-\frac{1}{2}UN^{2}$$

il termine aggiuntivo è costante essendo costante il numero totale di atomi, facendo un po' di algebra otteniamo:

$$\frac{1}{2}U\left(N_R^2 + N_L^2\right) - \frac{1}{2}U(N_L^2 + N_R^2 + 2N_RN_L) = -UN_LN_R = -U\frac{N^2}{4}(1-z^2)$$

da cui possiamo rimuovere il termine costante in analogia a quanto fatto in precedenza lasciando invariante l'hamiltoniana.

Operando tutte le sostituzioni otteniamo la seguente hamiltoniana efficace:

$$H_{eff} = N^2 U \frac{z^2}{4} - J \frac{N}{2} \sqrt{1 - z^2} \cos(\varphi)$$
(1.20)

Questa può essere ulteriormente semplificata operando una moltiplicazione per un fattore $\frac{2}{N}$ che nuovamente la lascia invariata:

$$H_{eff} = \frac{NU \frac{z^2}{4}}{\frac{1}{Interazione}} - J\sqrt{1-z^2} \cos(\varphi)$$
(1.21)

Otteniamo la così detta equazione di Josephson [7].

Si nota immediatamente che il termine di interazione dipende dal l'*imbalance* tra N_R e N_L . Quando tutti gli atomi sono in una delle due buche il termine di interazione è massimo se U > 0, minimo se U < 0.

Studiamo i limiti dell'equazione 1.21:

- $z = 0 \rightarrow N_L = N_R$ in questo caso abbiamo energia minima per $cos(\varphi) = 1$ ($\varphi = 0$), quindi per lo stato simmetrico.
- $z = 0 \rightarrow N_L = N_R$ in questo caso abbiamo energia massima avendo $cos(\varphi) = -1 (\varphi = \pi)$, quindi per lo stato antisimmetrico.

L'equazione di Josephson 1.21 descrive il moto di due BEC (o superfluidi) accoppiati da una barriera di potenziale.

1.2.1 Bose-Hubbard Model

La trattazione che abbiamo visto fino ad ora parte dall'ipotesi che l'interazione non modifichi le autofunzioni del nostro condensato in modo rilevante. Ora invece siamo interessati a trovare le soluzioni per il nostro sistema senza trascurare le modifiche alla funzione d'onda dovute alle interazione. Per fare questo abbiamo bisogno dell'utilizzo della Gross-Pitaevskii, con la quale potremo calcolare le funzioni d'onda simmetriche e anti-simmetriche che utilizzeremo per i parametri della nostra hamiltoniana.

Partiamo dal definire la funzione d'onda come sovrapposizione di due modi (*Two-Mode Approximation*), excited e ground:

$$\hat{\Psi}(r) = \hat{a}_g \psi_g(r) + \hat{a}_e \psi_e(r) \tag{1.22}$$

Prendiamo ora l'equazione della hamiltoniana a molti-corpi (equazione 1.1) e si va a sostituire le funzioni d'onda nella base degli operatori right e left della doppia buca.

$$\hat{\Psi}(r) = \frac{\psi_g(r) + \psi_e(r)}{\sqrt{2}} \hat{a}_l + \frac{\psi_g(r) - \psi_e(r)}{\sqrt{2}} \hat{a}_r$$
(1.23)

Quindi mediante una serie di passaggi[8] siamo in grado di poter scrivere l'hamiltoniana:

$$\hat{H}_{2M} = \frac{E_c}{8} \left(\hat{a}_l^{\dagger} \hat{a}_l - \hat{a}_r^{\dagger} \hat{a}_r \right)^2 - \frac{E_J}{N} \left(\hat{a}_l^{\dagger} \hat{a}_r + \hat{a}_r^{\dagger} \hat{a}_l \right) + \delta E \left(\hat{a}_l^{\dagger} \hat{a}_r + \hat{a}_r^{\dagger} \hat{a}_l \right)^2$$
(1.24)

dove definisco:

$$E_{c} = 8K_{e,g}$$

$$E_{j} = \frac{N(\mu_{e} - \mu_{g})}{2} - \frac{N(N+1)}{2} (K_{e,e} - K_{g,g})$$

$$\delta E = \frac{K_{e,e} + K_{g,g} - 2K_{g,e}}{4}$$

$$con \quad K_{i,j} = \frac{g}{2} \int dr |\psi_{i}|^{2} |\psi_{j}|^{2} \qquad i, j = e, g$$
(1.25)

Dove μ_e e μ_g sono gli autovalori dello stato antisimmetrico (*Excited*) e di quello simmetrico (*Ground*) per un sistema di N particelle interagenti, ottenute della equazione stazionaria di Gross-Pitaevskii (equazione 1.8). Sempre grazie alle GPE ricaviamo le funzioni d'onda ψ_e e ψ_g , che saranno diverse da quelle che ottenevamo nel paragrafo precedente essendo ricavate da un'equazione dove è presente il termine di interazione.

Nelle equazioni 1.25, E_j corrisponde al termine che tiene conto del *tunneling* tra un sito e l'altro della doppia buca. E_c è il termine proporzionale all'interazione locale dei singoli siti. δE è il termine che tiene conto dei processi a due particelle tipo il *tunneling* a due. In molti esperimenti è possibile trascurare completamente il termine δE , in questi casi possiamo scrivere l'hamiltioniana nell'approssimazione a due modi:

$$H_{2M} = \frac{E_c}{2}\hat{n}^2 - E_j\hat{\alpha}_+$$
(1.26)

 con

$$\hat{n} = \frac{(\hat{a}_l^{\dagger} \hat{a}_l - \hat{a}_r^{\dagger} \hat{a}_r)}{2} \qquad \hat{\alpha}_+ = \frac{(\hat{a}_r^{\dagger} \hat{a}_l + \hat{a}_l^{\dagger} \hat{a}_r)}{N}$$
(1.27)

dove N è il numero di atomi. In questa scrittura \hat{n} rappresenta l'operatore differenza numero di atomi nei modi della doppia buca (*population imbalance*) e $\hat{\alpha}_+$ l'operatore di *tunneling*.

Possiamo fare una analogia tra l'equazione 1.20 e la 1.26. Facendo il confronto si nota che:

$$U = \frac{E_c}{2} \qquad J = 2\frac{E_J}{N} \tag{1.28}$$

queste uguaglianze si trovano utilizzando il rapporto che c'è tra n e z, facendo attenzione che n noi lo abbiamo definito come operatore al contrario di z. Ricordando le definizioni e n (equazione 1.27) e z (equazione 1.19) otteniamo che:

$$n = \frac{zN}{2} \tag{1.29}$$

Ora andiamo a valutare lo spettro energetico di questo sistema.

Spettro energetico dell'hamiltoniana di Bose-Hubbard

Per calcolare lo spettro energetico dell'hamiltoniana di Bose-Hubbard mi pongo nella base degli stati di Fock:

$$\Psi = \sum_{n} c_n |n\rangle \qquad |n\rangle = \left|\frac{N}{2} + n\right\rangle \left|\frac{N}{2} - n\right\rangle \tag{1.30}$$

dove n è *population imbalance* dove $n \in \left[-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}\right]$. Ora applichiamo il nostro stato all'hamiltoniana:

$$\hat{H}\sum_{n} c_{n} |n\rangle = \sum_{n} \left(\frac{E_{c}}{2}c_{n}n^{2} - \frac{E_{J}}{N}\left[c_{n-1}\sqrt{\left(\frac{N}{2} + n\right)\left(\frac{N}{2} - n + 1\right)} + \dots \right] + c_{n+1}\sqrt{\left(\frac{N}{2} - n\right)\left(\frac{N}{2} + n + 1\right)} |n\rangle$$

$$(1.31)$$

Nelle simulazioni che vedremo più avanti nei capitoli sono andato a risolvere questa equazione in modo numerico così da ottenere gli autovalori con le rispettive autofunzioni.

Possiamo comunque trovare una soluzione analitica dell'equazione in [12]. Quello che si può vedere è che le soluzioni analitiche hanno la stessa forma di quelli di un potenziale armonico, con la frequenza corrispondente nota come "Frequenza di Plasma":

$$\omega_p = \frac{1}{\hbar} \sqrt{E_J \left(E_c + \frac{4E_J}{N^2} \right)} \tag{1.32}$$

questa frequenza può essere pensata come la frequenza caratteristica del nostro sistema.

Ora siamo in grado di poter scrivere lo stato fondamentale nella base dell'operatore numero (n), ma soprattutto le sue fluttuazioni quadratiche medie della variabile n:

$$\Delta n = \frac{\sqrt{N}}{2} \left(\frac{E_J}{N^2 E_c / 4 + E_J} \right)^{(1/4)}$$
(1.33)

Una cosa molto interessante da notare è che al variare dell'interazione questo termine si modifica. Prendiamo per esempio una interazione repulsiva $E_c \leq 0$:

- $E_c = 0$ in questo caso $\Delta n_{SN} = \frac{\sqrt{N}}{2}$ che altro non è che lo *shot noise*, cioè la precisione massima che possiamo ottenere con un sistema senza utilizzare stati *entangled*.
- $E_c \neq 0$ viceversa in questo caso la presenza del termine di interazione porta una riduzione della Δn perché il fattore che si trova a moltiplicare è minore di 1.

Quindi attraverso l'interazione riusciamo a diminuire le fluttuazioni di numero di atomi e andando al di sotto dello *shot noise* (teoricamente), mediante la generazione di uno stato *squeezed*. Quindi possiamo andare a definire il fattore di *squeezing*:

$$\xi_N = \frac{\Delta n}{\Delta n_{SN}} = \frac{\Delta n}{\sqrt{N/2}} = \left(\frac{E_J}{N^2 E_c/4 + E_J}\right)^{(1/4)} \tag{1.34}$$

L'indeterminazione sulla fase in presenza di interazione viene moltiplicata per un fattore pari a $1/\xi_N$. Di conseguenza abbiamo un aumento delle fluttuazioni, ma questo si può comprendere ricordando la relazione che lega l'indeterminaizone di fase e di numero:

$$\Delta \varphi \Delta n \ge \frac{1}{2} \tag{1.35}$$

Quindi se riduco le fluttuazioni sul numero per mantenere la relazione quelle sulla fase devono aumentare.

1.3 Teoria dei fit

In questa sezione analizzeremo la teoria del Fit ellittico. Questo tipo di fit non è semplice da effettuare non essendo l'ellissi una funzione univoca. Per fare fit ellittici

si va ad usare il metodo dei minimi quadrati [14]. Il metodo dei minimi quadrati (*The Least Squares Method*) è una tecnica di ottimizzazione (o regressione) che permette di trovare una funzione, rappresentata da una curva ottimale, che si avvicini il più possibile all'insieme di dati. In particolare si va a minimizzare la distanza tra i dati e una generica funzione ellittica.

1.3.1 Il metodo dei minimi quadrati

Prendiamo n dati x_i distribuito normalmente attorno ad un valore x_{vero} (*Gauss distribution*) [14], dove sono note le varianze σ_i . Definiamo il parametro χ nel seguente modo:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \hat{\mu})^2}{\sigma_i^2} \tag{1.36}$$

dove $\hat{\mu}$ è il miglior estimatore. L'obbiettivo del metodo è trovare il migliore estimatore che minimizza χ .

Per minimizzare χ ne faccio la derivata e la pongo uguale a zero:

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial \mu}\Big|_{\mu=\hat{\mu}} = -2\sum_{i=1}^n \frac{x_i - \hat{\mu}}{\sigma_i^2} = 0 \Rightarrow \hat{\mu} = \frac{\sum \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum \frac{1}{\sigma_i^2}}$$
(1.37)

Conoscendo l'andamento dell'estimatore in funzione dei dati posso ricavare la matrice di covarianza dell'estimatore $\hat{\mu}$. Nell'ipotesi di misure indipendenti, quindi la matrice $V[x]_{i,j} = \sigma_i^2 \delta_{i,j}$ è diagonale:

$$V[\hat{\mu}] = \sum_{i} \left(\frac{\partial \mu}{\partial x_i}\right)^2 V[x]_{i,j} = \left(\sum_{i} \frac{1}{\frac{1}{\sigma_i^2}}\right)^2 \sum_{i} \frac{V[x]_{i,j}}{\sigma_i^4} = \frac{1}{\sum_{i} \frac{1}{\sigma_i^2}}$$
(1.38)

Caso Lineare

Prendiamo un modello y(x) lineare nelle variabili θ , dove ipotizziamo che le x siano note in modo esatto:

$$y(x) = \theta_1 h_1(x) + \theta_2 h_2(x) + \dots + \theta_j h_j(x)$$
 (1.39)

dove j = 1, ..., k e h_i funzioni di x note. In questo caso y è un modello lineare nei parametri θ non nelle variabili x.

Ora prendiamo il caso di n misure (x_i, y_i) e assumiamo che possano essere descritte nella seguente forma:

$$y_i = y(x_i) + \epsilon_i = \sum_{j=1}^k \theta_j h_j(x_i) + \epsilon_i$$
(1.40)

dove $y_i \in x_i$ con i = 1, ..., n sono i punti, θ_j con j = 1, ..., k sono i parametri, e ϵ_i è il residuo (distanza dalla curva vera). Come vedremo successivamente sarà possibile svolgere il medesimo ragionamento per un *fit* ellittico.

Ho bisogno del migliore estimatore dei parametri per trovare la curva che meglio replica i miei dati. Uso quindi il metodo dei minimi quadrati, e definisco:

$$\chi^{2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\epsilon_{i}^{2}}{\sigma_{i}^{2}} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{y_{i} - y(x_{i})}{\sigma_{i}} \right)^{2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_{i}^{2}} \left(y_{i} - \sum_{j=1}^{k} \theta_{j} h_{j}(x_{i}) \right)^{2}$$
(1.41)

Svolgere i conti partendo dall'equazione 1.41 non è banale. Per semplificare la matematica andiamo a scrivere l'equazione 1.40 nella forma matriciale attraverso alcuni semplici passaggi [14]:

$$\vec{y} = \mathbf{H}\vec{\theta} + \vec{\epsilon} \tag{1.42}$$

dove:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_1(x_1) & h_2(x_1) & \dots & h_k(x_1) \\ h_1(x_2) & h_2(x_2) & \dots & h_k(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_1(x_n) & h_2(x_n) & \dots & h_k(x_n) \end{bmatrix}$$
(1.43)

e $\vec{\theta}$ è il vettore dei parametri, $\vec{\epsilon}$ quello dei residui e \vec{y} il vettore dei punti.

Possiamo andare a scrivere la matrice di covarianza delle \vec{y} , ipotizzando misure indipendenti, sarà composta dalle σ_i^2 disposte sulla diagonale

$$\mathbf{V}[y] = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} = \mathbf{V}$$
(1.44)

che in questa trattazione, per non appesantire le formule la chiamerò V. Posso andare a scrivere χ^2 :

$$\chi^{2} = \vec{\epsilon}^{T} \mathbf{V}^{-1} \vec{\epsilon} = \left(\vec{y} - \mathbf{H} \vec{\theta} \right)^{T} \mathbf{V}^{-1} \left(\vec{y} - \mathbf{H} \vec{\theta} \right)$$
(1.45)

Per trovare il miglior estimatore dei parametri andiamo a minimizzare il χ^2 , per farlo andremo a porre a zero la derivata parziale rispetto ai parametri:

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial \vec{\theta}} = -2\mathbf{H}^T \mathbf{V}^{-1} \left(\vec{y} - \mathbf{H} \vec{\theta} \right) = 0$$
(1.46)

Risolvendo con un po di algebra, posso andare a scrivere direttamente la forma del miglior estimatore (Capitolo 8 pagina 147 [14]):

$$\widehat{\vec{\theta}} = \left(\mathbf{H}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{H}\right)^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{V}^{-1} \vec{y}$$
(1.47)

CAPITOLO 1. TEORIA BASE

Dalla conoscenza della relazione che lega $\vec{y} \in \hat{\vec{\theta}}$, posso andare a definire la matrice di covarianza dei parametri applicando semplicemente una trasformazione:

$$\mathbf{V}\left[\widehat{\vec{\theta}}\right] = \left[\left(\mathbf{H}^{T}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^{T}\mathbf{V}^{-1}\right]\mathbf{V}\left[\left(\mathbf{H}^{T}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^{T}\mathbf{V}^{-1}\right]^{T}$$
(1.48)

Essendo V una matrice simmetrica possiamo semplificare l'equazione 1.48 e ricordando la 1.44:

$$\mathbf{V}\left[\widehat{\vec{\theta}}\right] = \left(\mathbf{H}^T \mathbf{V}^{-1}[y]\mathbf{H}\right)^{-1}$$
(1.49)

Se la matrice di covarianza non è nota completamente (nota la forma ma non i pesi) è possibile pensare di conoscerla a meno di una costante σ_0^2 :

$$\mathbf{V}[y] = \sigma_0^2 \mathbf{W} \tag{1.50}$$

dove \mathbf{W} altro non è che la forma della matrice di covarianza a meno del peso. Per fare un esempio consideriamo delle misure indipendenti, caratterizzate dalla stessa incertezza, \mathbf{W} non sarebbe altro che una la matrice densità. In ogni caso \mathbf{W} è una matrice nota che dipende dalle ipotesi fatte sugli errori delle variabili.

