

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FIRENZE

SCUOLA DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN FISICA ED ASTROFISICA

TESI DI LAUREA MAGISTRALE

**Creazione di stati atomici coerenti tramite
transizioni proibite in gas di fermioni
ultrafreddi**

**Generation of coherent atomic states through
forbidden transitions in ultracold Fermi gases**

Relatore

Dott. Leonardo Fallani

Candidato

Lorenzo Francesco Livi

Anno Accademico 2014/2015

Indice

Introduzione	1
1 L'Itterbio	4
1.1 Principali proprietà atomiche	5
1.2 Transizione $^1S_0 \rightarrow ^3P_0$	5
1.2.1 Caso fermionico	6
1.2.2 Caso bosonico	8
1.3 Proprietà magnetiche della transizione	9
2 Reticoli ottici	11
2.1 Potenziale di dipolo elettrico	12
2.2 Proprietà di un potenziale ottico periodico	13
2.3 Stati di Wannier	15
2.4 <i>Light shift</i> differenziali e lunghezza d'onda magica	17
2.5 Regime di Lamb-Dicke	19
3 Interazione tra fermioni ultrafreddi	22
3.1 Considerazioni di carattere generale	22
3.2 Lo pseudopotenziale	24
3.3 Spin changing collisions	26
3.4 Fermioni interagenti in un reticolo ottico	27
3.4.1 Sistema di due fermioni interagenti	28
3.4.2 Il modello di Fermi-Hubbard	30
3.4.3 Simmetrie dell'hamiltoniana	32
3.4.4 Limiti del modello di Fermi-Hubbard	33
3.4.5 Tempo di tunneling	33
3.5 Atomi fortemente interagenti - Il modello di Busch	34
4 Sistema sperimentale	37
4.1 Sorgente laser a 578 nm	37
4.1.1 Funzionamento	38

4.1.2	Misura della frequenza dei modi della cavità ULE	41
4.1.3	Caratterizzazione del drift e della temperatura critica della cavità ULE	44
4.2	Sistema di raffreddamento e intrappolamento	47
5	Spettroscopia della transizione d'orologio $^1S_0 \rightarrow ^3P_0$	50
5.1	Preparazione del campione atomico	50
5.2	Calibrazione del reticolo	52
5.3	Eccitazione della transizione	55
5.4	Spettroscopia di un campione polarizzato - Caratterizzazione del drift	58
5.5	Spettroscopia SU(2)	63
5.5.1	Stati a due particelle	63
5.5.2	Mixing magnetico	65
5.5.3	Un esempio di misura di spettroscopia	67
5.6	Spettroscopia SU(2) al variare del campo magnetico	72
6	Oscillazioni di spin interorbitali	76
6.1	Dinamica di spin-exchange	77
6.2	Stern-Gerlach ottico	79
6.3	Preparazione del campione atomico	80
6.4	Rivelazione delle oscillazioni	85
6.5	Oscillazioni di spin al variare della profondità di reticolo	88
6.5.1	Estensione del modello di Busch al caso di un potenziale reticolare	90
6.5.2	Determinazione di a_{eg}^- dai dati sperimentali	95
6.6	Fattore di Franck - Condon	99
6.7	Oscillazioni di spin al variare del campo magnetico	102
6.8	Smorzamento delle oscillazioni	104
6.9	Misura dell'accuratezza della simmetria SU(N) in atomi di Itterbio	105
	Conclusioni	108
	Bibliografia	109

Introduzione

Alla base di numerosi dei progressi raggiunti nel corso degli ultimi anni nell'ambito della fisica atomica sta la manipolazione di sistemi di atomi ultrafreddi intrappolati all'interno di reticoli ottici [1]. Questi rappresentano infatti uno strumento ideale per controllare in modo estremamente accurato molteplici delle proprietà del sistema atomico, quali ad esempio la dimensionalità, il numero di particelle interagenti in ciascun sito reticolare o le proprietà di moto del centro di massa degli atomi.

La possibilità di bloccare lo stato di moto delle particelle intrappolate nel reticolo, ad esempio, ha aperto la strada a misure di spettroscopia estremamente precise delle frequenze delle transizioni atomiche, premessa necessaria alla realizzazione degli orologi ottici reticolari [2].

Non meno importanti sono i risultati che grazie ai reticoli ottici sono stati raggiunti nell'ambito della fisica dei sistemi a molti corpi, in particolare riguardo all'osservazione di transizioni di fase quantistiche [3]. La forte analogia fra gli elettroni in un cristallo e gli atomi ultrafreddi all'interno di un reticolo ottico apre inoltre alla possibilità di usare questi ultimi come simulatori quantistici di sistemi caratteristici della materia condensata [4].

Questi due ambiti della ricerca, quello legato alle misure di spettroscopia di altissima precisione su sistemi atomici e quello legato invece alla simulazione di sistemi quantistici a molti corpi sono stati a lungo completamente sconnessi l'uno rispetto all'altro. Mentre alla base della realizzazione degli orologi ottici reticolari sta la spettroscopia di campioni atomici a bassissima densità di metalli con due elettroni di valenza, la simulazione di hamiltoniane quantistiche è stata resa possibile dalla realizzazione della condensazione di Bose-Einstein e della degenerazione di Fermi in campioni atomici di metalli alcalini a densità più elevate. Un campo molto promettente della ricerca, sviluppato nel corso degli ultimi anni, è quello di unire questi due ambiti tramite la realizzazione di gas degeneri di atomi a due elettroni.

Questa classe di atomi è caratterizzata da un livello metastabile 3P_0 connesso allo stato fondamentale 1S_0 per mezzo di una transizione doppiamente proibita. Negli isotopi fermionici, il completo disaccoppiamento dello spin

nucleare I da quello elettronico J in questi due stati fa sì che gli atomi a due elettroni siano caratterizzati da una simmetria $SU(N)$ di spin (con $N = 2I + 1$) [4, 5] in virtù della quale la lunghezza di scattering associata a due atomi interagenti negli stati 3P_0 e 1S_0 non dipende dallo stato di spin delle due particelle. La possibilità di controllare coerentemente questi due gradi di libertà, quello di spin e quello elettronico, fa degli atomi a due elettroni dei candidati ideali per la realizzazione di orologi ottici reticolari [6], processori quantistici [7] e per la simulazione di fenomeni legati al magnetismo nella materia condensata.

In questo lavoro di tesi, la cui realizzazione è avvenuta nell'ambito dell'esperimento dedicato allo studio di gas degeneri di Itterbio attualmente in corso presso il dipartimento di Fisica ed Astronomia dell'Università di Firenze, è stata innanzitutto effettuata una caratterizzazione spettroscopica della transizione $^1S_0 \rightarrow ^3P_0$ in un campione di ^{173}Yb fermionico degenerare intrappolato in un reticolo ottico tridimensionale in regime di Lamb-Dicke. Le misure di spettroscopia sono state effettuate sia su campioni polarizzati in un unico stato di spin, sia su campioni caratterizzati da una miscela di due stati di spin ed hanno messo in luce, nell'ultimo caso, la presenza di picchi dovuti all'interazione fra atomi in siti reticolari doppiamente occupati.

Alle misure di spettroscopia è seguita l'osservazione, realizzata per la prima volta proprio nell'ambito di questo lavoro di tesi, dell'evoluzione coerente del sistema a due particelle in cui un atomo nello stato fondamentale 1S_0 scambia il suo spin con un atomo nello stato metastabile 3P_0 come conseguenza di proprietà fondamentali della meccanica quantistica legate alla simmetria.

Durante questo lavoro di tesi, l'apparato sperimentale già presente in laboratorio è stato integrato con un setup ottico avente lo scopo di trasportare e focalizzare sugli atomi la radiazione utilizzata per eccitare la transizione $^1S_0 \rightarrow ^3P_0$. In corrispondenza della cella in vetro che ospita gli atomi al termine del raffreddamento è stata inoltre posizionata una bobina necessaria a produrre il campo magnetico utilizzato per caratterizzare spettroscopicamente la transizione e la dinamica di spin.

A questi interventi sul sistema sperimentale è seguita innanzitutto la ricerca della riga di transizione, la cui individuazione è resa complessa dalla larghezza naturale estremamente ridotta. Una volta individuata la riga di transizione, sono state effettuate una serie di misure di spettroscopia che hanno permesso di caratterizzare l'andamento dei picchi di risonanza al variare del campo magnetico e della profondità di reticolo. Queste misure sono state preliminari a quelle effettuate nella seconda parte del lavoro di tesi, durante la quale sono state osservate e caratterizzate sempre al variare della profondità di reticolo e del campo magnetico le oscillazioni di spin precedentemente introdotte. Il lavoro di tesi si è concluso con l'analisi dei dati sperimentali raccolti, dalla

quale è stato possibile ricavare la lunghezza di scattering a_{eg-} associata al processo collisionale in cui i due atomi, in orbitali diversi, interagiscono nello stato di tripletto di spin. L'analisi dei dati ha richiesto l'elaborazione di un modello che fosse in grado di descrivere l'andamento dell'energia d'interazione in funzione della lunghezza di scattering per due atomi fortemente interagenti all'interno di un sito reticolare.

Il lavoro di tesi è così suddiviso:

- il capitolo 1 è dedicato ad una sintesi delle principali proprietà atomiche dell'Itterbio e alla spiegazione del meccanismo che consente l'eccitazione della transizione doppiamente proibita $^1S_0 \rightarrow, ^3P_0$;
- nel capitolo 2 verranno invece discusse alcune delle proprietà di un gas atomico intrappolato all'interno di un reticolo ottico, con particolare attenzione agli aspetti che sono importanti per questo lavoro di tesi;
- nel capitolo 3 vengono invece esaminate le proprietà di un gas di fermioni interagenti in un reticolo sia nel limite di basse lunghezze di scattering, regime in cui è valido il modello di Fermi-Hubbard, sia nel limite di alte lunghezze di scattering in cui il modello di Fermi-Hubbard cessa di essere valido.

A questi primi tre capitoli di introduzione teorica seguono

- il capitolo 4, dedicato ad una breve presentazione del sistema sperimentale usato, ed in particolare del laser utilizzato per eccitare la transizione e del sistema di raffreddamento ed intrappolamento di atomi di Itterbio;
- il capitolo 5, in cui verranno discussi il metodo di caricamento del campione nel reticolo ottico e verranno esaminate le varie misure di spettroscopia effettuate;
- il capitolo 6, in cui verrà invece presentato il fenomeno delle oscillazioni di spin e verrà mostrato come dal valore della frequenza di oscillazione al variare della profondità di reticolo e del campo magnetico in corrispondenza degli atomi sia possibile ricavare alcune importanti proprietà collisionali del sistema atomico.