Quindi posso andare a definire χ^2 , valutato con $\vec{\theta} = \vec{\theta}$ (cioè con i parametri migliori) sostituendo la 1.50 nella 1.45:

$$\chi^2 \sigma_0^2 = \left(\vec{y} - \mathbf{H}\hat{\vec{\theta}}\right)^T \mathbf{W}^{-1} \left(\vec{y} - \mathbf{H}\hat{\vec{\theta}}\right) \stackrel{Def}{=} Q_{min}^2 \tag{1.51}$$

Ricordo l'estimatore di χ^2 è uguale a n - k (capitolo 3 pagina 51 [14]), che sono i suoi gradi di libertà, n sono il numero di dati e k il numero dei parametri da stimare.

$$E\left[\sigma_0^2 \chi^2\right] = \sigma_0^2 (n-k)$$

$$\sigma_0^2 = \frac{Q_{min}^2}{n-k}$$
(1.52)

Questo metodo si basa sull'assumere l'andamento di W (ipotizzando delle condizioni a contorno o dei *constrain*) così da poter ricavare σ_0^2 e calcolare la matrice di covarianza con la formula 1.50. Di conseguenza ricavare $\mathbf{V}\begin{bmatrix} \hat{\vec{\theta}} \end{bmatrix}$ dall'equazione 1.49, senza che sia nota in modo completo la matrice di covarianza $\mathbf{V}[y]$.

1.3.2 Fit Ellittico

Come abbiamo detto l'ellissi non è una funzione univoca per cui l'equazione che la descrive è una equazione non lineare.

$$F(\vec{x}, \vec{c}) = c_{xx}x^2 + c_{yy}y^2 + c_{xy}xy + c_xx + c_yy - 1$$
(1.53)

dove le \vec{c} è il vettore dei parametri dell'ellissi $\vec{c} = [c_{xx} c_{yy} c_{xy} c_x c_y]^T$ e \vec{x} è il vettore delle nostre osservabili $\vec{x} = [x^2 y^2 xy x y]^T$.

Dalla tecnica dei minimi quadrati vista precedentemente, per ricavare il miglior estimatore dei parametri si utilizzava un modello matematico lineare nei parametri come l'equazione 1.40. Il problema è che l'equazione ellittica non è lineare e non possiamo seguire la medesima tecnica perché non è così banale definire la distanza tra il modello e i dati (cioè il residuo).

Prendiamo n punti, per ottenere i migliori parametri bisogna andare a minimizzare il $\chi^2 \cos^3 da$ ottenere l'ellisse che si avvicina maggiormente ai miei dati. Nel caso lineare 1.40, avevamo le nostre osservabili x_i, y_i e potevamo definire il residuo $y_i - y(x_i)$ dove $y(x_i)$ è il modello per il *fit*. Con il metodo dei minimi quadrati si va a minimizzare il residuo. Nel caso di una ellissi il nostro modello è 1.53 ma non posso calcolare il residuo facilmente come per il caso lineare perché non posso trovare un modello che descriva in maniera univoca la dipendenza che c'è tra y_i e x_i . Quindi abbiamo bisogno di un'altra definizione di distanza.

Facciamo un esempio. Ipotizziamo di conoscere i migliori parametri (\hat{c}) . Il concetto migliore di distanza tra i dati e il modello sarebbe la distanza euclidea, cioè il segmento che collega il punto in modo perpendicolare all'ellisse (il residuo r), vedi figura 1.2.



Figura 1.2: Nell'immagine vengono riportate la rappresentazione grafica dei termini introdotte nell'equazione 1.56, come si vede in rosso \vec{x} in verde \hat{x} e la linea nera r.

Se non conoscessi i parametri migliori io starei valutando la distanza dei miei punti rispetto ad un generica ellisse che non è quella corretta. Quindi per trovare l'ellissi corretta dovremmo valutare tutti i possibili residui di tutte le possibili ellissi per trovare quella con il residuo minore.

Per eseguire questo *fit* andiamo ad utilizzare un tecnica detta di correzione (adeguamento) conosciuta come "adjustment of indirect observations"[16] (anche chiamata parametric least squares). Questa tecnica è un caso particolare del modello di correzione chiamato "Combined Least Squares"[17].La tecnica si basa sulla stima dei migliori parametri in modo indiretto.

Possiamo pensare di scrivere i nostri migliori parametri (\hat{c}) come:

$$\hat{c} = \vec{c} + \vec{\delta c} \tag{1.54}$$

dove \vec{c} altro non è che i nostri parametri iniziali, e $\vec{\delta c}$ le correzioni cioè la distanza tra \vec{c} e \hat{c} .

Il metodo si basa sul trovare $\delta \vec{c}$, andando a minimizzare il χ^2 . Una volta trovato $\delta \vec{c}$ andiamo a sommarlo a \vec{c} che diventerà il nuovo parametro iniziale, con cui andremo a ricalcolare $\delta \vec{c}$ in un processo iterativo fino a che $\delta \vec{c} \sim 0$, così da avere $\vec{c} = \hat{c}$. Questa tecnica ci permette anche di ricavare la matrice di covarianza dei nostri parametri. Vediamo ora come scrivere un'equazione lineare per poter andare a ricavarci $\delta \vec{c}$. Partiamo dalla definizione del nostro modello matematico non lineare con n osservabili x e k parametri c:

$$F(\hat{x},\hat{c}) = 0$$
 (1.55)

dove $\hat{x} \in \hat{c}$ corrispondono ai migliori estimatori che si ricaverebbero dal processo dei minimi quadrati.

$$\hat{x} = \vec{x} + \vec{r} \qquad \hat{c} = \vec{c} + \delta \hat{c} \tag{1.56}$$

dove \vec{r} è definito il residuo dei dati, e $\vec{\delta c}$, che abbiamo gà incontrato, è il vettore delle correzioni. Come abbiamo detto gli \hat{x} sono i punti che si trovano sull'ellisse, cioè corrisponde ai punti in assenza di rumore.

Possiamo definire le matrici di covarianza, come abbiamo fatto nell'equazione 1.50, scrivendo le matrici a meno di una costante:

$$\mathbf{V}_x = \sigma_{0x}^2 \mathbf{W}_x$$

$$\mathbf{V}_c = \sigma_{0c}^2 \mathbf{W}_c$$
 (1.57)

Dove le W sono solamente la forma della matrice di covarianza a meno del peso. Possiamo ora linearizzare l'equazione 1.55 usando il teorema di Taylor e andando a ignorare il secondo ordine dello sviluppo e i termine di ordine superiore.

$$\mathbf{F}(\hat{x},\hat{c}) - \mathbf{F}(\vec{x},\vec{c}) = \left. \frac{\mathrm{d}\mathbf{F}}{\mathrm{d}\hat{x}} \right|_{\vec{x},\vec{c}} (\hat{x}-\vec{x}) + \left. \frac{\mathrm{d}\mathbf{F}}{\mathrm{d}\hat{c}} \right|_{\vec{x},\vec{c}} (\hat{c}-\vec{c})$$
(1.58)

Dalla definizione della nostra funzione sappiamo che $\mathbf{F}(\hat{x}, \hat{c}) = 0$ quindi l'equazione 1.58 diventa:

$$-\mathbf{F}(\vec{x}, \vec{c}) = \frac{d\mathbf{F}}{d\hat{x}} \Big|_{\substack{\vec{x}, \vec{c} \\ (1)}} (\hat{x} - \vec{x}) + \frac{d\mathbf{F}}{d\hat{c}} \Big|_{\substack{\vec{x}, \vec{c} \\ (2)}} (\hat{c} - \vec{c})$$
(1.59)

Utilizzando le uguaglianze 1.56 posso scrivere il sistema in forma matriciale dell'equazione 1.59:

$$-\mathbf{F} = \mathbf{B}\vec{r} + \mathbf{A}\vec{\delta c} \tag{1.60}$$

dove vengono definiti:

$$\mathbf{A}_{mxk} = \left. \frac{\mathrm{d}\mathbf{F}}{\mathrm{d}\hat{c}} \right|_{\vec{x},\vec{c}} \qquad \mathbf{B}_{mxn} = \left. \frac{\mathrm{d}\mathbf{F}}{\mathrm{d}\hat{x}} \right|_{\vec{x},\vec{c}} \tag{1.61}$$

m rappresenta il numero di equazioni che useremo per stimare i parametri dagli osservabili. Invece \mathbf{F} contiene m termini numerici calcolati tramite il modello funzionale utilizzando $\vec{x} \in \vec{c}$.

Nel nostro caso corrisponde alla funzione di una ellissi generica per ogni singolo set di punti (i = 1, .., k).

$$F_i = c_{xx}x_i^2 + c_{yy}y_i^2 + c_{xy}x_iy_i + c_xx_i + c_yy_i - 1$$
(1.62)

Ora andiamo a scrivere in modo esplicito tutti i termini:

$$\mathbf{A}_{mxk} = \begin{bmatrix} x_1^2 & y_1^2 & x_1y_1 & x_1 & y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_k^2 & y_k^2 & x_ky_k & x_k & y_k \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{B}_{mxn} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \Big|^0 & \frac{\partial F_1}{\partial y_1} \Big|^0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \frac{\partial F_k}{\partial x_k} \Big|^0 & \frac{\partial F_k}{\partial x_k} \Big|^0 \end{bmatrix}$$
$$\frac{\partial F_i}{\partial x_i} = 2c_{xx}x_i + c_{xy}y_i + c_x \qquad \vec{f} = \begin{bmatrix} -F_1^0 \\ -F_2^0 \\ \vdots \\ -F_k^0 \end{bmatrix}$$

quindi posso scrivere:

$$\mathbf{B}\vec{r} + \mathbf{A}\vec{\delta c} = \vec{f} \tag{1.63}$$

Ora andiamo a risolvere l'equazione 1.63 utilizzando il metodo dei minimi quadrati, cioè minimizzando il χ^2 . Per minimizzare il χ^2 è sufficiente andare a minimizzare la funzione scalare [17]:

$$\phi = \vec{r}^T \mathbf{W}_x^{-1} \vec{r} + \vec{\delta c}^T \mathbf{W}_c^{-1} \vec{\delta c} - 2\vec{k}^T \left(\mathbf{B}\vec{r} + \mathbf{A}\vec{\delta c} - \vec{f} \right)$$
(1.64)

dove il primo termine rappresenta la somma dei quadrati delle distanze tra \vec{x} e \hat{x} cioè il residuo, il secondo termine la somma quadrata delle correzione dei parametri e i k sono i moltiplicatori di Lagrange. Imponiamo, mediante i moltiplicatori di Lagrange,

che \hat{x} stia sull'ellisse di parametri \hat{c} che corrisponderà all'ellissi per cui il residuo è minimo.

Ora per minimizzare ϕ andiamo a derivare

$$\frac{\partial \phi}{\partial \vec{v}} = 2\vec{r}^T \mathbf{W}_x^{-1} - 2\vec{k}^T \mathbf{A}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \vec{\delta c}} = 2\vec{\delta c}^T \mathbf{W}_c^{-1} - 2\vec{k}^T \mathbf{B}$$
(1.65)

andando a risolvere queste equazioni mediante algebra matriciale (base di algebra matriciale capitolo 11 [16]) riusciamo ad ottenere $\vec{r} \in \vec{\delta c}$. In questa tesi non eseguiremo tutti i passaggi che si possono trovare in [17].

Quindi possiamo andare a scrivere le soluzioni:

$$\vec{\delta c} = \left(\mathbf{A}^T \left(\mathbf{B} \mathbf{V}_x^{-1} \mathbf{B}^T\right) \mathbf{A}\right)^{-1} \mathbf{A}^T \left(\mathbf{B} \mathbf{V}_x^{-1} \mathbf{B}^T\right) \vec{f}$$
(1.66)

$$\vec{r} = \mathbf{V}_x^{-1} \mathbf{B}^T \left(\mathbf{B} \mathbf{V}_x^{-1} \mathbf{B}^T \right)^{-1} \left(\vec{f} - \mathbf{A} \vec{\delta c} \right)$$
(1.67)

E possiamo ricavare σ_0^2 :

$$\sigma_{0x}^2 = \frac{r^T \mathbf{V}_x^{-1} r}{n-k} \tag{1.68}$$

dove n - k rappresentano i gradi di libertà, in questo modo dalla definizione dell'equazione 1.57 ricaviamo la matrice di covarianza. In questa soluzione non appare $\vec{\delta c}$ perché questo termine con il processo di iterazione è stato annullato.

Possiamo fare delle ipotesi sulla forma della matrice \mathbf{V}_x , se le coordinate vengono assunte non correlate, allora \mathbf{V}_x sarà una matrice diagonale. Nei capitoli successivi dovremo definire \mathbf{V}_x in modo opportuno da tenere conto della diversa sensibilità dei parametri x al rumore in funzione della posizione dei medesimi parametri.

Dai conti visti sopra possiamo calcolare la matrice di covarianza dei parametri c (General Ellipse):

$$c = \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{yy} & c_{xy} & c_{x} & c_{y} \end{bmatrix}^{T}$$
(1.69)

nel seguente modo:

$$\mathbf{V}_{c} = \sigma_{0}^{2} \left[\mathbf{A}^{T} \left(\mathbf{B} \mathbf{V}_{x}^{-1} \mathbf{B}^{T} \right) \mathbf{A} \right]^{-1}$$
(1.70)

Nel nostro caso siamo interessati a calcolare la matrice di covarianza per i parametri S (*Shifted Ellipse*):

$$S = \begin{bmatrix} t_x & t_y & a_x & a_y & \theta \end{bmatrix}^T$$
(1.71)

dove t_x e t_y sono i centri dell'ellissi, a_x e a_y sono i semiassi e θ è l'inclinazione dell'ellissi. Questo si può fare conoscendo la formula che lega i parametri c con quelli S [15]. E usando lo Jacobiano possiamo passare dalla matrice di covarianza per i parametri C a quella S:

$$\mathbf{V}_s = J_{5x5} \mathbf{V}_c J_{5x5}^T \tag{1.72}$$

così con questo metodo riusciamo ad ottenere il miglior estimatore dei parametri e insieme la sua matrice di covarianza così da poter associare un errore al nostro *fit*.

Capitolo 2

Set Up Sperimentale

Nella prima sezione vado a descrivere il set up sperimentale utilizzato per la realizzazione del condensato di Bose-Einstein di ${}^{39}K$. Nella seconda sezione analizzo una delle caratteristiche fondamentali di quanto isotopo, cioè la possibilità di modificare l'interazione tra gli atomi attraverso campi magnetici. Infine espongo la tecnica di *imaging* usata per osservare gli atomi.

2.1 Generation of BEC

Tutte le misure sperimentali in questa tesi sono state svolte su un condensato di Bose Einstein di ${}^{39}K$. Una particolarità del nostro sistema è la presenza di tre differenti camere con diversi livelli di vuoto dove vengono eseguite diverse fasi di raffreddamento [18, 19].

Inizialmente una nube di atomi termici di ${}^{39}K$ viene prodotta a partire da un campione atomico solido riscaldato a 80° C. Parte di questi atomi vengono catturati dalla 2D-MOT (*2D Magnetic Optical Trap*) e raffreddati lungo due direzioni. Si genera così un fascio di atomi lungo la terza diretto verso una 3D-MOT (*3D Magnetic Optical Trap*) che cattura gli atomi e li raffredda a temperature sub-doppler, di circa 20 μ K.

Infine gli atomi vengono trasportati nell'ultima camera a vuoto (*Science chamber*), attraverso una trappola magnetica di quadrupolo posizionata su di un traslatore.

La procedura di raffreddamento evaporativo ha delle limitazioni dovute alle proprietà collisionali del ³⁹K. Qui è possibile svolgere la fase finale di raffreddamento evaporativo, la tecnica si basa sulla perdita selettiva degli atomi più energetici e una successiva ritermalizzazione mediante le collisioni, avendo il ³⁹K una lunghezza di *scattering* di *background* negativa, esiste per le basse energie un valore minimo della sezione d'urto, detto minimo di Ramsauer-Townsend, raggiunto il quale il sistema smette di termalizzare. Il problema viene risolto andando a modificare la lunghezza di *scattering* in onda s del ³⁹K attraverso le risonanze magnetiche di Fashback, applicando un opportuno campo magnetico mediante una coppia di bobine in configurazione Helmotz [20, 21].



Figura 2.1: Nell'immagine mostriamo la disposizione dei fasci Radiale e IPG sugli atomi, vista dall'alto.

Il raffreddamento evaporativo viene realizzato caricando gli atomi in una trappola di dipolo ottenuta incrociando due fasci molto focalizzati con lunghezza d'onda pari a 1064 nm, il primo detto "Radiale" che è generato da una sorgente laser Mephisto MOPA (*Coherent*) che si propaga lungo la direzione x della cella, vedi figura 2.1. Il secondo generato usando un laser in fibra della IPG photonics modello YLR-100-LP-AC, che si propaga orizzontalmente con un angolo di $\pi/4$ rispetto al radiale, vedi figura 2.1. Al termine dell'evaporazione si ottiene un condensato di Bose-Einstein di circa 10⁵ atomi.

L'ultima fase è il caricamento del condensato nel potenziale di trappola che useremo per fare gli esperimenti. L'IPG viene sostituito con un fascio verticale per mantenere gli atomi in trappola, e per un'ulteriore fase di raffreddamento evaporativo. Alla fine il nostro potenziale sostituirà il verticale, ed in base alle dimensioni del condensato andremo a caricare in modo diverso il potenziale.

2.2 Interazione Variabile

Una caratteristica fondamentale del nostro esperimento è la possibilità di controllare la lunghezza di *scattering* (a_S) , cioè l'interazione.

La lunghezza di *scattering* collisionale a due copri dipende dal campo magnetico nella seguente forma:

$$a_s = a_{bg} \left(1 - \frac{\Delta B}{B - B_0} \right) \tag{2.1}$$

dove a_{bg} è la lunghezza di *scattering* di *background* che dipende dal tipo di atomo, e B_0 è il valore della risonanza.



Figura 2.2: Nella figura viene riportata la lunghezza di *scattering* a due corpi in unità di raggi di Bohr in funzione del campo magnetico in Gauss dello stato $F = 1, M_F = +1$.

Il ³⁹K ha un'ampia risonanza per lo stato $F = 1, M_F = +1$ vicino al valore $B_0 = 400$ G, come mostrato nella figura 2.2. La larghezza della risonanza è pari a $\Delta B = 50$ G e la curva passa da zero nel punto 350 G. Intorno a questo punto la pendenza è 0.6a0/G, quindi è possibile cambiare il valore della lunghezza di *scattering* molto finemente.

2.3 Sistema di Imaging



Figura 2.3: Struttura iperfine ${}^{39}K$

Per misurare la distribuzione degli atomi nel nostro potenziale a doppie buche usiamo una tecnica di *imaging* in assorbimento, dove andiamo ad illuminare la nostra nuvola atomica con un laser con lunghezza d'onda $\lambda \simeq 766.7$ nm. L'intensità del fascio che attraversa la nuvola viene raccolta grazie ad una telecamera CCD. Si eseguono due misure, la prima dell'intensità incidente I_{in} presa dall'immagine del fascio sulla telecamera in assenza di atomi, la seconda I_{out} raccolta da un'immagine del fascio in presenza di atomi, dove una parte del fascio viene assorbito dagli atomi. Tramite la legge di assorbimento di Lambert-Beer possiamo ricavare la densità del campione atomico integrata lungo la direzione di propagazione del fascio:

$$n = \frac{1}{\sigma_0} \ln \left(\frac{I_{in}}{I_{out}} \right) \tag{2.2}$$

dove σ_0 rappresenta la sezione d'urto in assorbimento della luce da parte degli atomi che si scrive:

$$\sigma_0 = \frac{3\lambda^2}{2\pi} \frac{1}{1 + \frac{I}{I_{sat}} + 4\frac{\delta^2}{\Gamma^2}}$$
(2.3)

dove $\delta = \omega - \omega_0$ è il detuning del fascio di imaging dalla risonanza atomica, e Γ è la larghezza naturale di riga della transizione atomica (vedi figura 2.3 per la linea D2 del ³⁹K $\Gamma/2\pi \approx 6MHz$). I_{sat} rappresenta l'intensità di saturazione della transizione coinvolta. Tutte le informazioni rilevanti sul campione atomico possono essere quindi dedotte guardando il suo profilo di densità spaziale.

Per rilevare gli atomi di ³⁹K, si usa una luce risonante con la transizione $F = 2 \rightarrow F' = 3$ (Luce di *cooling* figura 2.3) con polarizzazione σ^+ . Il problema è che gli atomi si trovano inizialmente nello stato $|F = 1, m_F = 1\rangle$ che non è risonante con la luce usata per fare l'immagine. Quindi abbiamo bisogno della luce di *repumper*, che è in risonanza con la transizione $F = 1 \rightarrow F' = 2$ (vedi figura 2.3), che permette agli atomi successivamente di decadere e andare a popolare lo stato F = 2, così da poter essere nuovamente in risonanza con la luce di *cooling*. Durante la sequenza i campi magnetici vengono spenti per evitare che le transizioni atomiche subiscano uno *shift* per effetto Zeeman.

Abbiamo bisogno della luce di *repumper* durante tutto la sequenza di *imaging* perché c'è una probabilità non nulla che la luce di *cooling* porti alcuni atomi nello stato F' = 2 causando la loro perdita decadendo dallo stato $F' = 2 \rightarrow F = 1$. Per non interferire con il fascio di *imaging* il fascio di *repumper* viene inviato lungo una direzione ortogonale.



Figura 2.4: Disposizione dei fasci di imaging e del reticolo sugli atomi.

La direzione dell'*imaging* in assorbimento è nel piano orizzontale della cella che contiene gli atomi, figura 2.4. L'immagine viene ottenuta utilizzando una lente (obbiettivo) a lunghezza focale corta (N.A. 0.6) e una lente di *imaging* a focale lunga con una magnificazione complessive di $M \sim 30$. L'immagine ingrandita è poi raccolta da una camera digitale Andor-Ikon-M, con un fattore di conversione micrometri-pixel di $\sim 0.4 \frac{\mu m}{pixel}$.

Capitolo 3

Potenziale Periodico Di Doppie Buche

In questo capitolo studieremo la teoria e le tecniche sperimentali usate per ottenere un potenziale periodico di doppie buche. Per realizzare questo tipo di pontenziale abbiamo dovuto implementare un super-reticolo, cioè la sovrapposizione due reticoli ottici che hanno periodicità spaziale uno la metà dell'altro [7], vedi figura 3.1.



Figura 3.1: Nell'immagine viene mostrato lo schema di un super-reticolo con i due reticoli con periodicità spaziale $(d_1 \in d_2)$ uno la metà dell'altro.

Siamo interessati a intrappolare un numero molto elevato di atomi freddi (nell'ordine delle migliaia) e questo ci impedisce l'uso di potenziali di trappola con passi reticolari troppo piccoli. Infatti così otterremo nuvole molto dense dove le collisioni a tre corpi ridurrebbe la vita del campione. Quindi occorre usare dei reticoli con periodicità spaziale molto grande, così da ottenere potenziali meno confinanti. Nel nostro caso per realizzare il super-reticolo utilizzando due reticolo, un reticolo con periodicità spaziale di 5 μ m e uno di 10 μ m. Purtroppo non disponiamo di sorgenti laser nella regione spettrale necessaria per ottenere questi reticoli mandando fasci laser retro-riflessi. In passato, per ovviare a questo problema, il potenziale periodico di doppie buche è stato realizzato attraverso l'intersezione di due fasci, vedi figura 3.2, dove la periodicità spaziale dipende dall'angolo di incidenza θ secondo l'equazione $d = \frac{\lambda}{2\sin(\theta/2)}$.



Figura 3.2: In a) viene riportato lo schema della realizzazione nel potenziale periodico di doppie buche attraverso il metodo dei fasci incrociati, b) riporto i profili spaziali dei potenziali, con le linea tratteggiate identifico i due fasci che si incrociano con la linea continua il potenziale che risentiranno gli atomi.

Il potenziale che si viene a generare in questo modo è fortemente sensibile all'angolo di incidenza, le fluttuazioni della periodicità spaziale avevano la seguente forma:

$$\Delta d = -\frac{\lambda \cos(\theta/2)}{4 \sin^2(\theta/2)} \Delta \theta \tag{3.1}$$

sono tanto più dipendenti dall'angolo quanto più questo è piccolo.

Un altro problema di tale tecnica è che il confinamento radiale dei fasci è in parte proiettato lungo la direzione dei reticoli dando origine ad un potenziale armonico aggiuntivo che crea uno sbilanciamento in energia tra i due modi della doppia buca. Questi problemi vengono risolti utilizzando un nuovo tipo di super-reticolo chiamato "*Beat-Note Super Lattice*"[5] con cui possiamo realizzare reticoli con periodicità spaziale grande utilizzando la sovrapposizione di due reticoli standard generati dalla retro-riflessione dei fasci su un singolo specchio.

Questa configurazione riduce a zero la sensibilità al primo ordine del potenziale all'angolo tra i fasci avendo ora $\theta = \pi$ (vedi equazione 3.1). Inoltre in questo modo si va a ridurre anche la presenza di potenziali armonici indotti dalle proiezioni del confinamento radiale. In questo caso è presente soltanto il contributo del confinamento longitudinale dei fasci, che è ordini di grandezza più piccolo di quello radiale. Non a caso gli interferometri in caduta libera utilizzano reticoli ottici realizzati attraverso la retro-riflessione di fasci su specchi stabilizzati. Questo fa sperare nella stabilità della nostra nuova configurazione per misure interferometriche.

3.1 Teoria

Prima di ricavare il potenziale ottico di un *array* di doppie buche introduco rapidamente la teoria del *Beat-Note Super Lattice*.

3.1.1 Beat-Note Super Lattice

Il Beat-Note Super Lattice (BNSL)[5] è un potenziale realizzato attraverso la sovrapposizione di due reticoli ottici con vettori d'onda diversi k_1, k_2 , che può quindi essere scritto nel seguente modo:

$$V(x) = V_1 \sin^2(k_1 x + \phi_1) + V_2 \sin^2(k_2 x + \phi_2)$$
(3.2)

 $k_{1,2} = \frac{2\pi}{\lambda_{1,2}}$ con $\lambda_1 < \lambda_2$ e ϕ_1, ϕ_2 sono due fasi arbitrarie. Per semplicità si ipotizza $V_1 = V_2 = V_0$ e con un po' di algebra otteniamo:

$$V(x) = V_0(1 - \cos(2(k_1 + k_2)x + \phi_1 - \phi_2)\cos((k_2 - k_1)x + \phi_1 + \phi_2)$$
(3.3)

Dall'equazione 3.3 si può vedere che il potenziale, quando $k_1 \simeq k_2$, è composto da due modulazioni, una veloce $k_+ = (k_1 + k_2)/2$ con modulazione spaziale pari a $d_+ = \pi/k_+$, e una lenta $k_- = k_1 - k_2$ con modulazione spaziale pari a $d_- = \pi/k_-$. Imponiamo ora una relazione tra i vettori d'onda:

$$(n+1)\lambda_1 = n\lambda_2$$
 $(n+1)k_2 = nk_1$ (3.4)

dove n un numero intero che descrivere il numero di oscillazioni che le onde stazionarie associate ai due reticoli k_1 e k_2 devono compiere per ritornare in fase l'una rispetto all'altra.

Queste relazioni vengono scelte per ottenere un potenziale periodico con periodicità spaziale della modulazione lenta pari a $d_-=n\lambda_2/2$, vedi equazione 3.3 .

Mettiamoci nel limite perturbativo $V_0 \ll E_{R^+}$, dove $E_{R^+} = \hbar^2 k_+^2/2m$ è l'energia di rinculo di un atomo a seguito di una assorbimento di un fotone con vettore d'onda k_+ , e poniamo le fasi nulle $\phi_1 = \phi_2 = 0$. In tale limite possiamo scrivere il nostro potenziale efficace:

$$V_{eff} = V_0 - \frac{V_0^2 \cos^2((k_2 - k_1)x)}{8E_{R^+}}$$
(3.5)

che corrisponde ad un reticolo con periodicità uguale alla modulazione lenta $d_{-} = n\lambda_2/2$. Possiamo quindi definire come vettore d'onda efficace $k_{eff} = k_2 - k_1$. Dall'equazione del potenziale efficace (eq. 3.5) possiamo ricavarci la posizione dei minimi del nostro potenziale. Come si vede i minimi si hanno quando $(k_2 - k_1)x = 0 + m\pi$, dove m è un numero intero, i minimi trovati hanno la stessa periodicità della modulazione lenta (vedi figura 3.3).

Per verificare la validità della nostra approssimazione siamo andati a risolvere l'equazione di Schrödinger per un atomo sottoposto al potenziale nella forma dell'equazione 3.2 e a quello efficace nella forma dell'equazione 3.5. I risultati sono riportati nella figura 3.3, dove siamo andati a prendere $\lambda_1 \simeq 1013$ nm e $\lambda_2 = 1064$ nm in modo da ottenere un potenziale periodico con periodicità spaziale pari a 10 μ m.



Figura 3.3: Nella figura mostriamo il profilo spaziale del potenziale BNSL e la densità di probabilità spaziale del pacchetto d'onda atomica. La simulazione è stata fatta con $V_1 = V_2 = 150$ nK, $\lambda_2 = 1064$ nm, $\lambda_1 \simeq 1013$ nm con n = 20. In blu il potenziale BNSL (eq. 3.2) e in arancione il potenziale efficace (eq. 3.5).

3.1.2 Array di Doppie Buche

Vediamo adesso come sia possibile realizzare un potenziale periodico di doppie buche usando la tecnica del BNSL. Il primo reticolo con periodicità spaziale di 10 μ m viene realizzato attraverso il BNSL tra $\lambda_1 \in \lambda_2$. Per realizzare il secondo reticolo da 5 μ m ed evitare di utilizzare due laser aggiuntivi e realizzare un nuovo BNSL con periodo 5 μ m, abbiamo studiato l'opportunità di aggiungere solo un terzo laser λ_3 che insieme a λ_1 formi il BNSL da 5 μ m. Quindi andiamo a studiare il potenziale risultante dalla sovrapposizione di tre reticoli $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ con $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$:

$$V(x) = V_1 \sin^2(k_1 x + \phi_1) + V_2 \sin^2(k_2 x + \phi_2) + V_3 \sin^2(k_3 x + \phi_3)$$
(3.6)

dove ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 sono le fasi.

Ricordiamo, dalla teoria vista nella sezione 3.1.1, che il primo battimento che si ha tra il reticolo k_1 e k_2 , con l'imposizione della relazione tra lunghezze d'onda $(n+1)\lambda_1 = n\lambda_2$ porta alla relazione 3.4 e al vettore d'onda effettivo:

$$k_1 = \frac{(n+1)}{n} k_2 \quad \Rightarrow \quad k_{eff}^1 = k_1 - k_2 = \frac{k_2}{n}$$
 (3.7)

Studiando il secondo battimento che si ha tra il reticolo k_1 e k_3 , e volendo $k_{eff}^2 = 2k_2/n \cos^2 da$ ottenere l'array di doppie buche, otteniamo una condizione precisa per k_3 :

$$k_{eff}^2 = 2\frac{k_2}{n} \quad \Rightarrow \quad k_1 - k_3 = 2\frac{k_2}{n} \quad \Rightarrow \quad k_3 = \frac{(n-1)}{n}k_2$$
(3.8)

La scelta obbligata di λ_3 causa un terzo battimento tra λ_2 e λ_3 . Questo dà origine ad un reticolo con periodicità pari $k_{eff}^3 = k_2 - k_3 = k_2/n = k_{eff}^1$, cioè uguale al primo BNSL creato da λ_1 e λ_2 . Questo porta ad un effetto di interferenza con il primo BNSL che è costruttivo o distruttivo in base alla scelta delle fasi dei singoli reticoli.