1

L'Itterbio

Pur non facendo parte del gruppo dei metalli alcalino terrosi, l'Itterbio condivide con questa classe di atomi la stessa struttura elettronica esterna, caratterizzata da due elettroni in una shell s . Analogamente a quanto avviene per i metalli del II gruppo, i livelli energetici dell'Itterbio si dividono pertanto in stati di singoletto di spin ($S = 0$) e di tripletto di spin ($S = 1$). Le transizioni fra stati di singoletto e stati di tripletto prendono il nome di *transizioni di intercombinazione*. Il meccanismo che dà luogo a questa classe di transizioni, che violano la regola di selezione $\Delta S = 0$, è la non perfetta descrivibilità dei livelli energetici degli atomi a più elettroni in termini di accoppiamento L-S. Questo è particolarmente evidente per l'Itterbio, dove, proprio a causa dell'alto numero di elettroni ($Z_{\text{Yb}} = 70$), l'accoppiamento L-S risulta meno efficiente che nei metalli alcalino-terrosi più leggeri nel descrivere la struttura elettronica e le transizioni di intercombinazione risulteranno pertanto meno proibite.

Fra le varie transizioni di intercombinazione si distingue la transizione $^1S_0 \rightarrow ^3P_0$, che oltre a violare la regola di selezione di spin, viola la regola per la quale una transizione ad un fotone non può connettere due stati aventi entrambi numero quantico J uguale a zero. Trattandosi di una transizione doppiamente proibita, la $^1S_0 \rightarrow ^3P_0$ è caratterizzata da una larghezza di riga estremamente ridotta e da un fattore di qualità $Q = \nu/\Delta\nu$ elevato, tipicamente dell'ordine di 10^{16} per i metalli alcalino-terrosi, caratteristica quest'ultima che rende questa transizione ideale come riferimento per la realizzazione di orologi ottici [6, 8] e proprio per questo, prende il nome di "transizione di orologio".

Dopo una breve presentazione delle proprietà principali della struttura elettronica dell'Itterbio, nel corso di questo capitolo verranno evidenziate le principali caratteristiche della transizione $^1S_0 \rightarrow ^3P_0$. In particolare, saranno discussi sia il meccanismo che dà origine alla transizione, sia le sue proprietà magnetiche.

1.1 Principali proprietà atomiche

L'Itterbio è un metallo ($Z=70$) classificato nella serie del Lantanidi e caratterizzato dalla configurazione elettronica $[\text{Xe}]4f^{14}6s^2$ dello stato fondamentale. In natura esistono sette isotopi stabili (vedi tabella 1.1) dell'Itterbio, cinque bosonici (^{168}Yb , ^{170}Yb , ^{172}Yb , ^{174}Yb , ^{176}Yb) e due fermionici (^{171}Yb , ^{173}Yb).

Nell'ambito della fisica degli atomi ultrafreddi, delle varie transizioni che caratterizzano lo spettro dell'Itterbio, rivestono particolare importanza quelle che connettono gli stati eccitati $|^1P_1\rangle$ e $|^3P_1\rangle$ allo stato fondamentale (vedi figura 1.1). La transizione $^1S_0 \rightarrow ^1P_1$ è caratterizzata da una lunghezza d'onda di 398.9 nm [9] e da una larghezza di riga naturale di 29 MHz [6], a cui corrisponde una vita media nel livello eccitato di circa 4.5 ns. La vita media estremamente breve del livello $|^1P_1\rangle$ consente di poter utilizzare la luce a 398.9 nm sia nel raffreddamento di fasci atomici mediante l'utilizzo di uno Zeeman slower sia per effettuare processi di imaging su nuvole di atomi ultrafreddi, come approfondiremo nel capitolo 4. La transizione di intercombinazione $^1S_0 \rightarrow ^3P_1$ ($\lambda = 555.8$ nm [9], $\Gamma = 182$ kHz) trova invece impiego nel raffreddamento e intrappolamento di atomi di Itterbio mediante trappole magneto ottiche.

1.2 Transizione $^1S_0 \rightarrow ^3P_0$

Nel corso di questa sezione saranno analizzati i meccanismi che consentono l'eccitazione della transizione $ns^2\ ^1S_0 \rightarrow nsnp\ ^3P_0$ in atomi di Itterbio e, più in generale, in atomi aventi una struttura elettronica analoga a quella dell'Itterbio, quali quelli facenti parte del gruppo dei metalli alcalino terrosi.

Isotopo	Abbondanza (%)	Spin nucleare	Momento magn. nucleare [μ/μ_N]
168	0.13	0	0
170	3.05	0	0
171	14.3	3/2	+0.4919
172	21.9	0	0
173	16.12	5/2	-0.6776
174	31.8	0	0
176	12.7	0	0

Tabella 1.1: Principali proprietà degli isotopi stabili dell'Itterbio. [6]

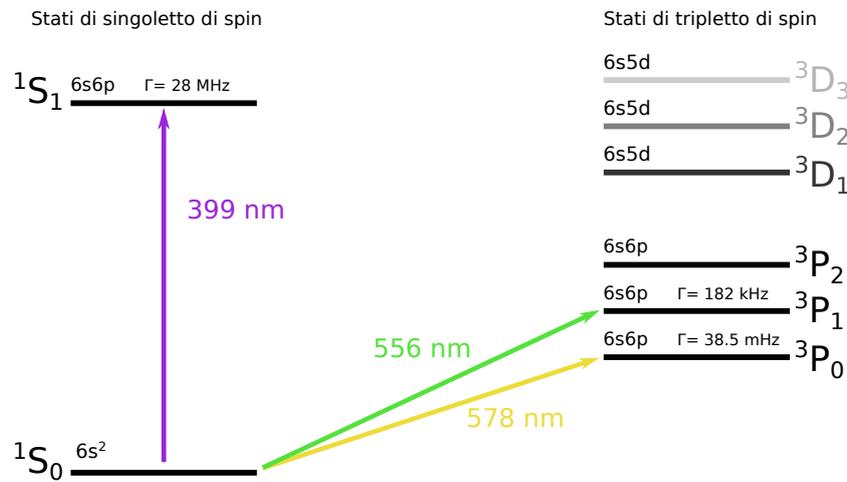


Figura 1.1: Schema dei primi livelli eccitati dell'Itterbio.

La transizione in esame viola le regole di selezione che impongono J_i e J_f non contemporaneamente nulli e $\Delta S = 0$, dove J_i e J_f sono i numeri quantici associati rispettivamente al momento angolare totale degli stati iniziali e finali della transizione mentre ΔS è la variazione del numero quantico di spin, e non dovrebbe pertanto essere permessa a nessun ordine.

Tuttavia, così come transizioni con $\Delta S \neq 0$ sono permesse nel caso in cui l'interazione di spin-orbita misceli stati con S diverso, dando così luogo ad autostati del sistema in cui S non è più un buon numero quantico, si può in modo del tutto analogo presupporre che una transizione caratterizzata da $J_i = J_f = 0$ possa avvenire nel momento in cui entri in gioco un meccanismo che misceli stati con J diverso. Nel caso di atomi con nucleo fermionico (quali ad esempio il ^{171}Yb ($I=1/2$) o il ^{173}Yb ($I=5/2$)) tale meccanismo, alla cui descrizione è dedicata la sezione 1.2.1, è rappresentato dall'interazione iperfine tra il momento magnetico nucleare e il momento angolare totale degli elettroni. Gli atomi aventi nucleo bosonico e spin nucleare nullo, difettano invece della struttura iperfine. In questi atomi, come vedremo nella sezione 1.2.2, la transizione sarà pertanto possibile solo come transizione a due fotoni.

1.2.1 Caso fermionico

Nel caso in cui il momento magnetico μ_N del nucleo atomico sia diverso da zero, questo interagirà col campo magnetico generato dagli elettroni appartenenti a shell incomplete e l'interazione risultante, all'ordine più basso, sarà descritta

dall'hamiltoniana [10]

$$H_{hfs} = - \sum_{i=1}^N \mathbf{B}_i \cdot \boldsymbol{\mu}_N = \mu_N g_I \sum_{i=1}^N \mathbf{B}_i \cdot \mathbf{I}_N \quad (1.1)$$

dove μ_N e g_i sono rispettivamente il magnetone e il fattore giromagnetico nucleari e \mathbf{B}_i è il campo magnetico generato dall' i -esimo elettrone in corrispondenza del nucleo atomico. Si può dimostrare [11] che il campo magnetico \mathbf{B}_i è descritto dall'espressione

$$\mathbf{B}_i(\mathbf{r}) = -2\mu_0 \left(\frac{\mathbf{l}_i - \mathbf{s}_i}{r^3} + \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_i)\mathbf{r}}{r^5} + \frac{8\pi}{3} \delta(\mathbf{r})\mathbf{s}_i \right) \quad (1.2)$$

dove μ_0 è il magnetone di Bohr, mentre \mathbf{s}_i e \mathbf{l}_i sono rispettivamente lo spin e il momento angolare dell' i -esimo elettrone. In modo del tutto generale, dal momento che sia \mathbf{B}_i , sia \mathbf{I}_N sono operatori sferici di rango uno, potremo esprimere la 1.1 come

$$H_{hfs} = 2\mu_0 \mu_N g_I \mathbf{T}^{(1)} \cdot \mathbf{I}^{(1)} \quad (1.3)$$

Nella base $|\alpha, J, I, F, M_F\rangle$, dove $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{J}$ è l'operatore associato al momento angolare totale dell'atomo, M_F la proiezione di \mathbf{F} sull'asse di quantizzazione e α il set di ulteriori numeri quantici necessari a definire lo stato, i nuovi autostati atomici, ottenuti considerando la 1.3 come una perturbazione, saranno espressi dalla relazione

$$|\alpha, J, I, F, M_F\rangle = |\alpha, J, I, F, M_F\rangle^{(0)} + |\alpha, J, I, F, M_F\rangle^{(1)} \quad (1.4)$$

dove l'apice (0) indica l'autostato imperturbato e (1) la correzione a quest'ultimo dovuta all'interazione iperfine. In particolare, al primo ordine perturbativo, avremo

$$|\alpha, J, I, F, M_F\rangle^{(1)} = \sum_{\alpha' J'} |\alpha', J', I, F, M_F\rangle \frac{\langle \alpha', J', I, F', M'_F | H_{hfs} | \alpha, J, I, F, M_F \rangle}{E(\alpha', J') - E(\alpha, J)} \quad (1.5)$$

dove l'espressione esplicita degli elementi di matrice di H_{hfs} è data da [12]

$$\begin{aligned} \langle \alpha', J', I, F', M'_F | H_{hfs} | \alpha, J, I, F, M_F \rangle &= 2\mu_0 \mu_N g_I \delta_{FF'} \delta_{M_F M'_F} \times \\ &\times (-1)^{F+I+J'} \sqrt{\frac{(2I+1)(I+1)}{I}} \begin{Bmatrix} I & I & 1 \\ J & J' & F \end{Bmatrix} \langle \alpha' J' || \mathbf{T}^{(1)} || \alpha J \rangle. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Dall'espressione 1.6 possiamo osservare come H_{hfs} sia non diagonale in J , dando così luogo ad autostati in cui J non è definito. In particolare, dal momento che \mathbf{T} è un operatore tensoriale di rango uno, avremo che i nuovi autostati del sistema saranno costituiti da una combinazione lineare degli autostati imperturbati caratterizzati da egual F e J' compreso fra $J - 1$ e $J + 1$. A causa della presenza dell'interazione iperfine, lo stato metastabile $|^3P_0\rangle$ sarà pertanto espresso dalla combinazione lineare