Partendo dall'equazione 3.6 e imponendo le condizioni su i vettori d'onda viste precedentemente, dopo alcuni passaggi matematici possiamo ricavarci il potenziale efficace:

$$V_{eff} = -\frac{V_1 V_2 \cos((k_1 - k_3)x + 2(\phi_1 - \phi_2))}{16E_{R_2}} + \frac{V_2 V_3 \cos((k_1 - k_3)x + 2(\phi_2 - \phi_3))}{16E_{R_2}} + \frac{V_1 V_3 \cos(2(k_1 - k_3)x + 2(\phi_1 - \phi_3))}{16E_{R_2}}$$
(3.9)

dove $E_{R_2} = \hbar^2 k_2^2/2m$. L'utilizzo del potenziale efficace è valida soltanto nel limite perturbativo, cioè $V_1, V_2 << E_{R^+}$.

Per ottenere un *array* di doppie buche bilanciato serve poter scrivere questa equazione come la somma di due funzioni sinusoidali una con periodo la metà dell'altro. Per fare questo andiamo a scegliere le fasi in modo ottimale:

$$\phi_1 = \phi_2 \qquad \phi_3 = \phi_2 + \pi \tag{3.10}$$

Con queste condizioni possiamo andare a scrivere l'equazione 3.9 nella seguente forma:

$$V_{eff} = -\frac{(V_1 - V_3)V_2\cos((k_1 - k_3)x)}{16E_{R_2}} + \frac{V_1V_3\cos(2(k_1 - k_3)x)}{16E_{R_2}}$$
(3.11)

Per verificare la validità del potenziale efficace siamo andati a risolvere numericamente l'equazione di Schroedinger, per un atomo sottoposto al potenziale nella forma dell'equazione 3.6 e 3.11, così da ottenere il profilo spaziale della densità di probabilità. I risultati sono riportati nella figura 3.4. Come per il caso del BNSL il nostro atomo risente di un minimo di potenziale dove l'ampiezza della modulazione spaziale veloce è massima.



Figura 3.4: La figura mostra il profilo spaziale dell'array di doppie buche bilanciato e la rispettiva densità di probabilità spaziale dello stato fondamentale. In blu abbiamo l'andamento del potenziale (eq.3.6), in arancione abbiamo il potenziale effettivo (eq.3.11). Questa simulazione è stata ottenuta per $V_1 = V_2 = 300$ nK e $V_3 = 150$ nK e con $\lambda_1 \simeq 1013$ nm, $\lambda_2 = 1064$ nm e $\lambda_3 = 1120$ nm (n = 20).

Dalla formula 3.11 fissando $V_1 \in V_2 \in \lambda_1 \simeq 1013$ nm, $\lambda_2 = 1064$ nm e $\lambda_3 = 1120$ nm, si realizza la sovrapposizione dei due reticoli con periodicità 10 μ m e 5 μ m. Aumentando V_3 si va ad aumentare l'ampiezza del reticolo a 5 μ m e di conseguenza aumentiamo l'ampiezza della barriera (vedi paragrafo 1.2). Tuttavia allo stesso tempo riduce l'ampiezza del reticolo a 10 μ m. Nella figura 3.5 viene riportato la forma spaziale delle potenziale a doppia buca e la funzione d'onda dello stato fondamentale, in funzione dell'ampiezza della barriera (V_3).



Figura 3.5: Nella figura vediamo, sulla sinistra il potenziale dell'array di doppie buche e sulla destra la densità di probabilità spaziale dello stato fondamentale. La simulazione è ottenuta potenziale scritto come eq.3.6 con $V_1 = V_2 = 400$ nK e $\lambda_1 \simeq 1013$ nm, $\lambda_2 = 1064$ nm e $\lambda_3 = 1120$ nm (n = 20) al variare di a) $V_3 = 0$ nK b) $V_3 = 100$ nK c) $V_3 = 150$ nK d) $V_3 = 300$ nK.

Livelli Energetici

Un altro studio che abbiamo svolto riguarda l'andamento degli autovalori in funzione dell'ampiezza della barriera, nel regime di validità del potenziale efficace andando a osservare la differenza tra quest'ultimo e il potenziale vero. Ricordiamo che il limite di validità con $V_1 = V_2 = V$ è definito da:

$$V << E_{R^+}$$
 quando $E_{R^+} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{k_1 + k_2}{2}\right)^2$

che nel nostro caso con $\lambda_1 \simeq 1013$ nm, $\lambda_2 = 1064$ nm e $\lambda_3 = 1120$ nm con n = 20, corrisponde a $E_{R^+} \simeq 220$ nK.

Nella figura 3.6 sono riportati gli andamenti degli autovalori, a cui è stato sottratto l'autovalore del primo autostato (stato fondamentale), al variare di V_3 nel regime $V < E_{R^+}$ dove è valida la scrittura del potenziale efficace.



Figura 3.6: Nella figura sono riportati alcuni autovalori, a cui abbiamo sottratto l'autovalore dello stato fondamentale, in funzione della profondità della barriera in nK. Le simulazioni sono state fatte con $V_1 = V_2 = 200$ nK e $\lambda_1 \simeq 1013$ nm, $\lambda_2 = 1064$ nm e $\lambda_3 = 1120$ nm (n = 20) in funzione di V_3 .

Dalla figura 3.6, si può notare che il primo livello, che in questa rappresentazione sarebbe il termine di *tunneling* (vedere capitolo1.2), va a zero come ci aspettiamo quando la barriera diventa molto grande. Si nota anche un leggero discostamento tra gli autovalori nei due potenziali, ma l'andamento rimane il medesimo.
Per comprendere meglio queste discrepanze sono andato a fare due simulazioni, una con $V \ll 220$ nk e l'altra $V \gg 220$. Nella figura 3.7 sono riportati gli autovalori, simulati con il potenziale vero e quello efficace, sempre a meno del primo autovalore. Come si può notare le due simulazioni combaciano perfettamente.



Figura 3.7: In questa immagine si mettono a confronto i primi 3 livelli energetici, a cui abbiamo sottratto l'autovalore dello stato fondamentale, del potenziale e della sua forma efficace. Le simulazioni sono state fatte con $V_1 = V_2 = 50nK$ e $\lambda_1 \simeq 1013$ nm, $\lambda_2 = 1064$ nm e $\lambda_3 = 1120$ nm (n = 20) in funzione di V_3 .

Nella figura 3.8 sono uscito dal regime di validità, si osserva un significativa discrepanza tra gli autovalori.



Figura 3.8: In questa immagine si metteono a confronto i primi 5 livelli energetici, a cui abbiamo sottratto l'autovalore dello stato fondamentale, del potenziale e della sua forma efficace. Le simulazioni sono state fatte con $V_1 = V_2 = 400nK$ e $\lambda_1 \simeq 1013$ nm, $\lambda_2 = 1064$ nm e $\lambda_3 = 1120$ nm (n = 20) in funzione di V_3 .

Nell'ultima immagine si nota che gli autovalori tendono a diventare degeneri a due a due all'aumentare dell'ampiezza della barriera (autovalore di colore blu diventa degenere con lo stato fondamentale). Questo avviene per il raccordo che si ha tra gli autostati del potenziale a doppia buca e quelli del potenziale armonico del singolo sito.

3.2 Realizzazione dell'Array di Doppie Buche

Come visto dalla sezione 3.1.2, per ottenere un *Array* di doppie buche abbiamo bisogno di sovrapporre tre reticoli realizzati dalla retro-riflessione di tre fasci laser su un singolo specchio, con una relazione di commensurabilità tra le lunghezze d'onda ben definita.

Una sorgente laser Mephisto MOPA (CHOERENT) genera una fascio di radiazione a $\lambda_2 = 1064, 439$ nm (valore "in vuoto" che è stato misurato con un λ -meter). Per rispettare le relazioni di commensurabilità $\lambda_1 = n/(n+1)\lambda_2$ con n = 20 e $\lambda_2 = 1064, 439$ nm abbiamo utilizzato un laser con $\lambda_1 = 1013, 751$ nm, realizzato con un TA-PRO della TOPTICA. Con lo stesso modello di laser abbiamo ottenuto il terzo fascio con $\lambda_3 = 1120, 462$ che rispetta la relazione $\lambda_1 = n/(n-1)\lambda_2$ con n = 20.



Figura 3.9: Disegno riassuntivo dello schema ottico dei fasci di reticolo sul banco ottico del sistema da vuoto.

Come si vede nell'immagine 3.9, i tre fasci vengono poi inviati nel tavolo ottico, dove è presente la camera a vuoto (*Science Chambre*) attraverso una singola fibra ottica. Uscendo dalla medesima fibra, i fasci sono già sovrapposti, e attraversano una lamina $\lambda/2$ e un cubo polarizzatore Glein Taylor che purificano la polarizzazione verticale e massimizzano la quantità di luce da utilizzare per gli atomi. Per monitorare e stabilizzare le potenze dei reticoli sugli atomi vengono prelevate piccole frazioni di radiazione tramite un *beam splitter*, ed inviate a tre fotodiodi distinti tramite un reticolo di diffrazione. Dopo la camera a vuoto è presente uno specchio per la retro-riflessione dei fasci. Si introduce lungo il cammino un cubo polarizzatore per permettere di sovrapporre ai reticoli anche una trappola di dipolo orizzontale che fornisce il confinamento radiale x-y della nuvola di atomi.

3.2.1 Stabilizzazione in Frequenza delle Sorgenti Laser

Per migliorare la stabilità dell'*array* di doppie buche si stabilizza la frequenza dei laser attraverso una cavità Fabry Perot ad alta *finesse* implementando la tecnica Pound-Drever-Hall(PDH)[22].

L'idea alla base di questa tecnica è di generare un segnale proporzionale alla differenza tra la frequenza di un laser e la frequenza di risonanza di una cavità ottica di riferimento (cavità n.1). così da generare un segnale di feedback da inviare al laser per sopprimere le fluttuazioni in frequenza (aggancio in frequenza). La particolarità del nostro *set up* risiede nel fatto che si aggancia in frequenza tre differenti sorgenti laser su una singola cavità ottica, utilizzando una versione modificata dello schema Pound-Drever-Hall [23].

Segnale di errore Pound-Drever-Hall (PDH)

Per la stabilizzazione c'è bisogno di un segnale di feedback che sia proporzionale alla differenza tra la frequenza della radiazione ω e il valore di risonanza ω_c della cavità rispetto al valore desiderato. Si potrebbe utilizzare la variazione di intensità in uscita da una cavità ottica, quando la frequenza della luce accoppiata si sposta dalla risonanza della cavità. Questo però non dà informazione sulla direzione della variazione di frequenza, e di conseguenza non è possibile sapere che correzione inviare al laser per ritornare risonante. In figura 3.10 è rappresentato schematicamente il funzionamento della tecnica PDH per l'aggancio di una singola sorgente laser.



Figura 3.10: Pound Drever Hall lock loop.

Il metodo della stabilizzazione in frequenza PDH prevede come primo *step* una modulazione in fase della luce in ingresso alla cavità (di frequenza ω), per mezzo di un EOM guidato da una RF a frequenza Ω :

$$E_{inc} = E_0 \exp\{(i(\omega t + \beta \sin(\Omega t)))\}$$
(3.12)

Dove E_0 è l'ampiezza del campo incidente sul modulatore, e β l'ampiezza della modulazione.

L'effetto di questa modulazione nella fase, al primo ordine nell'ampiezza di modulazione β , è quello di generare tre distinte componenti in frequenza. Una portante alla frequenza del laser ω e due *sidebands* a $\omega \pm \Omega$ [22]. Il passo successivo consiste nel prelevare parte dell'intensità riflessa dalla cavità e mandarla ad un fotodiodo veloce, in questo caso un PDG7096-03.

A risonanza perfetta la portante viene completamente trasmessa dalla cavità e le *sidebands* vengono riflesse e mandate sul photodiodo generando un segnale a frequenza 2ω . Se però siamo un po' fuori risonanza, anche una parte della portante verrà riflessa e, interferendo con la luce nelle *sidebands*, genererà una modulazione dell'intensità raccolta sul fotodiodo a frequenza Ω .

Il segnale raccolto dal fotodiodo viene inviato con ampiezza proporzionale a $(\omega - \omega_c)$ al canale RF di un *mixer* con oscillatore locale il segnale a frequenza Ω . Quello che otteniamo è il segnale riportato nella figura 3.11. Questo è un segnale antisimmetrico attorno alla risonanza ossia positivo se ci troviamo sopra la risonanza, e negativo se ci troviamo sotto.



Figura 3.11: In figura è mostrato il segnale di errore PDH per la luce a 1064 nm.

Questo schema viene usato per stabilizzare il laser a 1064 nm. I laser 1013 e 1120 nm vengono stabilizzati con un'altra tecnica che è una leggera modifica al PDH. In questa tecnica il laser viene modulato attraverso EOM a cui viene mandato un segnale RF a Ω_1 che è a sua volta modulato con una frequenza Ω_2 , questa tecnica è chiamata off-set sideband locking [23, 24]. Si modula con due frequenze distinte, così da creare una doppia *sidebands* (DSB).

$$E_{DSB} = E_0 \exp\{(i(\omega t + \beta_1 \sin(\Omega_1 t) + \beta_2 \sin(\Omega_2 t)))\}$$
(3.13)

Se espandiamo la funzione al primo ordine per β_1, β_2 il risultato della modulazione sarà un termine con frequenza ω e due *sidebands* con frequenze $\omega \pm \Omega_1$ e $\omega \pm \Omega_2$ e delle *sub-sidebands* con frequenza $\omega + \Omega_1 \pm \Omega_2$ e $\omega - \Omega_1 \pm \Omega_2$ (vedi figura 3.12).

Il segnale di errore è come prima generato a partire dal segnale del fotodiodo veloce, che raccoglie la luce retro-riflessa dalla cavità, che viene portato ad un *mixer*. Il punto in cui si va a effettuare l'aggancio, per la sorgente a 1013 e 1120 nm, è rappresentato questa volta dal passaggio da zero della *slope* centrale del segnale di errore della *sidebands* a $\omega + \Omega_1 \pm \Omega_2$. Questa tecnica ci permette ora di cambiare la frequenza del laser, variando Ω_1 senza perdere l'aggancio.



Figura 3.12: Nella figura si mostra l'andamento del segnale di errore nel caso di doppia *sidebands*. Assumendo $\Omega_1 > \Omega_2$ e $\beta_1 > \beta_2$.

Schema di Aggancio a Lunghezze d'onda Multiple

Ci sono vari metodi per ottenere diversi segnali di errore nel caso di differenti laser all'interno della stessa cavità ottica. Il metodo implementato nel nostro esperimento è la divisione delle lunghezze d'onda attraverso un specchio dicroico [23] e l'uso di tre differenti diodi veloci per l'acquisizione dei segnali. Per il laser a 1064 inviamo il segnale di errore ad un regolatore PID (*proportional-integral-derivative*) con una larghezza di banda di 200 kHz, e l'uscita inviata al piezo elettrico della cavità interna del laser con una larghezza di banda nominale di 100 kHz. Per gli altri due laser usiamo un regolatore PID commerciale (FALC 110) che ha due modulazioni, una veloce ed una lenta, che servono per regolare la frequenza dei laser tramite un piezoelettrico o direttamente agendo sulla cavità del laser.

3.2.2 Studio del rumore della stabilizzazione

Agganciare un laser ad una cavità non assicura automaticamente la stabilizzazione della frequenza. La cavità potrebbe essere soggetta ad instabilità di tipo meccanico. Se avessimo due cavità ottiche simili potremmo utilizzarle per ricavare il rumore residuo, se il rumore è scorrelato.

Perciò abbiamo recuperato una cavità ottica (cavità n.2) uguale a quella usata per l'aggancio in frequenza, ma purtroppo non abbiamo avuto a disposizione gli stessi specchi. Gli specchi che abbiamo usato hanno riflettività diverse per le nostre tre lunghezze d'onda. In particolare hanno una riflettività molto basse per il laser $\lambda_1 = 1013$ nm.

Quindi lo studio del rumore svolto in questa sezione non è stato eseguito per il laser $\lambda_1 = 1013$ nm, ma solo per i laser $\lambda_2 = 1064$ nm e $\lambda_3 = 1120$ nm.

Con l'utilizzo della cavità n.2 sono andato ad eseguire delle analisi sulla frequenza del laser mentre è agganciato alla cavità di stabilizzazione usato nel PDH. Queste misure mi permettono di ricavare il rumore in frequenza delle sorgenti laser.



Figura 3.13: Immagine della cavità n.2 usata per lo studio del rumore in frequenza dei tre laser.

Prima di tutto preleviamo parte della luce destinata ad andare nella cavità n.1. Questa luce viene indirizzata verso la cavità n.2 e accoppiata ad essa mediante un opportuno telescopio da me ottimizzato (*Mode Mathcing*). Per accoppiare la luce in cavità devo modificare il *waist* del fascio laser, utilizzando delle lenti, per renderlo della stessa dimensione del waist della cavità. Il *waist* della cavità dipende dalla dimensione della cavità stessa e dagli specchi di cui è composta.

La prima cosa che ho fatto è stata scegliere gli specchi della cavità per ottenere una cavità stabile. Nel nostro caso abbiamo scelto di realizzare una cavità concentrica. Quindi ho montato due specchi con focale e spessore rispettivamente di f = 500 mm e s = 6.35 mm.

La cavità è lunga d = 14.3 cm quindi posso scrivere il criterio di stabilità di una cavità ottica:

$$0 < g_1 g_2 < 1$$
 $g_1 = 1 - \frac{d}{R_1}$ $g_2 = 1 - \frac{d}{R_2}$ (3.14)

dove R_1 e R_2 sono i raggi di curvatura degli specchi della cavità.

Nel nostro caso otteniamo $g_1g_2 \simeq 0.51$, quindi dentro i criteri di stabilità.

Essendo una cavità concentrica il *waist* è situato a metà della cavità. Dalla scelta degli specchi ho ricavato la dimensione del *waist*:

$$\omega_0^2 = \frac{\lambda Z_R}{\pi} \tag{3.15}$$

e definiamo:

$$Z_R^2 = \frac{d(R_1 - d)(R_2 - d)(R_1 + R_2 - d)}{(R_1 + R_2 - 2d)^2}$$

$$z_1 = \frac{d(R_2 - d)}{R_1 + R_2 - 2d} \qquad z_2 = -\frac{d(R_1 - d)}{R_1 + R_2 - 2d}$$
(3.16)

 Z_R è il Rayleigh range del modo in cavità e $z_1 z_2$ sono le posizioni degli specchi. Le equazioni sopra sono scritte con il sistema di riferimento centrato sulla posizione del waist.

Per il laser a $\lambda = 1064$ nm si ottiene un $\omega_0 = 243 \ \mu$ m. Conoscendo le dimensioni del *waist* ho realizzato il *set up* ottico per accoppiare la luce in cavità, andando a calcolare le lenti da usare e la lunghezza del percorso. Come si vede in figura 3.14 ho scelto due lenti con focale f = 100 mm.



Figura 3.14: Schema del *set up* ottico per l'accoppiamento in cavità del nostro fascio.



Figura 3.15: Fotografia del circuito ottico usato per l'aggancio in cavità.

Con il medesimo apparato si va a studiare anche il rumore in frequenza del laser a 1120 nm. Non cambiando le lenti e la lunghezza del percorso avremo un accoppiamento peggiore, ma sufficiente per osservare il segnale in uscita dalla cavità.

Modi di cavità

Il passo successivo è stato quello di regolare gli specchi M1 e M2 prima dell'ingresso alla cavità così da eliminare tutti i modi tranne quello principale (TEM00). In 3.16 riporto vari modi trasversi che ho osservato all'uscita della cavità, ottenuto attraverso una camera CCD.



Figura 3.16: Nell'immagine viene mostrato una serie di modi trasversi che abbiamo ottenuto durante l'accoppiamento delle sorgenti laser in cavità.

In uscita dalla cavità ho poi aggiunto una lente per focalizzare la radiazione su di un fotodiodo ed avere un segnale che non è dipendente dalla forma del profilo spaziale della radiazione.

Segnale d'errore

Per prima cosa eseguiamo una scansione sul piezo elettrico della cavità attraverso una rampa in tensione. Questo ci permette di modificare le dimensioni della cavità e di conseguenza la sua frequenza di risonanza. Il segnale che otteniamo avrà un massimo quando la frequenza di risonanza della cavità sarà uguale alla frequenza del laser.

Per studiare il rumore in frequenza occorre trasferire tali fluttuazioni in fluttuazioni in intensità dalla luce accoppiata in cavità. Per fare questo scelgo una frequenza di risonanza della cavità (ν_0) spostata rispetto alla frequenza del laser (ν). Per capire il motivo di questa scelta prendiamo l'equazione per l'intensità di uscita di una cavità ottica:

$$I_C \simeq \frac{1}{1 + \left(\frac{\nu - \nu_0}{\gamma/2}\right)^2} I_{in} \qquad \text{con} \qquad \gamma = \frac{FSR}{f} \tag{3.17}$$

Dove FSR è il Free Spectral Range e f la finesse. Le fluttuazioni possono essere scritte nella seguente forma:

$$\Delta I_C \simeq -2 \left(\frac{1}{1 + (\frac{\nu - \nu_0}{\gamma/2})^2}\right)^2 \frac{\nu - \nu_0}{\gamma/2} I_{in} \Delta \nu \tag{3.18}$$

come si può vedere dall'equazione se scelgo $\nu = \nu_0$ le fluttuazioni vanno a zero. Quindi è sconveniente porci nel caso di frequenza di risonanza della cavità uguale alla frequenza del laser. Al contrario per $\nu = \nu_0 + \frac{\gamma}{2}$ abbiamo $\Delta I_c = \frac{I_{in}}{2} \Delta \nu$ (vedi figura 3.17).



Figura 3.17: Si riporta il segnale uscente dalla cavità. Viene mostrata la sensibilità che si ha sulle fluttuazioni di intensità in due posizioni di risonanza della cavità. E' visibile una differenza di sensibilità alle fluttuazione di frequenza.

Occorre quindi cercare la tensione del piezo per cui la frequenza del laser è uguale alla frequenza di risonanza della cavità più mezza larghezza del modo. Per fare questo ho ridotto l'ampiezza della spazzata in tensione applicata al piezzo fino ad annullarla, con l'accortezza di rimanere centrato nel sulla posizione desiderata. Nella figura 3.18 riporto la forma del segnale con due diverse larghezze della spazzate. Queste immagini sono state acquisite durante il processo di riduzione della spazzata.



Figura 3.18: Nella figura si mostra lo *zoom* che otteniamo andando a ridurre la spazzata sul piezo elettrico della cavità ottica.

Tolta la spazzata e lasciato l'offset, si osservano delle fluttuazioni di intensità in funzione del tempo. Come si vede nell'immagine 3.18 al primo ordine la dipendenza intensità vs frequenza è lineare. Ottenendo da questo il fattore di conversione posso ottenere le fluttuazioni di frequenza, vedi immagine 3.19.



Figura 3.19: In a) segnale delle fluttuazione di frequenza del laser a 1064 e in b) segnale delle fluttuazione di frequenza del laser a 1120 nm. Dati presi con $\nu \neq \nu_0$, acquisito dal fotodiodo in 200 ms.

Dopo aver ricavato le fluttuazioni in frequenza, sono andato a studiare le loro

componenti spettrali. Nella figura 3.20 riporto le trasformazioni di Fourier (FT) dei miei segnali.



Figura 3.20: In a) è riportato il segnale di rumore per 1064 in due forme: rumore di intensità in funzione del tempo e trasformata di Fourier. In b) è riportato il segnale di rumore per il laser a 1120 nm con i medesimi grafici descritti in precedenza.

Dalla trasformata di Fuorier si nota che c'è una forte presenza di componenti a 20, 50, 80, 100 Hz.

Lo spettro del rumore a delle componenti a bassa frequenza, queste sono dovute al rumore elettronico, che in principio è eliminabile. Durante la mia tesi ho non sono riuscito ad eliminarlo e pertanto come vedremo nelle sezioni successive ho cercato di quantificare, attraverso simulazioni numeriche, l'effetto di tale rumore su alcuni esperimenti svolti.

3.3 Analisi e Caratterizzazione

In questa sezione andiamo ad analizzare varie caratteristiche del nostro *array* di doppie buche.

3.3.1 Potenziale a Doppia Buca Bilanciato

Uno dei primi problemi che abbiamo affrontato è stato durante la fase di caricamento degli atomi nel potenziale. Siamo riusciti a caricare tre doppie buche contemporaneamente, ma per svolgere gli esperimenti che vedremo successivamente è necessario ottenere un *array* di doppie buche bilanciato.

Per riuscire a bilanciare il potenziale siamo andati a variare la frequenza del terzo laser, quello a 1120 nm. Nella figura 3.21 sono riportati tre grafici dell'*imbalance* delle tre doppie buche al variare della frequenza del terzo laser. Definiamo l'*imbalance*:

$$z_i = \frac{N_{r_i} - N_{l_i}}{N_{tot}} \qquad \text{dove} \qquad N_{tot} = N_{l_i} + N_{r_i} \qquad i = 1, 2, 3 \tag{3.19}$$

dove N_{r_i} e N_{l_i} sono il numero di atomi nella *i*-esima doppia buca.



Figura 3.21: Nelle tre immagini sono riportati i tre *imbalance* (z_i) delle tre doppie buche al variare della frequenza del laser a lunghezza d'onda λ_3 . Il singolo grafico riporta l'*imbalance* in funzione di varie misure fatte.

Come si vede nella 3.21 modificando la frequenza del terzo laser riusciamo ad ottenere tre doppie buche bilanciate. In figura 3.22 viene riportata l'immagine del *array* di doppie buche bilanciato attraverso la tecnica descritta nel paragrafo 2.3.



Figura 3.22: Immagine degli atomi caricati in tre doppie buche bilanciate.

3.3.2 Rabi Oscillation

Una caratteristica importante è la frequenza di oscillazione di Rabi, cioè la frequenza di *tunneling* tra un sito e l'altro della doppia buca.

Considerando l'approssimazione a due modi vista nel paragrafo 1.2, ricordiamo l'equazione per la frequenza di *tunneling*/ frequenza di Rabi (equazione1.14) posso scrivere:

$$\Omega_t = \frac{E_e - E_g}{\hbar} \tag{3.20}$$

Dove $E_e \in E_g$ sono le energie dello stato *excited* and *ground*.

Nella figura 3.23 è riportato un grafico dell'*imbalance* delle tre doppie buche in funzione del tempo. Per svolgere questa misura abbiamo caricato i condensati in un sito delle doppie buche, e successivamente abbiamo abbassato la barriera per incrementare il *tunneling* andando a misurare l'*imbalance* dopo il tempo che intercorre tra il caricamento del condensato nel potenziale e acquisizione immagine.



Figura 3.23: Nell'immagine è riportato l'*imbalance*, delle tre doppie buche, in funzione del tempo tra il caricamento degli atomi all'acquisizione dell'immagine. Ottenendo la frequenza di *tunneling*. Sopra il grafico sono riportate delle immagini del condensato a vari tempi.

Una caratteristica molto importante è che le tre doppie buche hanno la stessa frequenza di Rabi entro la curva d'errore.

3.3.3 Curvatura del Potenziale Indotta

Una caratteristica di questo tipo di potenziale è la possibilità di indurre una curvatura andando a variare la lunghezze d'onda dei laser usati per generare i reticoli. Come si vede nella figura 3.24, una variazione ϵ di λ_3 induce una curvatura. Questa curvatura può essere confinante o anti-confinante in base al segno della variazione. Questo avviene perché stiamo uscendo dalle relazioni di commensurabilità (vedi equazione 3.10).



Figura 3.24: Nell'immagini viene mostrata la curvatura indotta dalla perdita delle relazioni di commensurabilità. Nelle prime due immagini si vede gli effetti della curvatura sul nostro potenziale, e la terza è l'effetto che ha sugli atomi.

Una variazione di $\Delta \lambda_3 \sim 0.01$ nm induce una variazione di energia tra i siti dell'i-esima doppia buca $\Delta E_{i,i+1} \sim 2Hz$.

Questa caratteristica è molto utile a livello sperimentale. Possiamo indurre la curvatura per correggere eventuali curvature indesiderate, o desideriamo indurre noi stessi una curvatura per poter studiare nuovi fenomeni, come vederemo nei capitoli successivi.

3.3.4 *Imbalance* dovuto alla fase Gouy

Uno studio che ho svolto riguardava il limite di doppie buche che è possibile realizzare con il nostro tipo di potenziale. In questo caso mi sono concentrato sullo sbilanciamento energetico dell'*array* di doppie buche causato dalla fase di Gouy. Il nostro potenziale viene realizzato dalla retro-riflessione di tre fasci gaussiani (vedi paragrafo 3.1.2). Quindi possiamo scrivere l'equazione 3.6 nel seguente forma:

$$V_{DW}(x) = V_1 [\cos(k_1 x + \omega t - \phi(x)) + \cos(-k_1 x - \omega t - \phi(-x))]^2 + V_2 [\cos(k_2 x + \omega t - \phi(x)) + \cos(-k_2 x - \omega t - \phi(-x))]^2 + V_3 [\cos(k_3 x + \omega t - \phi(x)) + \cos(-k_3 x - \omega t - \phi(-x))]^2$$
(3.21)

Con questa scrittura ci siamo messi nel sistema di riferimento dello specchio usato per la retro-riflessione, che is trova a $d \sim 25$ cm. La posizione dello specchio è il punto dove i tre fasci vengono focalizzati. dove $\phi(x)$ è la fase di Gouy.:

 $\phi(x) = \arctan\left(\frac{x}{Z_R}\right) \tag{3.22}$

dove Z_R è il Rayleigh range.

Posso andare a riscrivere l'equazione 3.21 considerando il caso stazionario, medio il mio potenziale lungo il tempo:

$$\int_{-T}^{T} \cos(\omega t) dt = 0 \qquad \int_{-T}^{T} \cos(\omega t)^{2} dt = \frac{1}{2}$$
(3.23)

Quindi posso andare scrivere i termini nell'equazione 3.21:

$$\left[\cos(k_{i}x + \omega t - \phi(x)) + \cos(-k_{i}x - \omega t - \phi(-x))\right]^{2}$$
(3.24)

con alcuni passaggi trigonometrici e applicando le approssimazioni 3.23 ottenendo:

$$\simeq 1 + \cos(k_i x + \phi(x) - (-k_i x + \phi(-x))) =$$

= 1 + \cos(2k_i x + \phi(x) - \phi(-x)) (3.25)

così posso scrivere:

$$V_{DW}(x) = V_1 [1 + \cos(2k_1x + \phi(x) - \phi(-x))] + V_2 [1 + \cos(2k_2x + \phi(x) - \phi(-x))] + V_3 [1 + \cos(2k_3x + \phi(x) - \phi(-x))]$$
(3.26)

Nella figura 3.25 riporto le simulazioni della differenza di energia tra i due siti della doppia buca e la fase di Gouy in funzione della distanza dallo specchio per la retro-riflessione, in unità di numero di doppie buche ($\sim 10 \ \mu m$). Le simulazioni sono state svolte utilizzando il potenziale nella forma dell'equazione 3.26.



Figura 3.25: Nella figura viene riportata la differenza di energia tra i due siti (δ) della doppia buca e la fase di Gouy in funzione della distanza (in numero di doppie buche) dall'origine, cioè lo specchio per la retro-riflessione. La linea tratteggiata nera riporta la posizione degli atomi.

Come si vede nella immagine 3.25 la fase di Gouy può indurre uno sbilanciamento energetico tra i siti della doppie buche. Questo sbilanciamento $\delta(Hz)$ varia al variare della distanza specchio per la retro-riflessione. Gli atomi si trovano in un punto molto sfavorevole.

La scala della distanza nella figura è molto grande rispetto alle dimensione della singola doppia buca. Quindi lo squilibrio energetico non è apprezzabile nella scala dei nostri esperimenti, stando lavorando con 3 doppie buche.

Nella figura 3.26 si può vedere uno zoom dell'immagine 3.25 nella regione dove si trovano gli atomi. In questo caso stiamo rappresentando l'andamento della δ su una distanza di 100 doppie buche.



Figura 3.26: Zoom su una regione introno alla posizione degli atomi della figura 3.25.

Capitolo 4 Interferometro di Mach-Zehnder

In questa tesi siamo andati a realizzare interferometri di Mach-Zehnder con condensati di Bose-Einstein in trappole a doppia buca. In particolare, come abbiamo visto nei capitoli precedenti, siamo in grado di caricare tre doppie buche e di conseguenza di realizzare tre interferometri che lavorano contemporaneamente.

Lo schema di funzionamento è riportato in figura 4.1. Attraverso il controllo della barriera tra i due siti della doppia buca riusciamo a manipolare la funzione d'onda atomica in modo da realizzare i *Beam-Splitter* 50/50 atomici.