$$|^3P_0\rangle = \alpha|^3P_0^0\rangle + \beta|^3P_1^0\rangle + \gamma|^1P_1^0\rangle \quad (1.7)$$

dove con l'apice 0 sono indicati gli autostati del sistema imperturbato e $\beta, \gamma \ll 1$. Il nuovo autostato che viene ad esser così definito può decadere verso lo stato fondamentale $|^1S_0\rangle$ per mezzo di una transizione di dipolo elettrico in virtù del mixing con lo stato puro $|^1P_1^0\rangle$. La vita media della transizione può essere calcolata a partire dall'espressione che descrive il rate di decadimento per emissione spontanea di uno stato atomico per interazione di dipolo elettrico, ovvero

$$\gamma_{a \rightarrow b} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{4}{3\hbar c^3} \omega_{ba}^3 |\langle b | \mathbf{D} | a \rangle|^2. \quad (1.8)$$

in cui $\omega_{ba} = \frac{1}{\hbar}(E_b - E_a)$ e \mathbf{D} è l'operatore di dipolo elettrico. Nel caso del livello metastabile $|6s6p\ ^3P_0\rangle$ del ^{173}Yb , considerando $|6s^2\ ^1S_0\rangle$ come stato finale della transizione e lo stato derivato dal mixing iperfine 1.7 come stato iniziale, dalla 1.8 si ottiene un rate di decadimento (e quindi una larghezza di riga della transizione) di 38.5 mHz [12] corrispondenti ad una vita media di circa 23 s.

1.2.2 Caso bosonico

Gli isotopi bosonici stabili dell'Itterbio sono tutti caratterizzati da spin nucleare nullo e difettano pertanto di una struttura iperfine dei livelli energetici. In questi atomi il meccanismo del mixing iperfine dei livelli sarà pertanto proibito e il numero quantico J associato agli stati $|^1S_0\rangle$ e $|^3P_0\rangle$ risulterà essere esattamente uguale a zero. In assenza di mixing iperfine lo stato metastabile potrà decadere verso il fondamentale soltanto attraverso una transizione a due fotoni. Gli operatori associati alle transizioni ad un fotone hanno infatti tutti rango uguale ad uno e non possono connettere due stati aventi entrambi $J = 0$. Dal momento che lo stato metastabile ha parità opposta rispetto al fondamentale, all'ordine più basso la transizione tra i due livelli sarà possibile

solo come transizione del tipo E_1M_1 . In questo caso il rate di decadimento sarà dato dall'espressione [13].

$$\Gamma = \frac{8}{27\pi} \alpha^6 \int d\omega_1 \omega_1^3 \int d\omega_2 \omega_2^3 \sum_{n^+} \frac{\langle {}^3P_0 | M_1 | n^+ \rangle \langle n^+ | D | {}^1S_0 \rangle}{E_{n^+} + \omega_1 - E_{{}^1S_0}} + \sum_{n^-} \frac{\langle {}^3P_0 | D | n^+ \rangle \langle n^- | M_1 | {}^1S_0 \rangle^2}{E_{n^-} + \omega_1 - E_{{}^1S_0}} \delta(E_{{}^3P_0} + \omega_1 + \omega_2 - E_{{}^1S_0}) \quad (1.9)$$

dove D è l'operatore momento di dipolo elettrico e M_1 l'operatore dipolo magnetico. Questo tipo di transizioni sia per l'Itterbio, sia per i metalli alcalini in generale, è caratterizzato da una vita media estremamente lunga, dell'ordine del migliaio di anni. Si può tuttavia dimostrare che negli isotopi bosonici la transizione può essere eccitata in presenza di un campo magnetico [6], il cui effetto è quello di indurre un mixing fra gli stati $|{}^3P_0\rangle$ e $|{}^3P_1\rangle$.

1.3 Proprietà magnetiche della transizione

In presenza di un debole campo magnetico esterno, che supponiamo essere allineato lungo l'asse \hat{z} , a causa dell'interazione Zeeman, i livelli energetici di un atomo subiscono uno shift dato dal valore di aspettazione dall'hamiltoniana

$$H_z = \frac{\mu_B}{\hbar} \left(g_s S_z + L_z + \frac{\mu_N}{\mu_B} g_I I_z \right) B \quad (1.10)$$

dove μ_B e μ_N sono rispettivamente il magnetone di Bohr e il magnetone nucleare, g_s e g_I i fattori magnetici di spin e nucleare e S_z , L_z e I_z le proiezioni lungo l'asse \hat{z} rispettivamente dello spin, del momento angolare orbitale e dello spin nucleare. Nel limite in cui g_I non dipende dallo stato elettronico, ovvero trascurando le correzioni diamagnetiche del momento magnetico nucleare, gli stati puri $|{}^1S_0^0\rangle$ e $|{}^3P_0^0\rangle$ presenteranno lo stesso fattore di Landé¹ e saranno pertanto soggetti allo stesso shift Zeeman [14]. Lo stato $|{}^3P_0\rangle$, essendo definito dal mixing iperfine 1.7, presenterà invece un fattore di Landé diverso da quello dei due stati puri e sarà quindi soggetto ad uno shift in energia diverso. Dal momento che i fattori di Landé degli stati $|{}^1S_0\rangle$ e $|{}^3P_0\rangle$ non sono uguali, la frequenza della transizione ${}^1S_0 \rightarrow {}^3P_0$ sarà modificata dalla presenza di un campo magnetico esterno e potremo definire un fattore

¹Nel caso in cui si considera la struttura iperfine, il fattore di Landé assume la forma $g = g_J \frac{F(F+1)+J(J+1)-I(I+1)}{2F(F+1)} - g_I \frac{m_e}{m_p} \frac{F(F+1)+I(I+1)-J(J+1)}{2F(F+1)}$. Per gli stati 1S_0 e 3P_0 $J = 0$ e il fattore di Landé si riduce a $g = \frac{m_e}{m_p} g_I$.

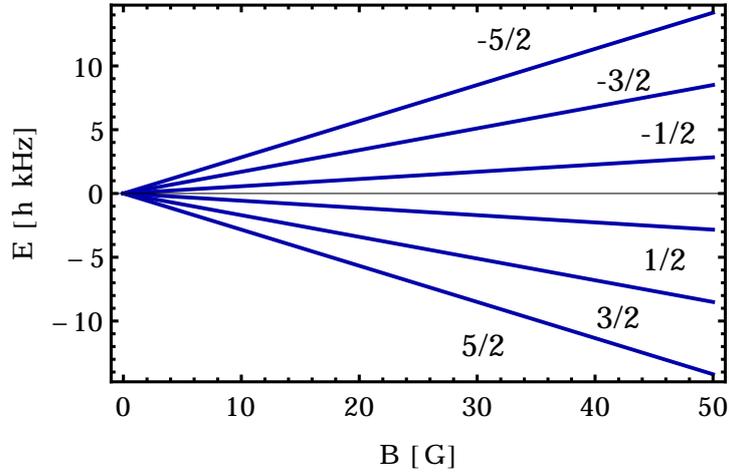


Figura 1.2: Zeeman shift differenziale della transizione $|^1S_0\rangle \rightarrow |^3P_0\rangle$ del ^{173}Yb in funzione del campo magnetico per i sei livelli iperfini, individuati dal numero quantico m_F .

di Landé differenziale dato da

$$\delta_g = -\frac{\langle ^3P_0 | H_z | ^3P_0 \rangle - \langle ^1S_0 | H_z | ^1S_0 \rangle}{g_I \mu_B B}. \quad (1.11)$$

Nel caso del ^{173}Yb il fattore di Landé differenziale vale -8.1×10^{-5} [8], da cui segue uno shift Zeeman differenziale della transizione in esame la cui espressione è data da

$$\Delta E_z = m_F h B \times 113.4 \text{ Hz/G}. \quad (1.12)$$

L'andamento dello shift Zeeman differenziale nel ^{173}Yb per le 6 proiezioni m_F dello spin è riportato in figura 1.2.

2

Reticoli ottici

L'interazione fra radiazione e materia è all'origine di due importanti effetti meccanici, la *forza radiativa* e la *forza di dipolo*, entrambi ampiamente sfruttati nell'ambito della fisica degli atomi ultrafreddi per modificare le proprietà del moto del centro di massa di un atomo. Mentre alla base della forza radiativa è lo scambio di impulso fra atomi e radiazione a seguito di processi di assorbimento ed emissione spontanea, la forza di dipolo ha invece origine da un gradiente spaziale dell'intensità del campo elettrico con cui gli atomi interagiscono. L'effetto della forza di dipolo sugli atomi diviene particolarmente intuitivo da comprendere ricorrendo al modello degli stati vestiti [15], il quale presuppone di considerare atomi e campo come un sistema descritto da un'unica hamiltoniana. Dalla diagonalizzazione di questa hamiltoniana, viene messa in luce la dipendenza dell'energia degli autostati del sistema complessivo atomi-campo dall'intensità della radiazione e dal suo detuning rispetto alle transizioni atomiche. Un risultato particolarmente importante dal punto di vista sperimentale, valido per un sistema a due livelli ma facilmente estendibile ad atomi a più livelli, è lo shift in energia del livello fondamentale del sistema atomico "vestito" dalla radiazione rispetto al caso imperturbato. Si può dimostrare che nel caso in cui il detuning δ della radiazione sia molto maggiore della larghezza della transizione Γ , lo spostamento in energia vale

$$\Delta E = \hbar \frac{\Omega^2}{4\delta} \quad (2.1)$$

dove Ω è la frequenza di Rabi. A detuning negativi (luce spostata verso il rosso rispetto alla transizione atomica) corrisponde pertanto uno shift negativo dell'energia rispetto al caso imperturbato. Dal momento che la 2.1 comporta che per luce detunata verso il rosso gli atomi saranno soggetti ad un minimo di potenziale in corrispondenza dei massimi di intensità ($\Omega^2 \propto I$), segue che una modulazione spaziale dell'intensità potrà essere sfruttata per realizzare

una trappola ottica per atomi neutri [16]. In particolare, se la modulazione è caratterizzata da una periodicità spaziale, la struttura risultante prende il nome di *reticolo ottico*. Come avremo modo di vedere in sezione 2.2, strutture di questo tipo possono essere realizzate impiegando fasci laser contropropaganti. La fisica degli atomi ultrafreddi all'interno di un reticolo ottico è per molti aspetti analoga a quella degli elettroni in un cristallo, e proprio per questo i reticoli ottici sono sistemi ideali per simulare fenomeni caratteristici della materia condensata [4]. A differenza di quanto avviene nella fisica dello stato solido, dove le proprietà del potenziale sono definite dalla disposizione degli atomi all'interno della struttura cristallina e sono pertanto difficilmente modificabili, le proprietà di un potenziale reticolare ottico possono essere variate *ad hoc* agendo sull'intensità dei fasci che danno origine al reticolo, la loro lunghezza d'onda e l'angolo con cui si intersecano. Questo consente di esercitare un controllo estremamente accurato su numerosi dei parametri che caratterizzano il sistema atomico interagente col reticolo, quali ad esempio lo stato di moto degli atomi (come vedremo in sezione 2.5), l'energia d'interazione fra particelle appartenenti allo stesso sito o il tempo di tunneling fra siti adiacenti. Tutto questo rende i reticoli ottici dei sistemi versatili ed ideali per condurre misure di spettroscopia estremamente precise su atomi ultrafreddi, le quali sono alla base di numerosi dei progressi avvenuti nel corso degli ultimi anni nel campo della metrologia e nella realizzazione di orologi atomici ottici [2].