L'interferometro atomico in trappola è uno strumento che permette di studiare la differenza di fase che gli atomi acquisiscono nei due siti della doppia buca. Questa differenza di fase è dovuta allo squilibrio energetico che c'è tra i due modi. La differenza di fase quindi dipende dallo squilibrio energetico dei modi (δ) e il tempo che trascorre tra il primo BS, che separa il condensato, e il secondo, detto tempo di interrogazione (T), come si vede in figura 4.1.

La diversa energia nei due modi $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ porta una diversa evoluzione della fase nei due siti del singolo interferometro $(\phi_i = i\varepsilon_i/\hbar T)$, e possiamo quindi definire la differenza :

$$\Delta\phi = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\hbar}T = \frac{\delta}{\hbar}T \tag{4.1}$$

Lo *shift* energetico (δ) potrebbe essere dovuto alla presenza di una forza esterna o di un potenziale armonico. Per esempio, ipotizzando che ci sia una forza costante lungo la direzione del potenziale di trappola a doppia buca, questa porta ad uno squilibrio pari a:

$$\delta = Fd \qquad \Rightarrow \qquad \Delta \phi = \frac{Fd}{\hbar}T$$

$$(4.2)$$

dove d è la distanza tra i due siti della doppia buca.



Figura 4.1: Confronto tra interferometro Mach-Zehnder ottico ed uno atomico, quest'ultimo realizzato con un potenziale a doppia buca. Come si vede i *Beam-splitter* 50/50 atomici vengono realizzati mediante l'abbassamento controllato della barriera per dividere e ricombinare il condensato nei due modi intrappolati. In fine la fase interferometrica viene misurata attraverso un secondo BS che porta l'informazione di fase in differenza di popolazione tra i condensati.

Abbiamo bisogno ora di misurare questa differenza di fase. Per fare questo si realizza un secondo *Beam-spliter* come si vede in figura 4.1. Il secondo *Beam-spliter* serve per mappare la differenza di fase in differenza del numero di atomi, che è la grandezza che col nostro sistema di *imaging* andiamo a misurare.

Quindi l'osservabile che ci interessa in questi esperimenti è l'imbalance:

$$z = \frac{N_r - N_l}{N_r + N_l} \tag{4.3}$$

Per il nostro esperimenti abbiamo apportato alcune modifiche alla sequenza rispetto a quella vista nella figura 4.1, in particolare il primo BS.

4.1 Primo Beam-Splitter



Figura 4.2: Schema della procedura di Beam-spliter adottata per la nostra sequenza.

Nella nostra configurazione il primo *Beam-spliter* viene realizzato inizializzando il nostro condensato nella trappola in assenza della barriera. Successivamente alzeremo la barriera per separare il condensato, come si può vedere nella immagine 4.2.

La fase di alzamento della barriera è caratterizzata da un tempo ben preciso (T_1) dove otteniamo la divisione del nostro condensato nei due modi della doppia buca, come si vede in figura 4.3. Questo metodo si discosta da quello mostrato nella figura 4.1, perché sperimentalmente il metodo che usiamo necessita di un tempo minore per essere eseguito. Il tempo T_1 può essere ridotto fino al valore di $T_1 = 10$ ms (al disotto di questo tempo verrebbero eccitati stati oltre hai primi due livelli energetici) a differenza del secondo BS che richiede il doppio del tempo.

Per alzare la barriera si esegue una rampa lineare dell'intensità in funzione del tempo del laser λ_3 (vedi capitolo 3).



Figura 4.3: Immagini acquisite tramite il nostro sistema di *imaging* degli atomi caricati inizialmente nel potenziale di trappola senza barriera. E successivamente andiamo a alzare la barriera per realizzare il nostro primo *Beam-spliter* con $T_1 = 10$ ms.

Nella figura 4.4 vengono riportati gli *imbalance* finali z_1 (interferometro di sinistra), z_2 (interferometro centrale) e z_3 (interferometro di destra) in funzione degli esperimenti fatti (*Shot*) per due valori diversi di T_1 .



Figura 4.4: Vengono riportati gli *imbalance* finali z_1 (interferometro di sinistra), z_2 (interferometro centrale) e z_3 (interferometro di destra) in funzione degli esperimenti fatti (*Shot*) per due diversi T_1 . All'aumentare del tempo siamo sensibili agli squilibri energetici e di conseguenza le fluttuazioni dell'*imbalance* aumentano.

Quello che si nota nell'immagine 4.4 è che all'aumentare del tempo T_1 le fluttuazioni aumentano. Questo avviene perché a valori grandi di T_1 il sistema tenderà ad andare verso uno stato fondamentale che dipenderà dall'energia dei due siti della doppia buca. Quindi se abbiamo un leggero squilibrio tra le buche la funzione d'onda tenderà a finire nella buca con minore energia e di conseguenza a portare l'*imbalance* verso 1 o -1.

4.2 Secondo Beam-Splitter



Figura 4.5: Schema dell'esperimento realizzato per ottimizzare la scelta del tempo T_2 per ottimizzare il funzionamento del secondo *Beam-spliter*.

Il secondo *Beam-spliter* viene realizzato abbassando e alzando la barriera in un tempo (T_2) . Questo tempo viene scelto andando a realizzare l'esperimento mostrato nel paragrafo 3.3.2 (caratterizzazione delle oscillazioni di Rabi), e che viene qui schematizzato nella figura 4.5.

Il tempo T_2 che scegliamo è quello che ci porta ad avere un *imbalance* pari a zero (cioè il condensato separato in modo bilanciato tra i due siti) come si vede in figura 4.5.



Figura 4.6: Immagine degli atomi alla fine del processo del secondo *Beam-spliter* con un tempo di interrogazione uguale a $T_2 = 20$ ms.

Questo è il BS finale per eseguire una sequenza completa. Nella figura 4.6 riporto le immagini che abbiamo acquisito alla fine del secondo *Beam-spliter* con $T_2 \simeq 20$ ms.

4.3 Mach-Zehnder Completo

Ora siamo in grado di realizzare un sequenza completa di Mach-Zehnder, come si vede dall'immagine 4.7. Abbiamo eseguito diverse misure al variare del tempo di interrogazione T. Nel nostro caso abbiamo eseguito misure a T = 0, 20, 50, 100, 200 ms.



Figura 4.7: Schema della sequenza dell'interferometro Mach-Zehnder, da noi realizzato sperimentalmente

Dopo il secondo BS si effettua la misura degli atomi attraverso il sistema di *ima*ging (Paragrafo 2.3) così da ricavare l'*imbalance* (vedi figura 4.8).

In questo esperimento non siamo andati a introdurre uno squilibrio δ quindi teoricamente l'*imbalance* sarebbe dovuto rimanere zero, essendo partiti da uno stato iniziale con *imbalance* uguale a zero. Questo però non accade, come si vede nell'immagini 4.8. Quindi è presente un δ che sarà dovuto a fenomeni di rumore sperimentale, fluttuazioni della doppia buca o dalla presenza di forze.

Quello che si può notare nella figura 4.8 è che i segnali di uscita sono molto rumorosi, ma tali segnali sono tra di loro correlati.



Figura 4.8: Nell'immagine riportiamo gli *imbalance* finali in funzione degli esperimenti effettuati (*Shot*) dopo una sequenza completa di Mach-Zehnder a vari tempi di interrogazione. Come si vede nelle immagini vengono riportati gli *imbalance* dei tre interferometri z_1 (interferometro di sinistra), z_2 (interferometro centrale) e z_3 (interferometro di destra).

Questo ci apre la possibilità di fare delle analisi di tipo gradiometrico (Analisi Differenziale), cioè utilizzare il segnale di due o più interferometri in modo da poter eliminare il rumore comune.

4.4 Gradiometro

Un gradiometro è uno strumento che utilizza due sensori, nel nostro caso due interferometri, che lavorano simultaneamente. Uno dei sensore può essere pensato come una sonda e il secondo come controllo, il quale risentirà dei rumore comuni presenti su entrambi i sensori. Confrontando quindi le misure dei due sensori possiamo andare ad elimina il rumore comune.

Per capire meglio di cosa stiamo parlando facciamo un esempio. Ipotizziamo che vogliamo misurare l'interazione che si genera tra le superficie e gli atomi intrappolati, conosciuto come effetto Casimir-Polder [25]. Andiamo a posizionare i nostri interferometri come si vede nella figura 4.9. Il primo interferometro risentirà dell'interazione con la superficie che indurrà uno squilibrio in energia (θ). Entrambi invece risentiranno di una fluttuazione comune ϵ dovuta alle fluttuazioni del potenziale di trappola utilizzato.



Figura 4.9: Rappresentazione schematica di una possibile misura dell'effetto Casimir-Polder. Dove il primo interferometro risente dell'interazione con la superficie e il secondo è l'interferometro di controllo.

Possiamo quindi utilizzare il secondo interferometro come il nostro interferometro di controllo. Facendo un'analisi dei dati riusciamo ad eliminare il rumore comune. Questa tecnica è stata usata, e viene usata tutt'ora, anche in esperimenti con atomi in caduta libera [2].

Ora andiamo a svolgere una trattazione analoga per il nostro sistema.

4.5 Analisi Differenziali

Andiamo a studiare come svolgere l'analisi differenziale sui segnali degli interferometri visti precedentemente.

E' possibile andare a scrivere gli *imbalance* in funzione del rumore comune e della fase, per esempio prendiamo i segnali z_1 e z_2 :

$$\begin{cases} z_1 = \sin(\gamma) \\ z_2 = \sin(\gamma + \Delta\varphi) \end{cases} \qquad \Delta\varphi = \Delta\phi_2 - \Delta\phi_1 \tag{4.4}$$

Dove γ è il rumore comune e $\Delta \phi_1, \Delta \phi_2$ sono le fasi interferometriche.

Questa equazione altro non è che la forma parametrica di una ellisse. Con questa scrittura si vede che il rumore comune è il responsabile del posizionamento dei punti lungo l'ellisse, e la differenza di fase è responsabile dell'eccentricità. Quindi capiamo che il rumore comune non è più un qualcosa che vogliamo eliminare, al contrario è utile per realizzare l'ellisse. Così se noi riuscissimo a fare un *fit* di una ellisse e ricavare l'eccentricità otterremo la differenza di fase tra i due interferometri.

Se andiamo a mettere in un grafico z_1 in funzione di z_2 e z_3 in funzione di z_2 , otteniamo dei segnali come nella figura 4.10. Le ellissi che si formano sono comprese tra $x \in [-1, 1]$ e $y \in [-1, 1]$ essendo ellisse generate da degli *imbalance*.



Figura 4.10: Nell'immagine viene riportato in grafico z_1 in funzione di z_2 e z_3 in funzione di z_2 al variare del tempo di interrogazione a) T = 0 ms, b) T = 20 ms, c) T = 50 ms, d) T = 100 ms e e) T = 200 ms.

Non facciamoci ingannare nell'immagine 4.10(a), cioè i dati con T = 0 ms. Questi dati non rappresentano una ellissi completa. Una ellisse completa deve contenere anche punti che si trovano sui vertici dell'asse maggiore dell'ellisse. Quindi non siamo in grado di eseguire un *fit* ellittico corretto, perché andremo a sottostimare i parametri.

Il rumore che vediamo nelle immagini 4.10, che fa si di non posizionare i nostri punti in una ellisse ben definita, può essere associato a rumori sulla fase. Cioè, ogni punto viene acquisito da una singola sequenza di MZ, quindi ogni punto si posiziona su una ellisse con eccentricità dovuta alla differenza di fase. Se questa differenza rimanesse costante da esperimento ad esperimento i nostri punti si troverebbero su una medesima ellisse disposti solamente dal rumore comune. Quello che si vede invece è che da un esperimento a l'altro abbiamo una variazione di fase. Questo comporta che i punti si disporranno su ellissi diverse ad ogni acquisizione del singolo punto, per questo motivo si osserva il disordine che vediamo nelle figure 4.10. La variazione della differenza di fase è indicatore di una non perfetta correlazione, ossia della presenza di rumore anche non comune.

Andiamo a fare l'analisi mediante un *fit* ellittico, utilizzando la teoria vista nel paragrafo 1.3. così da ottenere i *fit* che si vedono nella figura 4.11 e ricavare le componenti dell'equazione della funzione dell'ellissi 4.5:

$$C_{xx}x^{2} + C_{yy}y^{2} + C_{xy}xy + C_{x}x + C_{y}y - 1 = 0$$
(4.5)

Per i punti con T = 0 ms non potendo eseguire un *fit* ellittico siamo andati ad utilizzare un *fit* lineare dato che stiamo ipotizzando che i punti stiano su un arco con centro uno dei due vertici dell'asse minore.



Figura 4.11: Nell'immagine riportiamo i *fit* fatti sui dati raccolti a differenti tempi di interrogazione. Per essere risultati fisici i *fit* devono rientrare nel quadrato riportato con la linea tratteggiata nera. Questo perché essendo i dati degli *imbalance* norma-lizzati questi non devono mai superare 1 o -1.

Durante il processo di *fit* svolto abbiamo dovuto tenere d'occhio un fattore molto importante, cioè la limitazione che l'ellissi doveva avere. Essendo i dati della figura 4.10 degli *imbalance* l'ellisse di *fit* non doveva superare il limite imposto dal quadrato nero tratteggiato. I *fit* che escono dal limite sarebbero soluzioni non fisiche. Per imporre questo *constrain* siamo andati a definire la matrice di covarianza dei dati V_x (vedi paragrafo 1.3) in modo tale che il *fit* sia rilegato a soluzioni consentite. Ora vediamo quale è il metodo che abbiamo sviluppato, e che tipo di matrice di covarianza dei dati bisogna scrivere. L'ipotesi iniziale è di stare considerando misure indipendenti, quindi questa matrice sarà composta da σ_i^2 che si trovano sulla diagonale.

Ora cerchiamo di capire meglio che valori devono assumere le σ_i^2 . Prendiamo la figura 4.12, come si vede i punti che si trovano vicino ai massimi/minimi della funzione di *imbalance* sono molto meno sensibili al rumore. Al contrario i punti che si trovano

sulla discesa della funzione risentiranno maggiormente del rumore. Quindi bisogna scrivere una matrice che quando *imbalance* si trova vicino a 1 o -1 la varianza σ_i^2 di quel punto deve tendere a 0.



Figura 4.12: Nell'immagine si riporta l'*imbalance* in funzione del rumore comune come scritto nelle equazioni 4.4. Si può notare che le fluttuazioni di rumore comune portano fluttuazioni sull'*imbalance* in funzione della posizione di γ .

così abbiamo scritto la matrice di covarianze nel seguente modo:

$$\sigma_i^2 = \cos\left(\operatorname{asin}(z_i)\right)^2 \tag{4.6}$$

come si vede più mi avvicino ai valori 1 e -1 più i σ_i^2 tendono verso zero. Attraverso i parametri possiamo calcolare la differenza di fase tra i due interferometri $(\Delta \varphi)$ [26], da non confondersi con $\Delta \phi$ che era la differenza di fase tra i due modi del singolo interferometro:

$$\Delta \varphi = \arccos\left(-\frac{C_{xy}}{2\sqrt{C_{xx}C_{yy}}}\right) \tag{4.7}$$

Nella figura 4.13 viene riportato $\Delta \varphi$ in funzione del tempo di interrogazione. Possiamo andare a scrivere la differenza di fase tra gli interferometri nel seguente modo:

$$\Delta \varphi_{2-3} = \Delta \phi_2 - \Delta \phi_3 \qquad \Delta \varphi_{2-1} = \Delta \phi_2 - \Delta \phi_1 \tag{4.8}$$

queste differenze sono riportate nell'immagine 4.13.

Come si vede la $\Delta \varphi$ ha un andamento lineare, e mediante l'analisi di questi dati è possibile estrarre informazioni sul tipo di forza che sta generando la δ .



Figura 4.13: Differenza di fase tra l'interferometro $z_2 \in z_3$ e quello tra $z_1 \in z_2$, entrambi in funzione del tempo di interrogazione T.

Facciamo delle osservazioni per capire di che tipo di gradienti il nostro sistema è afflitto. Consideriamo come in figura 4.14 i nostri tre interferometri e prendiamo δ_{z_2} lo squilibrio dell'interferometro centrale, δ_{z_1} per l'interferometro di sinistra e δ_{z_3} per l'interferometro di destra.



Figura 4.14: Immagine dei nostri tre interferometri con potenziale a doppia buca bilanciato.
Se fosse una forza F costante il potenziale che si genera sarebbe U(x) = Fx (vedi figura 4.15). Le δ_i che si generano saranno definite nel seguente modo:

$$\delta_{z_1} = U(-\frac{3d}{2}) - U(-\frac{5d}{2}) \qquad \delta_{z_2} = U(\frac{d}{2}) - U(-\frac{d}{2}) \qquad \delta_{z_3} = U(\frac{5d}{2}) - U(\frac{3d}{2}) \quad (4.9)$$

dove d è la distanza tra i modi, nel nostro caso $d = 5 \ \mu m$. Se facciamo i conti:

$$\delta_{z_1} = \delta_{z_2} = \delta_{z_3} = Fd \tag{4.10}$$

Due interferometri adiacenti che acquisiscono la medesima fase non dipendendo la δ dalla posizione dell'interferometro. Quindi se i nostri interferometri fossero afflitti da una forza costante ci aspetteremo una differenza di fase (usando 4.8 e la 4.1 e ricordando l'uguaglianza 4.10):

$$\Delta \varphi_{2-3} = \frac{1}{\hbar} \left(\delta_{z_2} - \delta_{z_3} \right) T = 0 \qquad \Delta \varphi_{2-1} = \frac{1}{\hbar} \left(\delta_{z_2} - \delta_{z_1} \right) T = 0 \tag{4.11}$$

ma come possiamo vedere nella figura 4.13 questo non accade.



Figura 4.15: Immagine dei nostri tre interferometri con potenziale a doppia buca con un gradiente lineare.

Pensiamo ad una curvatura, cioè un potenziale armonico $U(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ e nel nostro caso ipotizziamo che sia centrato nell'interferometro centrale, vedi figura 4.16. Se andiamo a valutare le varie δ_i otteniamo:

$$\delta_{z_1} = -\frac{1}{2}m\omega^2 (2d)^2 \qquad \delta_{z_2} = 0 \qquad \delta_{z_3} = \frac{1}{2}m\omega^2 (2d)^2 \tag{4.12}$$

dove 2d è la distanza che si ha tra i due interferometri, che nel nostro caso è 2d = 10 μ m. Se andiamo a calcolare le delta $\Delta \varphi$ come abbiamo fatto per il caso lineare troviamo:

$$\Delta \varphi_{2-3} = \frac{1}{\hbar} \left(\delta_{z_2} - \delta_{z_3} \right) T = -\frac{1}{2} m \omega^2 (2d)^2 \frac{T}{\hbar}$$

$$\Delta \varphi_{2-1} = \frac{1}{\hbar} \left(\delta_{z_2} - \delta_{z_1} \right) T = \frac{1}{2} m \omega^2 (2d)^2 \frac{T}{\hbar}$$
(4.13)

quindi in presenza di una curvatura la nostra $\Delta \varphi$ avrà un andamento lineare rispetto al tempo di interrogazione (T).



Figura 4.16: Immagine dei nostri tre interferometri con potenziale a doppia buca in presenza di una curvatura.

Dall'immagine 4.13, dove si osserva un andamento lineare della $\Delta \varphi$ in funzione di T è il primo indicatore che il nostro sistema è sottoposto ad potenziale armonico indesiderato.

Con questo tipo di analisi non siamo sensibili al segno della fase. Ricordiamo che la fase viene ricavata dall'eccentricità e questo termine non può assumere valori negativi, quindi non abbiamo informazioni del segno direttamente dal *fit* ellittico.

Quello che possiamo fare è ricavare il valore della frequenza della curvatura. Andando a fare un *fit* lineare dei dati mostrati nella figura 4.13 possiamo ottenere il valore di coefficienti angolari delle rette scritte nella forma delle equazioni 4.13. Quello che si nota subito dai grafici nell'immagine 4.13 è che l'ipotesi di curvatura centrata nell'interferometro centrale è sbagliata. Questo perché si dovrebbe avere l'interferometro centrale (z_2) bilanciato al contrario di quello che si vede nei dati nell'immagine 4.8. Quindi il centro è spostato rispetto ai tre interferometri.

Calcoliamo ora il valore della frequenza della curvatura f nei due casi otteniamo:

$$f_{2-3} = (2.4 \pm 0.4) Hz$$
 $f_{2-1} = (2.1 \pm 0.8) Hz$ (4.14)

le due frequenza sono uguale, questo è la conferma che il sistema è sottoposto ad una curvatura, ma purtroppo con questa analisi non riusciamo a sapere se è confinatene o anticonfinatene.

Esperimenti futuri si baseranno su inserire una δ controllabile così da poter modificare la differenza di fase e andare a controllare l'eccentricità allargando o restringendo l'ellisse.

Capitolo 5 Doppia buca con atomi interagenti

In questo capitolo parleremo dei possibili utilizzi dell'interazione atomica per ridurre le fluttuazioni dell'*imbalance*. Presenteremo anche le simulazioni numeriche svolte per tentare di riprodurre l'andamento dei dati sperimentali. In particolare siamo andati a svolgere delle simulazioni del nostro sistema in presenza di rumore AC e DC, così da capire se questi termini sono sufficienti a riprodurre i risultati osservati. Infine parleremo della possibilità di realizzare stati *number squeezed* con l'utilizzo dell'interazione repulsiva.

Attraverso l'interazione possiamo realizzare stati che ci permettano di andare sotto lo *shot noise*. Mediante l'interazione riusciamo a produrre degli stati che hanno una incertezza sul numero di atomi che può scendere sotto il limite imposto dallo *shot noise*, vedi paragrafo 1.2.1. Questi stati sono chiamati stati *number squeezed*.

Una futura implementazione si basa sulla possibilità di modificare lo stato di ingresso della sequenza di Mach-Zehnder, con stati *number squeezed*, per migliorare la nostra risoluzione di fase [28].

Per realizzare uno stato squeezed bisogna separare il nostro condensato nei due modi della trappola a doppia buca in presenza di interazione. Ciò deve avvenire rimanendo nello stato fondamentale del sistema, ossia alzando la barriera in maniera adiabatica. L'utilizzo di interazione repulsiva ci permette di realizzare uno stato number squeezed, ossia con l'incertezza sul numero di atomi al di sotto del limite shot noise (vedi teoria 1.2.1 equazione 1.33) con un fattore di squeezing:

$$\xi_N = \left(\frac{E_J}{N^2 E_c / 4 + E_J}\right)^{(1/4)} \tag{5.1}$$

Nelle simulazioni che vedremo in questo capitolo saranno svolte nell'ipotesi di essere adiabatici. Nell'ultimo paragrafo capiremo se questa ipotesi è corretta.

5.1 Riduzione del rumore indotta dall'interazione

Una serie di esperimenti che abbiamo svolto riguardano la possibilità dell'utilizzo dell'interazione repulsiva per ridurre le fluttuazioni dell'*imbalance* z. L'esperimento che abbiamo eseguito consiste nel separare del nostro condensato nei due modi della doppia buca in presenza di interazione repulsiva. In particolare abbiamo alzato la barriera in un tempo pari a T = 200 ms con l'obbiettivo di essere adiabatici, quindi molto maggiore dei 10 ms utilizzati nell'esperimento del Mach-Zehnder. La generazione del valore opportuno dell'interazione è resa possibile attraverso il controllo del campo magnetico, attorno ad una risonanza di Feshbach (paragrafo 2.2), e avere una lunghezza di scattering positiva a > 0. Nella figura 5.1 vengono riportati gli *imbalance* di tre doppie buche in funzione delle sequenze effettuate (*Shots*), in presenza di interazione pari a $a = 0a_0$, $a = 0.35a_0$, $a = 1.5a_0$, $a = 3a_0$ e $a = 4.5a_0$. Come si vede c'è un effetto di riduzione sulle fluttuazioni molto evidente.



Figura 5.1: Nelle immagini riportiamo gli *imbalance* di tre doppie buche (quella di sinistra, quella centrale e quella di destra) in funzione degli esperimenti svolti (*Shots*). Questi *imbalance* si riferiscono all'esperimento di separazione del condensato nei due modi della doppia buca in presenza dell'interazione. In particolare per $a = 0a_0$, $a = 0.35a_0$, $a = 1.5a_0$, $a = 3a_0$ e $a = 4.5a_0$. Quello che si nota è una grossa riduzione delle fluttuazioni.

Cerchiamo di capire meglio perché la presenza dell'interazione repulsiva provoca questa riduzione delle fluttuazioni. In presenza di uno sbilanciamento nella profon-

dità delle due buche, se gli atomi interagiscono repulsivamente, anche un piccolo *imbalance* z fa si che il potenziale chimico nella buca di potenziale più profonda diventi uguale a quello della buca adiacente.

Andiamo ora a quantificare questa riduzione andando a studiare la varianza dell'*imbalance* (σ_z) al variare dell'interazione. Come si vede in figura 5.2 si osserva una riduzione della σ_z come ci aspettavamo guardando la figura 5.1.



Figura 5.2: Nell'immagine riportiamo la deviazione standard di z in funzione dell'interazione. Come si vede la σ_z si va a ridurre all'aumento dell'interazione. Nell'immagine vengono riportate due simulazioni svolte per cercare di replicare i dati risolvendo l'hamiltoniana di Bose-Hubbard (paragrafo 1.2.1) con un numero di atomi differenti, N = 3000 e N = 6000. La linea orizzontale tratteggiata indica il valore dello shot noise per N = 6000.

Andiamo a definire il limite di *shot noise* per la nostra osservabile z (*imbalance*), così da capire se l'utilizzo dell'interazione permetta di andare al di sotto di questo limite. Partiamo dallo scrivere il nostro stato nella base degli stati di Fock introdotti in 1.30 :

$$|n\rangle = \left|\frac{N}{2} + n\right\rangle_l \left|\frac{N}{2} - n\right\rangle_r \tag{5.2}$$

Andiamo a ricordare che lo *shot noise* per le fluttuazioni quantistiche di uno stato coerente della variabile n sono [27]:

$$\sigma_k^2 = \frac{N}{2} \tag{5.3}$$

Ora prendiamo l'equazione che lega n a z:

$$z = \frac{\left(\frac{N}{2} - k - \left(\frac{N}{2} + k\right)\right)}{N} = \frac{-2k}{N}$$
(5.4)

in questo modo posso definire lo shot noise per z:

$$\sigma_z^2 = \frac{4}{N^2} \sigma_k^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma_z^2 = \frac{4}{N^2} \frac{N}{2} = \frac{2}{N}$$
$$\sigma_z \sim \sqrt{\frac{2}{N}} \tag{5.5}$$

questo è il valore che abbiamo riportato nella figura 5.2 per N = 6000.

Come possiamo osservare, non siamo in grado di ridurre la varianza di σ_z al di sotto dello *shot noise*. Abbiamo quindi deciso di effettuare una simulazione Bose-Hubbard per capire quanto siamo distanti dalla possibilità di superare il limite *shot noise*. Questa simulazione viene svolta andando a trovare gli autostati dell'hamiltoniana 1.26. Si noti che per semplificare lo studio, assumendo di essere adiabatici nei 200 ms di rampa. Pertanto sarà sufficiente calcolare lo stato fondamentale atomico per la doppia buca nella configurazione finale. Per prima cosa dobbiamo quantificare le fluttuazioni del parametro delta, ossia della differenza in energia tra le due buche. Per fare questo ricaviamoci analiticamente lo squilibrio δ che è necessario a riprodurre i nostri *imbalance* nel caso di interazione nulla. Quindi prendiamo l'equazione Josephson 1.21 e aggiungiamo il termine dovuto allo squilibrio δ :

$$H = N^{2}U\frac{z^{2}}{4} - JN\sqrt{1 - z^{2}}\cos(\varphi) + N\delta z$$
 (5.6)

Vogliamo ricavare una stima di δ a partire da una misura di z. Quindi andiamo a derivare H in funzione di z e lo poniamo a 0:

$$\frac{\partial H}{\partial z} = \frac{N^2 U z}{2} - \frac{J N z}{\sqrt{1 - z^2}} + N\delta = 0$$
(5.7)

Conoscendo il tunneling finale tra i due siti (J), il numero di atomi e le misurazioni di z possiamo ricavare una stima di δ . Il tunneling lo ricaviamo dalla soluzione numerica della equazione di Schrodinger stazionari $E\psi = H\psi$ per una sistema sottoposto ad un potenziale a nota di battimento (BNSL), con profondità uguali a quella usate nell'esperimento, ossia $V_1 = 400$ nK $V_2 = 350$ nK $V_3 = 270$ nK. Dalla teoria vista nel paragrafo 1.2 $J = E_a - E_s$, che dalle simulazioni è pari a $\simeq 2Hz$. Invece il numero di atomi e la z si ottengono direttamente dalle misure fatte mediante il sistema di *imaging* al termine della sequenza di alzamento della barriera nel caso di U = 0.

Dalla 5.7 otteniamo:

$$\delta = \frac{Jz}{\sqrt{1-z^2}} \tag{5.8}$$

Ipotizziamo che il termine δ non vari significativamente quando vengono effettuate misure con interazione diverse da zero.

Per determinare le fluttuazioni quantistiche, che eventualmente superino lo shot noise, in presenza dell'interazione e del rumore sistematico abbiamo usato l'hamiltoniana a molti corpi di Bose-Hubbard. Per farlo, oltre a conoscere la δ , abbiamo bisogno di definire i termini che si hanno nell'equazione 1.25 del paragrafo 1.2.1. Quindi siamo andati a calcolare ε_e , $\varepsilon_g \in \psi_e$, ψ_g ricavando gli autovalori e autofunzioni dello stato fondamentale e eccitato in presenza di interazione mediante una GPE 1D.

Sempre nella figura 5.2 vengono riportati i risultati delle simulazioni svolte del modello Bose-Hubbard (paragrafo 1.2.1) per due diversi valori del numero di atomi. Come si vede è possibile andare sotto al limite dello *shot noise* già con una piccola interazione.

Una cosa che si nota nelle simulazioni è la differenza di andamento al variare del numero di atomi. Lo stesso comportamento si vede anche nei dati raccolti. Questo accade perché varia il contributo del termine di interazione (vedi equazione 1.8).

Chiaramente i dati sperimentali si discostano dalle nostre simulazioni. Nei prossimi due paragrafi analizziamo due possibili cause di tale differenza, ossia la non corretta stima dell'energia di interazione a causa dell'utilizzo di una GPE 1D e la presenza di rumore nel sistema di aggancio in frequenza dei laser.

5.2 Definizione del termine di interazione

Il programma GPE che abbiamo utilizzato è un programma unidimensionale. Sapendo che nell'approssimazione di campo medio l'hamiltoniana d'interazione (capitolo 1.1) corrisponde all'energia di interazione E_{int} :

$$E_{int} = \frac{1}{2}g \int d^3 \vec{r} \bar{\psi}(\vec{r}) \bar{\psi}(\vec{r}) \psi(\vec{r}) \psi(\vec{r})$$
(5.9)

dove:

$$g = \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m} \tag{5.10}$$

possiamo separare la funzione d'onda longitudinale da quella radiale:

$$\hat{H}_{int} = \frac{1}{2}g \int \bar{\psi}(z)\bar{\psi}(z)\psi(z)\psi(z)dz \int \bar{\psi}(r)\bar{\psi}(r)\psi(r)\psi(r)2\pi r dr$$
(5.11)

Nell'ipotesi che la trappola radiale sia armonica (ω_{rad}) possiamo assumere per un gas debolmente interagente:

$$\psi(r) = \sqrt{\frac{m\omega_{rad}}{\hbar\pi}} e^{-\frac{m\omega_{rad}}{\hbar}\frac{r^2}{2}}$$
(5.12)

Integrando lungo la direzione radiale:

$$g_{1D} = g \int \psi^{\dagger}(r)\psi^{\dagger}(r)\psi(r)\psi(r)2\pi r dr \qquad (5.13)$$

otteniamo un g_{1D} effettiva per la GPE 1D:

$$g_{1D} = \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m} \frac{1}{2\pi \frac{m\omega_{rad}}{\hbar}} \tag{5.14}$$

Questa approssimazione è valida finché la lunghezza di *scattering* non è sufficientemente grande da causare un allargamento della funzione d'onda reale lungo la direzione radiale oltre il valore della lunghezza dell'oscillatore armonico $\sqrt{\hbar/(m\omega_{rad})}$. Per correggere questa sovrastima dell'energia di interazione per grandi valori di a_s abbiamo effettuato delle simulazioni per quantificare una opportuna correzione. Poiché $\omega_{rad} \approx 2\pi 200 Hz$ è circa uguale al confinamento longitudinale del condensato nella singola buca in assenza di barriera, simulando la funzione d'onda longitudinale abbiamo ridotto il confinamento radiale finché la nuvola non raggiungesse dimensioni sferiche.