2.1 Potenziale di dipolo elettrico

Consideriamo un atomo di massa m interagente con un campo elettrico classico

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{e}} \frac{1}{2} \left(E_0(\mathbf{r}, t) e^{-i(\omega t + kx)} + h.c. \right) \quad (2.2)$$

dove $\omega/(2\pi)$ è la frequenza e $\hat{\mathbf{e}}$ è il versore di polarizzazione. Nel limite in cui l'ampiezza del campo $E_0(\mathbf{r}, t)$ varia spazialmente su lunghezze maggiori della dimensione atomica, l'interazione fra atomo e campo è efficacemente descritta dall'hamiltoniana di dipolo

$$H_{dip} = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (2.3)$$

dove \mathbf{d} è il momento di dipolo dell'atomo. In questa approssimazione, l'interazione atomo-campo dà luogo ad uno shift energetico dei livelli atomici, noto come *light shift*, la cui espressione è data da [15]

$$\Delta E_n = \frac{1}{4\hbar^2} \sum_m \left[\frac{\omega_n - \omega_m}{(\omega_m - \omega_n)^2 - \omega^2} |\langle m | \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{e}} | n \rangle|^2 E_0^2(\mathbf{r}) \right] \quad (2.4)$$

dove ω_x con $x = \{n, m\}$ è l'energia dei livelli atomici imperturbati e \mathbf{D} è l'operatore momento di dipolo elettrico. Nel caso in cui ΔE_n sia negativo, lo shift in energia del livello fondamentale può essere utilizzato per realizzare una trappola ottica la cui profondità è modulata dall'intensità del campo elettrico.

2.2 Proprietà di un potenziale ottico periodico

Il metodo più semplice per realizzare un reticolo ottico unidimensionale consiste nel far interferire due fasci laser contropropaganti. È infatti immediato verificare come due fasci laser contropropaganti descritti dai campi elettrici

$$E_{\pm}(x, t) = \frac{E_0}{2} \left(e^{-i(\omega t \pm kx)} + \text{h.c.} \right) \quad (2.5)$$

producano un profilo d'intensità periodico il cui valor medio nel tempo è espresso da

$$I(x) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c \cos^2(kx) E_0^2. \quad (2.6)$$

Dal momento che il potenziale di dipolo cui è soggetto un atomo è direttamente proporzionale al profilo d'intensità spaziale del campo elettrico con cui l'atomo interagisce, è immediato concludere come i due campi introdotti nella 2.5 diano luogo ad un potenziale di tipo reticolare caratterizzato da un periodo uguale a $\lambda/2 = \pi/k$. Per realizzare un reticolo ottico tridimensionale è necessario disporre di un profilo d'intensità che vari periodicamente nelle tre direzioni spaziali. Un reticolo ottico cubico, ad esempio, lo si può ottenere sovrapponendo sei fasci laser diretti a due a due lungo i tre assi cartesiani in direzione opposta. In questo caso, il reticolo risultante sarà descritto dall'espressione

$$V(x, y, z) = s E_r \left(\sin^2(kx) + \sin^2(ky) + \sin^2(kz) \right) \quad (2.7)$$

dove la profondità di reticolo $s E_r$ è espressa in termini dell'energia di rinculo $E_r = \hbar^2 k^2 / 2m$ per mezzo del parametro adimensionale s . Dal momento che il potenziale 2.7 è separabile, il problema di una particella interagente in un reticolo ottico cubico sarà riconducibile alla risoluzione dell'equazione di Schroedinger stazionaria unidimensionale

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + s E_r \sin^2(kx) \psi = E \psi \quad (2.8)$$

che ha come soluzioni le funzioni di Bloch

$$\phi_{n,q}(x) = e^{iqx} u_{n,q}(x) \quad (2.9)$$

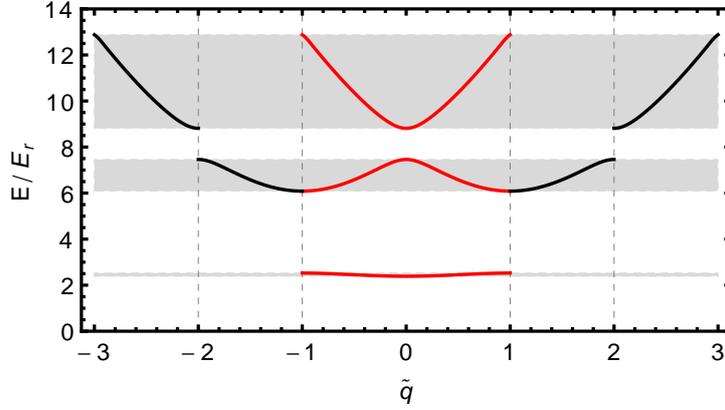


Figura 2.1: Struttura a bande di un reticolo unidimensionale ottenuta per $s = 7.5$ in funzione del parametro \tilde{q} dell'equazione di Mathieu. In nero la rappresentazione estesa delle bande, in rosso quella limitata alla prima zona di Brillouin.

dove $u_{n,q}(x)$ è una funzione avente la periodicità del reticolo, n rappresenta l'indice di banda e q il quasimpulso. La 2.8 è esprimibile in termini dell'equazione di Mathieu

$$\frac{d^2\psi}{d\tilde{x}^2} + [\tilde{e} - 2\tilde{r} \cos(2\tilde{x})] \psi = 0 \quad (2.10)$$

dove $\tilde{x} = kx$, $\tilde{e} = E/E_r - s/2$ e $\tilde{r} = -s/4$.

Le $\psi(\tilde{x})$ soluzioni della 2.10 prendono il nome di funzioni di Mathieu, e sono caratterizzate da una forma del tipo

$$\psi(\tilde{x}) = e^{i\tilde{q}\tilde{x}} f(\tilde{x}) \quad (2.11)$$

dove $f(\tilde{x})$ è una funzione di periodo 2π . A seconda della parità di $f(\tilde{x})$ le soluzioni si dividono in soluzioni pari, generalmente indicate con $ce(\tilde{q}, \tilde{x})$ e dispari, indicate con $se(\tilde{q}, \tilde{x})$. I parametri \tilde{e} prendono invece il nome di valori caratteristici delle funzioni di Mathieu e sono indicati rispettivamente con $e^c(\tilde{q})$ e $e^s(\tilde{q})$ a seconda che si riferiscano ad una soluzione pari o dispari. I valori di E ricavati dagli $e^x(\tilde{q})$ definiscono al variare di \tilde{q} la struttura a bande reticolare. Nella rappresentazione estesa delle bande, il parametro \tilde{q} è infatti associabile al quasimpulso q diviso per k . Come schematizzato in figura 2.1, avremo che la banda fondamentale del reticolo sarà costruita a partire dagli $e^c(\tilde{q})$ al variare di \tilde{q} tra 0 ed 1, la prima banda eccitata dagli $e^s(\tilde{q})$ al variare di \tilde{q} tra 1 e 2 e così via.

Fissato s , per ciascuna delle bande del reticolo, è possibile definire una larghezza di banda come $\Delta E_n = E(\tilde{q} = n + 1) - E(\tilde{q} = n)$ con n intero. La larghezza di banda decresce all'aumentare di s fino ad annullarsi per reticoli

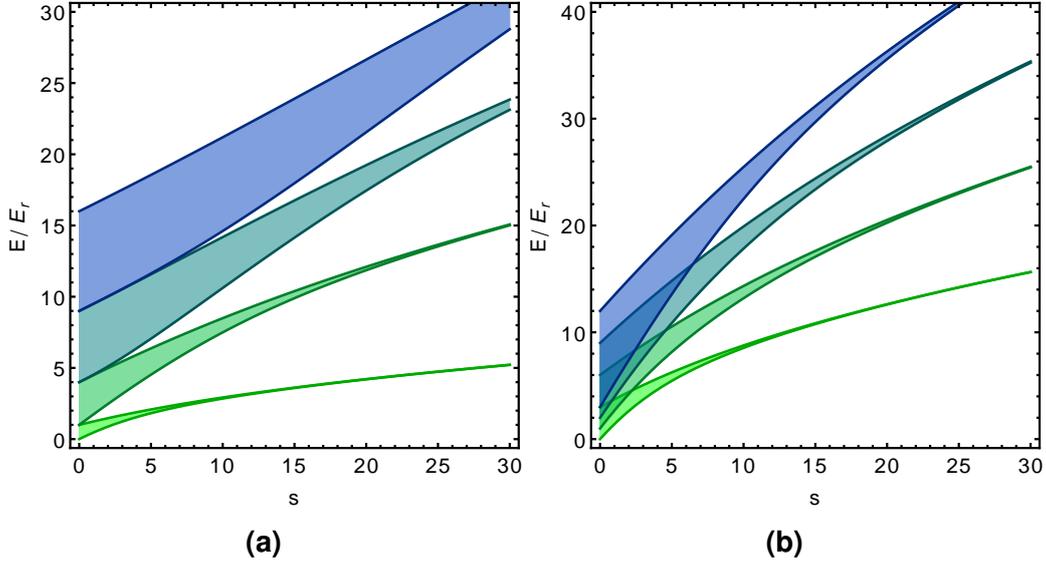


Figura 2.2: Struttura a bande di un reticolo unidimensionale **(a)** e cubico tridimensionale **(b)** in funzione della profondità di reticolo s . L'energia è espressa in unità dell'energia di recoil E_r .

di profondità infinita. Nel limite di $s \gg 1$ una stima dell'energia media della banda si può ottenere dall'approssimazione armonica

$$E(\tilde{q} = n) = \hbar\omega_v(n + 1/2) \quad (2.12)$$

dove

$$\omega_v = 2\sqrt{s}\frac{E_r}{\hbar} \quad (2.13)$$

La struttura a bande di un reticolo rispettivamente unidimensionale cubico tridimensionale, sono riportate in figura 2.2a e 2.2b in funzione della profondità di reticolo s . È interessante notare come nel caso tridimensionale il *band gap* tra la prima e la seconda banda si apra solo per valori di s maggiori di 2.2