Per chiarire l'idea di questa simulazione riporto qui un esempio. Assumendo una lunghezza di scattering pari a $a_s = 3a_0$ con un confinamento longitudine e radiale di 200 Hz il programma GPE 1D prevede una larghezza longitudinale di 1.24 μm e una dimensione radiale di $\sqrt{\hbar/(m\omega_{rad})} = 1.14 \ \mu m$ ma ciò è chiaramente sbagliato perché la trappola di partenza aveva simmetria sferica. Viceversa con la nostra correzione, usando ω_{rad} effettivo di $2\pi 170$ Hz otteniamo un condensato sferico. Per ogni valore della lunghezza di scattering abbiamo quindi quantificato un fattore correttivo da apportare alla g_{1D} da utilizzare nelle nostre simulazioni (vedi figura 5.3).



Figura 5.3: Nella figura riportiamo la costante di interazione ricavata dalla correzione fatta utilizzando GPE 1D e nel caso di trappola harmonica senza correzioni, entrambi in funzione della lunghezza di *scattering*.

Purtroppo anche questa correzione non è sufficiente a spiegare la discrepanza tra i dati sperimentali e quelli simulati, vedi figura 5.4.



Figura 5.4: Nell'immagine riportiamo la deviazione standard di z in funzione dell'interazione. Vengono riportate anche quattro simulazioni svolte per cercare di replicare i dati: le linee continue vengono simulate risolvendo l'hamiltoniana di Bose-Hubbard (paragrafo 1.2.1) con un numero di atomi differenti, N = 3000 e N = 6000 con il parametro g_{1D} senza correzione della sovrastima. Le linee tratteggiate invece rappresentano le simulazioni con il termine g_{1D} con la correzione. La linea orizzontale tratteggiata indica il valore dello *shot noise* per N = 6000.

5.3 Simulazione alzamento della barriera con rumore

In questa sezione abbiamo studiato l'effetto del rumore AC in frequenza dei laser utilizzati per realizzare il potenziale a doppia buca, da noi misurato e riportato nel paragrafo 3.2.2.

Non riuscendo a fare una simulazione dinamica della Bose-Hubbard abbiamo optato per studiare il problema usando la sola GPE 1D dinamica. Per inserire l'effetto del rumore in frequenza nelle nostre simulazioni è stato sufficiente dare una dipendenza temporale al vettore d'onda $K_N(t)$ dei laser nella formula del reticolo a nota di battimento:

$$V(x) = V_1 sin^2(k_1 x) + V_2 sin^2(k_2 x + \phi_2 + 2K_{N64}(t)d) + \dots + V_3 sin^2(k_3 x + \phi_3 + 2K_{N120}(t)d)$$
(5.15)

Per valuta in maniera indipendente il contributo dei due rumore abbiamo effettuato due simulazioni uno con $K_{N64}(t) \neq 0$ e $K_{N120}(t) = 0$ e viceversa, vedi figura 5.5.



Figura 5.5: Nelle due immagini viene sempre riportato la deviazione standard si z in funzione dell'interazione. Nella prima riportiamo anche la simulazione svolta andando a introdurre il rumore di frequenza del laser a $\lambda_2 = 1064$ nm. Nella seconda figura invece per quello a $\lambda_3 = 10120$ nm. Con profondità uguali a quella usate nell'esperimento, ossia $V_1 = 400$ nK $V_2 = 350$ nK, e alzando la barriera fino a $V_3 = 270$ nK nella dinamica, al variare dell'interazione.

Come possiamo osservare dalla figura anche il rumore AC osservato non riesce a spiegare la discrepanza tra i risultati sperimentali e quelli simulati. Si renderà quindi necessario identificare ulteriori sorgenti di rumore incontrollate come le vibrazioni dello specchio di retroriflessioni dei laser di reticolo o fluttuazioni di campi magnetici esterni.

5.4 Realizzazione di stato squeezed

Mediante simulazioni dinamiche della GPE 1D non siamo riusciti a spiegare il divario che si ha tra le simulazioni e dati sperimentali. Per riuscire a risolvere questo problema dovremmo realizzare una simulazioni dinamica della Bose-Hubbard, ma questo non è una cosa banale. Quindi prima di realizzare questa simulazione cerchiamo di capire se l'ipotesi iniziale fatta, cioè di rimanere sempre adiabatici durante la dinamica, è effettivamente una ipotesi rispettata.

Per rimanere adiabatici occorre che la frequenza di plasma finale (introdotta nel capitolo 1.2.1), che rappresenta la frequenza caratteristica del sistema, sia non inferiore all'inverso del tempo di separazione (T_e) .

Per stimare lo squeezing ottenibile per tempi di separazione diversi (T = 20 ms, T = 100 ms e T = 200 ms) abbiamo per ogni caso fissato la frequenza di plasma necessaria e ricavato al variare del parametro U l'energia di tunneling finale necessaria, vedi linee blu in figura 5.6. Come si può notare maggiore è l'energia di interazione minore è l'energia di tunneling necessaria per garantire il valore della frequenza di plasma richiesto. Tuttavia l'energia di tunneling finale, a causa della modifica delle funzioni d'onda simmetrica e antisimmetrica dovuta all'interazione, aumenta all'aumentare di U, vedi linea rossa figura 5.6.

Il punto di intersezione tra le due curve ci da una stima della lunghezza di *scattering* necessaria per rimanere adiabatici.



Figura 5.6: Nelle tre immagini riportiamo, al variare del tempo in cui alziamo la barriera (T = 20 ms, T = 100 ms e T = 200 ms), il confronto tra il *tunneling* richiesto per rimanere adiabatico (in blu) e il *tunneling* effettivo calcolato mediante la simulazione.

Riprendendo le misure fatte all'inizio di questo capitolo, cioè quelle dell'alzamento della barriera in 200 ms in presenza di interazione, si può affermare che in quel caso stiamo rompendo l'adiabaticità. In quelle misure siamo arrivati a lunghezze di *scattering* pari a $4.5a_0$, ma come si vede nell'immagine 5.6 per T = 200 ms necessitiamo di una energia di interazione dell'ordine di 0.12 Hz per rimanere adiabatici, che corrisponderebbe a circa $a_s \simeq 12a_0$. In questo caso possiamo valutare il termine di *squeezing* che è pari a 0.08.

Questa stima ci convince di realizzare in futuro una simulazione molti corpi dinamica che tenga conto dei tempi finiti di innalzamento della barriera e delle possibile fonti di rumore AC e DC.

Capitolo 6 Conclusioni e Prospettive Future

In questo lavoro di tesi abbiamo descritto la realizzazione di un *array* di potenziale a doppia buca per atomi mediante un innovativo metodo che sfrutta la sovrapposizione di tre reticoli ottici con lunghezze d'onda commensurate.

Durante il mio periodo di tesi lavorando con condensati di Bose-Einstein di potassio 39 (^{39}K), sono riusciti a caricare tre doppie buche e operare tre interferometri contemporaneamente. Le misure delle fasi interferometriche sono stati possibili tramite le misure della popolazione atomica finale nei due modi spaziali, dopo una sequenza di "*Beam-Splitter*" eseguiti in trappola. Anche se tali misure sono caratterizzate da grandi fluttuazioni, queste sono risultate correlate.

Questo ci ha permesso di poter svolgere degli studi di tipo gradiometrico, cioè di fare la differenza tra due segnali interferometrici per eliminare il rumore comune. Abbiamo anche ottenuto l'informazione sulla differenza di fase tra due interferometri vicini e rivelando la presenza di una curvatura residua di pochi Hz.

Un altro studio che abbiamo riportato riguarda l'alzamento della barriera del potenziale a doppia buca in presenza di interazione. Come abbiamo visto dai dati si ha una grossa riduzione delle fluttuazioni delle popolazioni finali sperimentali. Cercando di simulare i dati ci siamo accorti che tale riduzione è comunque inferiore alle aspettative. Anche introducendo le fluttuazioni in frequenza dei laser di trappola, da noi misurati, non siamo al momento in grado di giustificare i dati sperimentali. Tuttavia un'analisi approssimata dell'ipotesi di adiabaticità durante l'alzamento della barriera sembra suggerire che sarebbero necessari tempi di innalzamento più lunghi. Diventa quindi necessario effettuare una simulazione dinamica della Bose-Hubbard. Esperimenti futuri riguarderanno la possibilità di indurre una curvatura esterna nota per verificare la capacità del nostro apparato di effettuare misure accurate.

Misure successive riguarderanno la possibilità di studiare fenomeni di decoerenza causati dall'interazione: in particolare sarà interessante osservare se, una volta cancellata la lunghezza di *scattering*, le collisioni elastiche a tre copri limitino il tempo di coerenza dell'interferometro.

Bibliografia

- Peters, A., Chung, K. Y., Chu, S. (1999). Measurement of gravitational acceleration by dropping atoms. Nature, 400(6747), 849-852.
- [2] Rosi, G., Sorrentino, F., Cacciapuoti, L., Prevedelli, M., Tino, G. M. (2014). Precision measurement of the Newtonian gravitational constant using cold atoms. Nature, 510(7506), 518-521.
- [3] Canuel, B., Leduc, F., Holleville, D., Gauguet, A., Fils, J., Virdis, A., Bouyer, P. (2006). Six-axis inertial sensor using cold-atom interferometry. Physical review letters, 97(1), 010402.
- [4] Elder, B., Khoury, J., Haslinger, P., Jaffe, M., Müller, H., Hamilton, P. (2016). Chameleon dark energy and atom interferometry. Physical Review D, 94(4), 044051.
- [5] Masi, L., et al. "Spatial Bloch Oscillations of a Quantum Gas in a "Beat-Note" Superlattice." Physical Review Letters 127.2 (2021): 020601.
- [6] C.J. Pethick, H. Smith, "Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases", Cambridge University Press 2002.
- [7] Spagnolli, G., Semeghini, G., Masi, L., Ferioli, G., Trenkwalder, A., Coop, S., Fattori, M. (2017). "Crossing over from attractive to repulsive interactions in a tunneling bosonic Josephson junction". Physical review letters, 118(23), 230403.
- [8] Rudolf Gati, "Bose-Einstein Condensates in a Single Double Well Potential", PhD disertation, Heidelberg University (2007).
- [9] Grimm, R., Weidemüller, M., Ovchinnikov, Y. B. (2000). "Optical dipole traps for neutral atoms. In Advances in atomic, molecular, and optical physics" (Vol. 42, pp. 95-170). Academic Press.
- [10] Morsch, O., Oberthaler, M. (2006). "Dynamics of Bose-Einstein condensates in optical lattices". Reviews of modern physics, 78(1), 179.
- [11] NW Ashcroft and ND Mermin. "Solid state physics" int. ed. Holt-Saunders, Philadelphia, 16, 1976.

- [12] Javanainen, J., Ivanov, M. Y. (1999). Splitting a trap containing a Bose-Einstein condensate: Atom number fluctuations. Physical Review A, 60(3), 2351.
- [13] "Note del professore Marco Prevedelli", Università di Bologna , marco.prevedelli@unibo.it.
- [14] W. J. Metzger, "Statistical Methods in Data Analysis", Radboud Universiteit Nijmegen Nijmegen, The Netherlands, 2010.
- [15] Panou, G., Agatza-Balodimou, A. M. (2020). "Direct and indirect estimation of the variance-covariance matrix of the parameters of a fitted ellipse and a triaxial ellipsoid". ResearchGate, 19.
- [16] Ghilani, C., and P. Wolf. 2006. Adjustment computations: spatial data analysis. 4th ed. New York: Wiley.
- [17] Deakin, R. E. 2005. Notes on least squares. School of Mathematical and Geospatial Science, RMIT University, Melbourne, Australia.
- [18] Manuele Landini. "A tunable Bose-Einstein condensate for quantum interferometry." PhD thesis, University of Trento, 2012.
- [19] Manuele Landini, Sanjukta Roy, Giacomo Roati, Andrea Simoni, Massimo Inguscio, Giovanni Modugno, and Marco Fattori. "Direct evaporative cooling of 39 k atoms to bose-einstein condensation." Physical Review A, 86(3):033421, 2012.
- [20] Giacomo Roati, Matteo Zaccanti, C dErrico, Jacopo Catani, Michele Modugno, Andrea Simoni, Massimo Inguscio, and G Modugno. "K 39 bose-einstein condensate with tunable interactions." Physical review letters, 99(1):010403, 2007.
- [21] Chiara d'Errico, Matteo Zaccanti, Marco Fattori, Giacomo Roati, Massimo Inguscio, Giovanni Modugno, and Andrea Simoni. "Feshbach resonances in ultracold 39k". New Journal of physics, 9(7):223, 2007.
- [22] Eric D Black. "An introduction to pound-drever-hall laser frequency stabilization". American journal of physics, 69(1):79–87, 2001.
- [23] Gianmaria Milani, Benjamin Rauf, Piero Barbieri, Filippo Bregolin, Marco Pizzocaro, Pierre Thoumany, Filippo Levi, and Davide Calonico. "Multiple wavelength stabilization on a single optical cavity using the offset sideband locking technique". Optics letters, 42(10):1970–1973, 2017.
- [24] James I Thorpe, K Numata, and J Livas. "Laser frequency stabilization and control through offset sideband locking to optical cavities". Optics express, 16(20):15980 - 15990, 2008.

- [25] Antezza, M., Pitaevskii, L. P., Stringari, S. (2004). Effect of the Casimir-Polder force on the collective oscillations of a trapped Bose-Einstein condensate. Physical Review A, 70(5), 053619.
- [26] Foster, G. T., Fixler, J. B., McGuirk, J. M., Kasevich, M. A. (2002). Method of phase extraction between coupled atom interferometers using ellipse-specific fitting. Optics letters, 27(11), 951-953.
- [27] Eckert, K., Hyllus, P., Bruß, D., Poulsen, U. V., Lewenstein, M., Jentsch, C., Ertmer, W. (2006). Differential atom interferometry beyond the standard quantum limit. Physical Review A, 73(1), 013814.
- [28] Landini, M., Fattori, M., Pezzè, L., Smerzi, A. (2014). Phase-noise protection in quantum-enhanced differential interferometry. New Journal of Physics, 16(11), 113074.

Ringraziamenti

Ringrazio tutte le persone che mi hanno aiutato in questo viaggio di studi, guidandomi, insegnandomi e facendomi amare sempre di più il mondo dei "gas quantistici". Per primo vorrei ringraziare il mio relatore prof. Marco Fattori che durante questo percorso mi ha insegnato ogni giorno ad essere più preciso, ad andare sempre più a fondo in qualsiasi argomento, trasmettendomi tutta la sua passione e il suo entusiasmo. Volevo anche ringraziarlo per la sua pazienza nei mie confronti durante la scrittura della tesi, comprendendo le mie difficoltà. Da lui ho imparato tantissimo e sono certo che avrò tante altre cose da imparare. Ringrazio Tommaso Petrucciani e Leonardo Masi che mi hanno seguito ogni giorno in laboratorio, insegnandomi come bisogna lavorare in un laboratorio e facendomi appassionare sempre di più. Durante tutto il percorso di studio ho conosciuto persone interessanti e amici importanti che spero di poter frequentare anche successivamente e che porterò sempre nel mio cuore, li ringrazio tanto per la loro collaborazione. Non posso dimenticare i miei professori delle scuole superiori Pratesi RIccardo e Luisa Marini che sono state delle persone importante, i primi a credere in me e ha sostenermi per iniziare un percorso di studi non semplice. Doverosi ringraziamenti vanno alla mia compagna Irene per essermi stata accanto anche nei momenti più intensi di studio, quando le mie attenzioni verso di lei non erano al massimo. La ringrazio di avermi sempre sostenuto e spronato a superare le difficoltà, non avrei voluto altro che lei al mio fianco in questo percorso. Un ringraziamento va anche ai miei zii e al mio nonno Carlo che hanno sempre creduto in me. Un pensiero particolare a mio nonno Ottavio che ci ha lasciato in questo periodo e che era entusiasta del mio percorso di studi. Gli ultimi ringraziamenti, ma non per importanza, vanno alla mia famiglia, mia mamma, mio babbo e mio fratello che mi hanno sempre incitato a fare quello che mi piaceva, anche se le previsioni non erano delle migliori, visti i miei problemi, li ringrazio davvero col tutto il cuore.