2.3 Stati di Wannier

All'aumentare della profondità di reticolo, la funzione d'onda di un atomo tenderà ad essere sempre più localizzata all'interno di un singolo sito reticolare e la sua descrizione mediante una singola onda di Bloch, alla quale è associato uno stato completamente delocalizzato, risulterà poco conveniente. Si introducono a tal proposito gli stati Wannier, definiti, nel caso unidimensionale, a

partire dalle funzioni di Bloch $\phi_{n,q}(x)$ (cfr. 2.9) come [17]

$$w_n(x - ld) = A \int_{-\pi/d}^{\pi/d} e^{-i(qld + \theta_{n,q})} \phi_{n,q}(x) dq \quad (2.14)$$

dove A è una costante di normalizzazione, d è la distanza fra due siti reticolari primi vicini, l è un intero mentre la presenza del termine $\theta_{n,q}$ è giustificata dal fatto che le funzioni di Bloch sono definite a meno di un fattore di fase. A causa dell'indeterminazione sulla fase delle funzioni di Bloch, la definizione delle funzioni di Wannier non sarà univoca, ma dipenderà dal particolare set di fattori di fase $\theta_{n,q}$ che vengono scelti per definire le funzioni di Bloch. Questa ambiguità si risolve optando per il set di fattori di fase che danno luogo alle funzioni di Wannier *massimamente localizzate* [18], ovvero minimizzano la varianza

$$\Delta x^2 = \langle w_n(x) | x^2 | w_n(x) \rangle - (\langle w_n(x) | x | w_n(x) \rangle)^2. \quad (2.15)$$

Le funzioni di Wannier costituiscono un set completo di stati localizzati e consentono pertanto di descrivere la funzione d'onda di una particella interagente con un potenziale periodico in modo del tutto equivalente rispetto alle funzioni di Bloch. Osserviamo inoltre che funzioni di Wannier riferite a bande e siti reticolari diversi sono fra loro ortogonali, ovvero

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_{n'}^*(x - l'd) w_n(x - ld) = \delta_{n'n} \delta_{l'l}. \quad (2.16)$$

Per un reticolo cubico, l'estensione della trattazione fatta al caso tridimensionale è banale, essendo

$$w_{n_x n_y n_z}(x, y, z) = w_{n_x}(x) w_{n_y}(y) w_{n_z}(z). \quad (2.17)$$

dove n_x , n_y e n_z sono gli indici di banda per le tre direzioni spaziali. Al crescere della profondità di reticolo le funzioni di Wannier tendono a localizzarsi maggiormente in un singolo sito reticolare, fino a collapsare sulle funzioni di oscillatore armonico per profondità infinite (vedi figura 2.3). Osserviamo infine che le 2.14, essendo una combinazione lineare di funzioni di Bloch, non sono autofunzioni dell'hamiltoniana di reticolo 2.8.

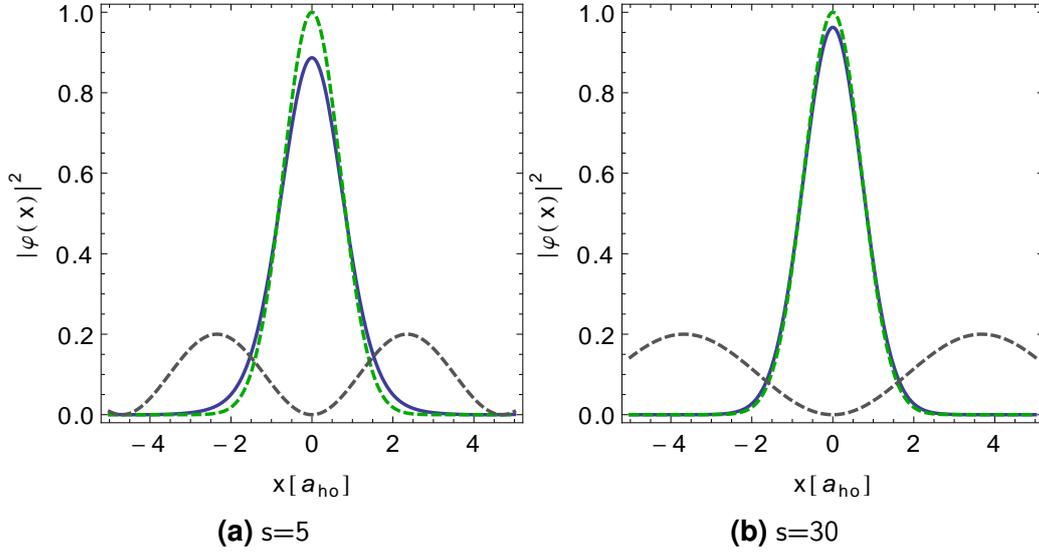


Figura 2.3: Funzioni di Wannier unidimensionali (in blu) per una profondità di reticolo uguale a $5E_r$ **(a)** e $30E_r$ **(b)** e loro confronto con le funzioni di oscillatore armonico (in verde). Osserviamo come al crescere della profondità di reticolo le funzioni di Wannier convergono su quelle di oscillatore armonico. In grigio è rappresentato il potenziale reticolare.

2.4 Light shift differenziali e lunghezza d'onda magica

Nel corso della sezione 2.1 è stato messo in evidenza come l'interazione con un campo di radiazione induca nei livelli atomici uno shift in energia, noto come *light shift*, il cui valore è direttamente proporzionale all'intensità del campo e varia, in accordo alla 2.4, a seconda del livello considerato. In generale, la presenza di un campo elettrico fuori risonanza, avrà quindi l'effetto di spostare la frequenza di una transizione atomica di

$$\Delta E_{eg}(\omega) = \delta_g(\omega) - \delta_e(\omega) \quad (2.18)$$

dove con $\delta_g(\omega)$ e $\delta_e(\omega)$ sono indicati rispettivamente i light shift del livello fondamentale ed eccitato della transizione espressi in funzione della frequenza del campo di radiazione ω . All'ordine più basso nell'intensità del campo, lo shift differenziale 2.18 è generalmente espresso in funzione della polarizzabilità atomica, definita come

$$\alpha_x(\omega) = -\frac{1}{\hbar} \sum_{\gamma \neq x} -2 \left(\frac{\omega_\gamma - \omega_x}{(\omega_\gamma - \omega_x)^2 - \omega^2} |\langle \gamma | D | x \rangle|^2 \right) \quad (2.19)$$

dove $x = \{g, e\}$ e D è l'operatore momento di dipolo. In termini della 2.19 il light shift differenziale 2.18 assume la forma

$$\Delta E_{eg}(\omega) = \frac{1}{4} (\alpha_g(\omega) - \alpha_e(\omega)) E_0^2 \quad (2.20)$$

dove E_0 è il modulo del campo elettrico. diventa importante se si vuole determinare la frequenza di transizione ω_{eg} con precisione, come è stato fatto in questa tesi per la transizione $^1S_0 \rightarrow ^3P_0$ in atomi di Itterbio intrappolati in un reticolo ottico. Dal momento che i reticoli ottici sono realizzati in corrispondenza del waist di fasci laser focalizzati su dimensione dell'ordine del centinaio di μm , atomi posti in siti reticolari diversi saranno soggetti a light shift differenziali diversi, a seconda di quanto vale la distanza dal centro del fascio e quindi l'intensità locale del campo. A questo bisogna aggiungere che, per quanto il valore dell'intensità del fascio che origina il reticolo possa essere stabilizzato, il valore dell'intensità tenderà a presentare delle fluttuazioni nel tempo dando così luogo a light shift che oltre che a una dipendenza spaziale ne avranno anche una temporale. Nel caso si vogliano effettuare misure spettroscopiche su atomi intrappolati in un reticolo ottico, risulta quindi necessario minimizzare il fenomeno del light shift differenziale. Ciò può essere ottenuto realizzando il reticolo alla lunghezza d'onda definita *magica*, ovvero a quella lunghezza d'onda per la quale le polarizzabilità dello stato fondamentale ed eccitato che compaiono nella 2.20 sono uguali. Nel caso dell'itterbio, per la transizione $^3P_0 \rightarrow ^1S_0$, il valore della lunghezza d'onda magica che è stato scelto per realizzare il reticolo è 759.44 nm [9]. La scelta di questa lunghezza d'onda, piuttosto che di altre per cui la condizione $\alpha_g(\omega) = \alpha_e(\omega)$ è soddisfatta (come ad esempio 551.5 nm e 465.4 nm [9] (vedi figura 2.4)), è dovuta sia all'assenza di risonanze nell'intorno di 759.44 nm, sia

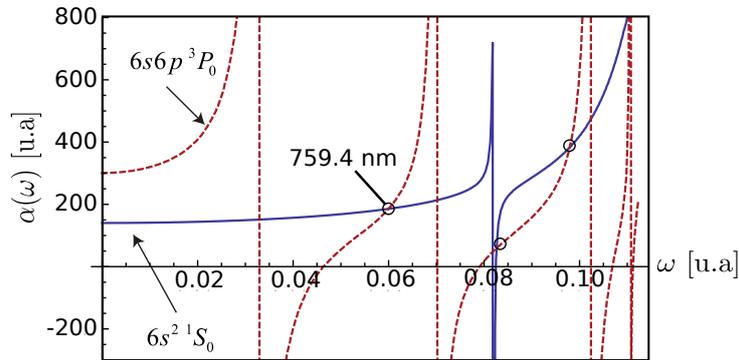


Figura 2.4: Polarizzabilità atomica dei livelli 1S_0 e 3P_0 dell'Itterbio in funzione della frequenza (in unità atomiche) [9]. L'annullamento del light shift differenziale della transizione $^3P_0 \rightarrow ^1S_0$ si ha per le frequenze per cui le polarizzabilità dei due livelli sono uguali.

alla relativa semplicità con la quale si può realizzare luce laser ad alta potenza a questa lunghezza d'onda, per esempio attraverso un laser a Titanio-Zaffiro.

Alla determinazione del light shift differenziale di una transizione, oltre alle polarizzabilità scalare, introdotta nella 2.19 contribuiscono due ulteriori termini proporzionali alla polarizzabilità vettoriale e tensoriale del campo. Il contributo di questi termini può essere trascurato per il livello di precisione raggiunto in questo lavoro e non verrà pertanto tenuto in considerazione. Si rimanda a [14] per un ulteriore approfondimento.

2.5 Regime di Lamb-Dicke

Nel limite in cui la funzione d'onda di un atomo possa considerarsi ben localizzata all'interno di un sito reticolare $\Delta x \ll \lambda$, la presenza del potenziale confinante inibisce le transizioni che portano ad un cambiamento dello stato di moto dell'atomo. Questo fenomeno prende il nome di effetto Lamb-Dicke ed è all'origine della soppressione dell'allargamento Doppler delle transizioni di atomi confinati all'interno di un reticolo ottico. Nel caso di profondità sufficientemente alte, il singolo sito reticolare può essere approssimato ad un oscillatore armonico e la formalizzazione dell'effetto Lamb-Dicke risulta particolarmente semplice. A titolo esemplificativo, consideriamo pertanto un atomo a singolo elettrone confinato in un potenziale di tipo armonico unidimensionale ed identifichiamone lo stato quantistico per mezzo dei numeri quantici α , associato allo stato elettronico, e n , associato allo stato di moto del centro di massa. Supponiamo che il potenziale armonico confinante sia caratterizzato da una frequenza di trappola ω_v e definiamo il campo elettrico con cui l'atomo interagisce come

$$E(x) = E_0 e^{i(kx - \omega_L t)} = E_0 e^{i(k(r+R) - \omega_L t)} \quad (2.21)$$

dove r e R sono rispettivamente la coordinata relativa del sistema nucleo-elettrone e del centro di massa. Nel limite $kr \ll 1$ il campo elettrico verrà a dipendere dalla sola coordinata del centro di massa. In questa approssimazione, la probabilità di una transizione dallo stato $|g, n\rangle$ allo stato $|e, n'\rangle$ sarà data dall'elemento di matrice

$$|\langle e|D|g\rangle \langle n'|e^{ikR}|n\rangle|^2 \quad (2.22)$$

dove D è l'operatore momento di dipolo. Tenendo in considerazione la sola parte della 2.22 relativa allo stato di moto, ed esprimendo la coordinata R in funzione degli operatori \hat{a}^\dagger e \hat{a} di creazione e distruzione di un quanto di oscillatore armonico, avremo che la probabilità di transizione sarà proporzionale

a

$$|\langle n' | e^{ikR} | n \rangle|^2 = |\langle n' | e^{ikR_0(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)} | n \rangle|^2 \quad (2.23)$$

dove

$$kR_0 = \eta = \sqrt{\frac{E_r}{\hbar\omega_v}} \quad (2.24)$$

prende il nome di parametro di Lamb-Dicke. Nel limite in cui $\eta \ll 1$, ovvero allorché $E_r \ll \hbar\omega_v$ la 2.23 può essere approssimata al primo ordine in η e avremo

$$P_{n \rightarrow n'} \propto |\langle n' | 1 + \eta(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) | n \rangle|^2 = |\delta_{n,n'} + \eta\sqrt{n+1}\delta_{n',n+1} + \eta\sqrt{n}\delta_{n',n-1}|^2. \quad (2.25)$$

Dalla 2.25 risulta evidente come le transizioni per le quali si ha un cambiamento dello stato di moto dell'atomo siano inibite di un fattore η rispetto al caso in cui lo stato di moto non viene modificato e sono completamente soppresse nel limite di $\eta \rightarrow 0$, ovvero per profondità infinita della buca di potenziale confinante. Quando consentite, le transizioni $|n\rangle \rightarrow |n \pm 1\rangle$ prendono il nome di sidebands. Nel caso della transizione $^1S_0 \rightarrow ^3P_0$ nel ^{173}Yb , la larghezza di riga è molto minore della separazione delle sidebands e queste possono essere risolte spettralmente. Le sidebands tendono inoltre ad avere una larghezza maggiore della transizione che conserva lo stato di moto. Come accennato nella sezione 2.4 in un reticolo ottico la profondità dei

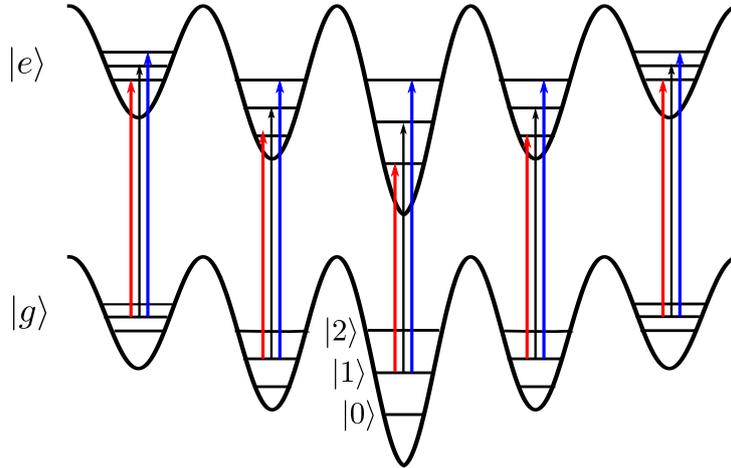


Figura 2.5: Meccanismo di formazione delle sidebands. La transizione dallo stato elettronico fondamentale $|g\rangle$ allo stato eccitato $|e\rangle$ avviene a partire da atomi posti nello stato vibrazionale $|1\rangle$. La dipendenza dalla profondità di reticolo delle transizioni verso gli stati $|e, 0\rangle$ e $|e, 2\rangle$ fa sì che nello spettro queste presentino una larghezza di riga maggiore rispetto alla transizione $|g, 1\rangle \rightarrow |e, 1\rangle$. Nell'immagine, la variazione di profondità delle buche del reticolo è esagerata a scopo esemplificativo.

siti reticolari varia infatti con la distanza dal centro del fascio. Ciò fa sì che, trascurando eventuali light shift, mentre le transizioni che conservano lo stato di moto, coinvolgendo solo la parte elettronica, non variano in frequenza da un sito reticolare all'altro, le sidebands, coinvolgendo anche la parte di moto, risentiranno della diversa spaziatura fra livelli di oscillatore di siti diversi, dando così luogo ad un profilo di riga allargato, come mostrato in figura 5.13.

3

Interazione tra fermioni ultrafreddi

In questo capitolo saranno descritte alcune delle caratteristiche fondamentali delle interazioni tra fermioni ultrafreddi. Saranno in particolare messe in evidenza le proprietà di un sistema fermionico con simmetria $SU(N)$ che costituisce l'oggetto di studio di questa tesi.

3.1 Considerazioni di carattere generale

In un gas di fermioni neutri sufficientemente diluito, gran parte delle proprietà del sistema sono riconducibili a collisioni elastiche a due corpi. In generale, la descrizione esatta del potenziale di interazione è estremamente complessa e devono necessariamente essere fatte delle approssimazioni per poter trattare il problema in modo analitico. Una prima approssimazione, se si escludono le interazioni di spin tra particelle diverse, è quella di considerare il potenziale come centrale, $V(\mathbf{r}) \equiv V(r)$. Questa assunzione risulta particolarmente valida per gli atomi a due elettroni per i quali lo spin è puramente nucleare e il momento magnetico a questo associato è trascurabile. Una possibile schematizzazione di $V(r)$ in questa approssimazione [19] prevede di descrivere l'interazione fra particelle per mezzo di un potenziale di Van der Waals, introducendo un *core* rigido per distanze fra particelle minori delle dimensioni atomiche, in modo da tenere di conto della repulsione fra le nuvole elettroniche dei due atomi. Avremo pertanto:

$$V(r) = \begin{cases} \infty & \text{per } r < r_c \\ -\frac{C_6}{r^6} & \text{per } r > r_c \end{cases} \quad (3.1)$$

dove C_6 è il coefficiente di Van der Waals e r_c è una distanza dell'ordine del raggio atomico. Il potenziale di Van der Waals è caratterizzato da un range

di interazione dell'ordine di [19]

$$b = (2\mu C_6/\hbar^2)^{1/4} \quad (3.2)$$

dove μ è la massa ridotta del sistema di due particelle interagenti. Il range così determinato va confrontato con la lunghezza di de Broglie λ_{dB} caratteristica degli atomi interagenti. Per temperature sufficientemente basse avremo $\lambda_{dB} > b$: dal momento che in questo regime la struttura fine del potenziale perde di importanza, il potenziale reale potrà essere sostituito con un qualsiasi potenziale che sia in grado di riprodurre la corretta lunghezza di scattering e la medesima funzione d'onda per $r > b$ del potenziale originale. È in questo contesto che si sviluppa il concetto di *pseudopotenziale* che verrà descritto nella sezione 3.2.

Per quanto riguarda l'itterbio, l'interazione fra due atomi che si trovino nello stato fondamentale è caratterizzata da un coefficiente di Van der Waals dell'ordine di $C_6 \simeq 2000$ a.u. (*unità atomiche*) [9] a cui è associato un range $b \simeq 180 a_0$ dove a_0 è il raggio di Bohr. Come mostrato in figura 3.1, in questo caso, la lunghezza d'onda di de Broglie diviene maggiore del range del potenziale per temperature inferiori a ~ 0.3 mK.

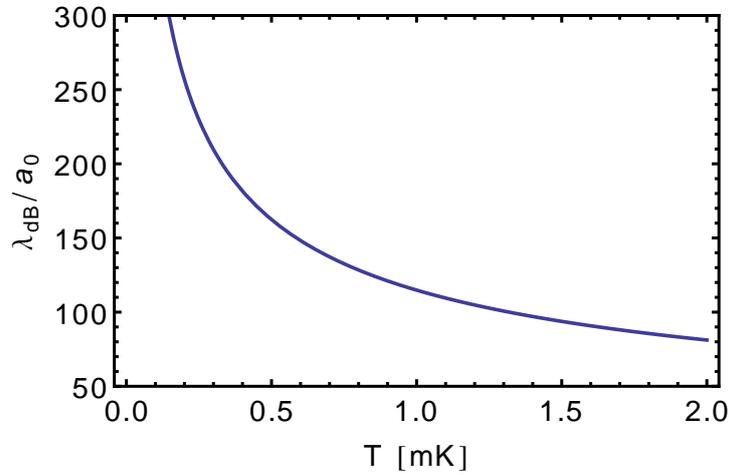


Figura 3.1: Lunghezza di de Broglie in unità di a_0 per un atomo di Itterbio in funzione della temperatura. λ_{dB} eguaglia il range di interazione del potenziale di Van der Waals per una temperatura di ~ 0.4 mK.

3.2 Lo pseudopotenziale

Nel formalismo della meccanica quantistica, un generico processo di scattering elastico fra due atomi è descritto a partire dall'hamiltoniana

$$H = \frac{P_{CM}^2}{2M} + \frac{p^2}{2\mu} + V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{P_{CM}^2}{2M} + H_{sc} \quad (3.3)$$

dove P_{CM} è l'impulso del centro di massa del sistema, p l'impulso relativo fra le due particelle, μ la massa ridotta, M la massa totale e $V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ il potenziale d'interazione fra i due corpi. La soluzione di H_{sc} , che rappresenta l'hamiltoniana associata al moto relativo fra i due corpi, è usualmente scritta in termini di una $\Psi(\mathbf{r})$ che è somma di una funzione d'onda incidente $\Psi_{in}(\mathbf{r})$ che assumeremo uguale ad un'onda piana ($\Psi_{in}(\mathbf{r}) \sim e^{ikiz}$) e di una diffusa $\Psi_{sc}(\mathbf{r})$, ovvero

$$\Psi(\mathbf{r}) = \Psi_{in}(\mathbf{r}) + \Psi_{sc}(\mathbf{r}) \quad (3.4)$$

Tenendo in considerazione quanto affermato nella sezione precedente, supponiamo adesso che l'interazione dipenda solo dalla distanza relativa fra le due particelle, ovvero che V abbia simmetria sferica. Per trattare il problema, risulta particolarmente conveniente scomporre $\Psi(\mathbf{r})$ in onde parziali, proiettandola sulla base delle armoniche sferiche. Avremo pertanto

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} Y_{\ell}^0(\theta, \phi) \frac{u_{k,\ell}(r)}{r} \quad (3.5)$$

dove nello sviluppo compaiono solo i termini a simmetria sferica dal momento che abbiamo assunto tale simmetria per il potenziale e dove la $u_{k,\ell}(r)$ è soluzione dell'equazione di Schroedinger radiale

$$\left[\frac{d}{dr^2} + k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{2\mu}{\hbar^2} V(r) \right] u_{k,\ell}(r) = 0. \quad (3.6)$$

Si può dimostrare [15] che se il potenziale ha range b finito, per $r \gg b$ la $u_{k,\ell}(r)$ assume la forma

$$u_{k,\ell}(r) \sim \sin \left(kr - \ell \frac{\pi}{2} + \delta_{\ell} \right) \quad (3.7)$$

la quale risulta essere analoga alla soluzione per $V = 0$ eccetto che per i *phase shift* δ_{ℓ} che determinano uno sfasamento dell'onda incidente rispetto a quella diffusa. Nel limite di basse energie ($k \rightarrow 0$), la barriera centrifuga che compare nella 3.6 fa sì che possano interagire solo particelle in onda s , e l'unico termine dello sviluppo in onde parziali che ha senso considerare è

quello con $\ell = 0$ ¹. In particolare, in questo caso, le proprietà del processo di scattering sono completamente individuate dal parametro

$$a_s = - \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\tan \delta_0(k)}{k} \quad (3.8)$$

che prende il nome di lunghezza di scattering. Per quanto il potenziale d'interazione possa essere complesso, nel limite di basse energie, si potrà sempre supporre di poterlo sostituire con un potenziale semplificato (uno *pseudopotenziale*), a patto che questo dia per il medesimo processo la stessa lunghezza di scattering del potenziale originale. Nel corso di questa sezione, seguendo la trattazione proposta da K. Huang e C.N. Yang [20, 21], verrà analizzato lo pseudopotenziale a delta regolarizzata che trova largo impiego nell'ambito della fisica atomica. Consideriamo quindi un processo generale di scattering elastico a due corpi, descritto, nel sistema del centro di massa, dall'hamiltoniana 3.3 e sia $\psi(r)$ la funzione d'onda relativa che risolve il problema di scattering stazionario

$$H_{sc}\psi(r) = E\psi(r) = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu}\psi(r). \quad (3.9)$$

Nota la funzione d'onda $\psi(r)$ soluzione della 3.9 per un dato k , l'idea alla base dell'argomentazione di Huang e Yang è quella di cercare un potenziale, che chiameremo $V_{pseudo}(r)$, che sia definito solo in $r = 0$ e che sostituito a $V(r)$ nella 3.9 dia come risultato un'equazione di Schroedinger che ammette le stesse soluzioni con gli stessi autovalori di quella originale. Consideriamo pertanto la funzione d'onda $\psi_\infty(r)$ soluzione della 3.9 nel limite di $r \rightarrow \infty$. Per $r \rightarrow \infty$ abbiamo che $V(r) \rightarrow 0$ e di conseguenza $\psi_\infty(r)$ soddisferà l'equazione

$$(\nabla^2 + k^2)\psi_\infty(r) = 0. \quad (3.10)$$

Supponiamo ora di espandere $\psi_\infty(r)$ sulla base delle armoniche sferiche. Per $r > 0$ otteniamo

$$\psi_\infty(r) = \sum_{\ell, m} A_{\ell, m} (j_\ell(kr) - \tan(\delta_\ell) n_\ell(kr)) Y_\ell^m(\theta, \phi) \quad (3.11)$$

dove j_ℓ e n_ℓ sono rispettivamente le funzioni sferiche di Bessel e Neumann e i δ_ℓ sono i phase shift dell'onda scatterata rispetto a quella incidente. È possibile dimostrare [20] che prolungando la funzione d'onda così espressa per

¹Il limite di scattering in onda s è molto ben rispettato per gas quantistici ultrafreddi a temperatura $T < 1 \mu\text{K}$, mentre nel caso di gas atomici non degeneri, quali ad esempio quelli che trovano impiego negli orologi ottici, anche lo scattering in onda p può essere rilevante [5].

$r \rightarrow 0$ si giunge ad un'equazione di Schroedinger per la ψ_∞ che è soluzione del problema per ogni r , e che nel limite di scattering in onda s è data dall'equazione

$$(\nabla^2 + k^2)\psi_\infty(r) = -\frac{4\pi \tan(\delta_0)}{k} \delta(\mathbf{r}) \frac{d}{dr}(r\psi_\infty(r)). \quad (3.12)$$

Il membro destro di quest'ultima equazione rappresenta l'espressione dello pseudopotenziale cercato. Tenendo infine conto che nel limite di basse energie la lunghezza di scattering a_s è definita dalla 3.8 otteniamo

$$V_{pseudo} = \frac{4\pi \hbar^2 a_s}{2\mu} \delta(\mathbf{r}) \frac{d}{dr}(r\cdot). \quad (3.13)$$

Caratteristica saliente dello pseudopotenziale così definito è la proporzionalità della forza d'interazione rispetto alla lunghezza di scattering a_s .

3.3 Spin changing collisions

La descrizione portata avanti fino a questo punto del processo di scattering fra due atomi non tiene conto dello stato interno delle due particelle, in particolar modo dello spin. A tal proposito, in questa sezione verranno formalizzate alcune delle proprietà fondamentali dei processi collisionali noti col nome di *spin changing collision*, in cui lo spin dei due atomi interagenti può cambiare a seguito dell'interazione. In particolare, dopo la trattazione del caso generale, verrà messo in evidenza come in atomi in cui lo spin nucleare I e lo spin elettronico $J = 0$ siano perfettamente disaccoppiati la proiezione del momento angolare totale lungo l'asse di quantizzazione della singola particella debba conservarsi a seguito di una collisione, consentendo così la preparazione di sistemi in cui la popolazione per ciascun stato di spin permesso non vari in funzione del tempo.

Consideriamo quindi due atomi in uno stato di momento angolare totale f e con proiezione di f lungo l'asse di quantizzazione rispettivamente uguale a m_1 e m_2 . A seguito di una collisione elastica le due particelle possono essere proiettate in un stato caratterizzato dai numeri quantici m_3 e m_4 , dovendo però necessariamente risultare per la conservazione del momento angolare, nel caso di potenziale a simmetria sferica, $m_1 + m_2 = m_3 + m_4$. Una siffatta interazione può essere descritta a partire da un potenziale del tipo [22, 23]

$$V(r) = \sum_{F=0}^{2f} g_F \mathcal{P}_F \delta(r) \frac{d}{dr}(r\cdot) \quad (3.14)$$

dove \mathcal{P}_F è il proiettore sullo stato di spin F , $\mathbf{F} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2$ è il momento angolare totale della coppia ($F = 0, \dots, 2f$) e $g_F = 4\pi\hbar^2 a_F / 2\mu$ è l'ampiezza del potenziale, direttamente proporzionale alla lunghezza di scattering a_F del canale collisionale considerato. Descrivendo il sistema atomico a due particelle per mezzo dello stato

$$|\psi\rangle \equiv |\phi_0(r)\rangle_1 |\phi_0(r)\rangle_2 \otimes |f, m_1; f, m_2\rangle \quad (3.15)$$

dove si è supposto che i due atomi siano caratterizzati dalla stessa funzione d'onda spaziale $\phi_0(r)$, ed esplicitando il proiettore su F come

$$\mathcal{P}_F = \sum_{M=-F}^F |F, M\rangle \langle F, M|, \quad (3.16)$$

avremo che per quanto concerne la parte di spin, il potenziale di interazione 3.14 potrà proiettare lo stato $|f, m_1; f, m_2\rangle$ sullo stato $|f, m_3; f, m_4\rangle$ a patto che l'espressione

$$\sum_{F=0}^{2f} \sum_{M=-F}^F \langle f, m_3; f, m_4 | F, M \rangle \langle F, M | f, m_1; f, m_2 \rangle g_F \quad (3.17)$$

sia diversa da zero, dove gli elementi $\langle f, m_i; f, m_j | F, M \rangle$ vanno intesi come coefficienti di Clebsch-Gordan. Negli atomi in cui lo spin sia totalmente nucleare, come ad esempio avviene per l'Itterbio negli stati 1S_0 e 3P_0 , non c'è interazione iperfine e lo spin nucleare non è accoppiato al grado di libertà elettronico. Dal momento che il potenziale d'interazione fra le particelle dipende soltanto dall'interazione fra le nubi elettroniche, le lunghezze di scattering associate ai vari canali F_i saranno pertanto tutte identiche fra loro. In questo caso le $g_F = g$ possono essere portate fuori dalle sommatorie di 3.17 ed applicando la completezza $\sum_{F=0}^{2f} \sum_{M=-F}^F = I$, l'espressione si riduce a $\langle f, m_3; f, m_4 | f, m_1; f, m_2 \rangle$ che dà risultato non nullo solo nel caso in cui $m_1 = m_3$ e $m_2 = m_4$. In questi atomi non avremo pertanto nessun meccanismo collisionale che può portare ad una variazione dello stato di spin nucleare.

3.4 Fermioni interagenti in un reticolo ottico

Il comportamento di un sistema di fermioni intrappolati in un reticolo ottico è riconducibile a due fenomeni distinti: il tunneling di particelle da un sito reticolare a siti a questo adiacenti e le collisioni fra atomi appartenenti allo stesso sito reticolare. Un sistema di questo tipo è efficacemente descritto

dal modello di Fermi-Hubbard alla cui analisi è dedicata la sezione 3.4.2. In particolare, dal momento che siamo interessati a descrivere un gas di Itterbio intrappolato in un reticolo ottico e in cui parte della popolazione sia stata eccitata verso lo stato metastabile 3P_0 , il caso che affronteremo riguarda particelle caratterizzate da due gradi di libertà elettronici e N gradi di libertà di spin fra loro completamente disaccoppiati. Nel descrivere un sistema siffatto il principio di esclusione di Pauli gioca un ruolo cruciale, impedendo a particelle identiche di essere localizzate all'interno dello stesso sito reticolare.

Dal momento che per quanto riguarda i termini di interazione, la fisica descritta dal modello di Fermi-Hubbard è riconducibile ad interazioni fra coppie di particelle all'interno di uno stesso sito reticolare, è utile innanzitutto esaminare il caso di due fermioni aventi due gradi di libertà elettronici e due di spin interagenti in una buca di potenziale, esempio a cui è dedicata la prossima sezione.

3.4.1 Sistema di due fermioni interagenti

Consideriamo il caso di due fermioni interagenti all'interno di una buca di potenziale tridimensionale. Nella trattazione che segue supporremo lo spazio delle fasi accessibile alle due particelle sia costituito da uno stato ground (g) e uno stato eccitato (e) entrambi stabili per quanto riguarda la parte elettronica e dagli stati (\uparrow e \downarrow) per quanto riguarda quella di spin. Supponendo che i due fermioni appartengano alla stessa specie atomica, e che quindi abbiano egual massa, avremo che l'hamiltoniana che descrive il sistema potrà esser scritta come

$$H = \sum_{i=1}^2 \left[\frac{p_i^2}{2m} + V_{ext}(\mathbf{r}_i) \right] + V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad (3.18)$$

dove V_{ext} è un potenziale esterno che intrappola i due atomi mentre V descrive l'interazione fra le due particelle. Il principio di esclusione di Pauli impone l'antisimmetrizzazione della funzione d'onda associata al sistema la quale, nel caso in cui le due particelle condividano lo stesso stato di moto, assume quindi la forma

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{2} \underbrace{(|\alpha\beta\rangle \pm |\beta\alpha\rangle)}_{\text{Stato elettronico}} \otimes \underbrace{(|\uparrow\downarrow\rangle \mp |\downarrow\uparrow\rangle)}_{\text{Stato di spin}} \otimes \underbrace{\phi(\mathbf{r}_1)\phi(\mathbf{r}_2)}_{\text{Moto del c.m.}} \quad (3.19)$$

dove $\phi(\mathbf{r})$ è la funzione d'onda spaziale di singola particella e gli indici α e β sono riferiti allo stato elettronico del sistema (g o e). Nel calcolo del valore di aspettazione di H vanno considerati quattro casi distinti, ovvero $\alpha = \beta = g$ (oppure $\alpha = \beta = e$), in cui la parte spaziale della funzione d'onda

è necessariamente di tripletto e quella di spin di singoletto, oppure $\alpha = g$ e $\beta = e$.

In particolare, in quest'ultimo caso, a seconda della simmetria della parte spaziale della funzione d'onda avremo due stati possibili per il sistema, i quali potranno essere scritti come:

$$|\Psi_{\pm}\rangle = |eg^{\pm}\rangle \phi(\mathbf{r}_1)\phi(\mathbf{r}_2) \quad (3.20)$$

dove

$$|eg^{\pm}\rangle = \frac{1}{2} (|g \uparrow\rangle|e \downarrow\rangle \pm |e \uparrow\rangle|g \downarrow\rangle \mp |g \downarrow\rangle|e \uparrow\rangle + |e \downarrow\rangle|g \uparrow\rangle) \quad (3.21)$$

sono rispettivamente lo stato spazialmente simmetrico ed antisimmetrico. Utilizzando una notazione più compatta, potremo scrivere

$$|eg^{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|g \uparrow, e \downarrow\rangle \pm |g \downarrow, e \uparrow\rangle) \quad (3.22)$$

dove $|g \uparrow, e \downarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|eg^+\rangle + |eg^-\rangle)$ e $|g \downarrow, e \uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|eg^+\rangle - |eg^-\rangle)$. Questi due nuovi stati, a differenza di quanto accade per $|eg^{\pm}\rangle$, sono caratterizzati da uno spin definito per ciascuno dei due stati elettronici. Se consideriamo adesso come potenziale d'interazione V fra le due particelle il potenziale 3.14 nel caso semplificato in cui la parte spaziale sia una delta di Dirac semplice, tenendo conto che avremo due soli canali collisionali, uno associato allo stato di singoletto di spin e l'altro allo stato di tripletto, potremo esprimere V come

$$V_{int}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = g_0 (a_{eg^+} \mathcal{P}_{eg^+} + a_{eg^-} \mathcal{P}_{eg^-}) \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad (3.23)$$

dove $g_0 = \frac{4\pi\hbar^2}{2\mu}$, \mathcal{P}_{eg^+} e \mathcal{P}_{eg^-} sono i proiettori rispettivamente sugli stati $|eg^+\rangle$ e $|eg^-\rangle$ mentre a_{eg^+} ed a_{eg^-} sono le lunghezze di scattering associate ai due canali collisionali. Nella notazione compatta introdotta in 3.22 avremo quindi

$$\mathcal{P}_{eg^{\pm}} = \frac{1}{2} \left(\underbrace{|g \uparrow, e \downarrow\rangle\langle g \uparrow, e \downarrow| + |g \downarrow, e \uparrow\rangle\langle g \downarrow, e \uparrow|}_{\mathcal{V}} \pm \underbrace{|g \downarrow, e \uparrow\rangle\langle g \uparrow, e \downarrow| + |g \uparrow, e \downarrow\rangle\langle g \downarrow, e \uparrow|}_{\mathcal{V}_{ex}} \right) \quad (3.24)$$

dove \mathcal{V} lascia invariato lo spin delle singole particelle, mentre \mathcal{V}_{ex} accoppia solo stati in cui lo spin delle particelle è invertito. Di conseguenza avremo

$$V_{int}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = g_0 \left[\left(\frac{a_{eg^+} + a_{eg^-}}{2} \right) \mathcal{V} + \left(\frac{a_{eg^+} - a_{eg^-}}{2} \right) \mathcal{V}_{ex} \right] \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \quad (3.25)$$

Il valore di aspettazione di V_{int} su una funzione d'onda $|\Psi\rangle$ del tipo 3.20 è banale, risultando semplicemente

$$\langle \Psi_{\pm} | V_{int} | \Psi_{\pm} \rangle = g_0 a_{eg^{\pm}} \int d\mathbf{r} \phi(\mathbf{r})^4. \quad (3.26)$$

V_{int} può tuttavia mediare anche interazioni in cui lo stato di spin delle singole particelle cambia, dando luogo ad una interazione di scambio, come nel caso

$$\langle g \downarrow, e \uparrow | V_{int} | g \uparrow, e \downarrow \rangle = g_0 \left(\frac{a_{eg^+} - a_{eg^-}}{2} \right) \int d\mathbf{r} \phi(\mathbf{r})^4. \quad (3.27)$$

Osserviamo che in quest'ultimo caso la forza dell'interazione è proporzionale alla differenza fra le due lunghezze di scattering. Questo è in accordo col risultato ricavato in sezione 3.3 dove è stato messo in evidenza come le *spin changing collisions* siano soppresse nel caso in cui le lunghezze di scattering associate ai vari canali collisionali siano tutte identiche fra loro.

L'interazione di scambio non ha analogo classico e, nella fisica della materia condensata, rappresenta uno dei meccanismi alla base di numerosi fenomeni legati al magnetismo orbitale.

3.4.2 Il modello di Fermi-Hubbard

Estendiamo ora il risultato trovato per due fermioni interagenti in una buca di potenziale al caso di N fermioni interagenti in un reticolo ottico. La trattazione che segue sarà limitata al caso particolare in cui gli stati elettronici (g ed e) del sistema abbiano momento angolare nullo ($J = 0$) e siano completamente disaccoppiati dallo spin nucleare I . Questa assunzione consente di estendere lo spazio delle fasi del sistema alle $2I + 1$ possibili proiezioni di I lungo l'asse di quantizzazione senza tuttavia dover introdurre una dipendenza dallo spin per le lunghezze di scattering associate all'interazione fra coppie di particelle. Assumeremo inoltre che tutti gli atomi si trovino nello stesso stato di moto corrispondente alla banda fondamentale del reticolo ottico. In questo contesto, uno stato di singola particella $|\alpha, n, j\rangle$ sarà quindi caratterizzato da tre numeri quantici, α che identifica lo stato elettronico (g o e), m che identifica la proiezione dello spin e j che identifica invece il sito reticolare in cui la particella è sita.

In generale, risulta più semplice descrivere sistemi a più di due particelle con la notazione della seconda quantizzazione. Identificheremo quindi uno stato del sistema come uno stato di Fock del tipo

$$|\Psi\rangle = |n_1, n_2, \dots, n_N\rangle \quad (3.28)$$

dove gli n_i rappresentano il numero di occupazione dell' i -esimo stato di singola particella e potranno assumere, dato il principio di esclusione di Pauli, solo i valori 0 o 1. Uno stato del sistema è creato a partire dallo stato di vuoto per mezzo dell'azione degli operatori di campo

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r})_{\alpha m}^\dagger = \sum_j w(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) c_{j\alpha m}^\dagger \quad (3.29)$$

dove le $w(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$ sono le funzioni di Wannier massimamente localizzate che descrivono la funzione d'onda di singola particella all'interno di un sito reticolare, mentre i $c_{j\alpha m}^\dagger$ sono operatori che applicati allo stato di vuoto creano una particella nel sito reticolare j -esimo, nello stato elettronico α e in quello di spin m . Gli operatori $c_{j\alpha m}$ obbediscono alla regola di anticommutazione

$$\{c_{j\alpha m}, c_{j'\beta m'}^\dagger\} = \delta_{\alpha,\beta} \delta_{j,j'} \delta_{m,m'}. \quad (3.30)$$

Per reticoli sufficientemente profondi, le funzioni di Wannier introdotte nella 3.29 sono caratterizzate da uno spread in larghezza dell'ordine della lunghezza di oscillatore armonico associata alla buca di potenziale reticolare. In questo caso, potremmo pensare di sostituire lo pseudopotenziale ricavato nella 3.13 con un potenziale a delta di Dirac semplice

$$V_\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{2\mu} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (3.31)$$

Ciò può essere formalizzato riscrivendo l'operatore 3.13 in coordinate cartesiane,

$$\delta(\mathbf{r}) \frac{d}{dr}(r \cdot) \rightarrow \delta(x)\delta(y)\delta(z) [(x \partial_x + y \partial_y + z \partial_z) + 1] \quad (3.32)$$

ed osservando che, se le funzioni di Wannier hanno una derivata sufficientemente regolare per $r \rightarrow 0$, questo, unitamente al fatto che le medesime funzioni sono definite solo in un intorno di $r = 0$, assicura di poter trascurare il termine tra parentesi tonde dell'espressione 3.32 che si riduce così ad una delta di Dirac semplice. Nel caso si scelga quindi di utilizzare uno pseudopotenziale a delta di Dirac, la notazione introdotta permette di scrivere l'hamiltoniana che descrive il sistema come [4]

$$\begin{aligned} H = & \sum_{\alpha,m} \int d\mathbf{r} \hat{\Psi}_{\alpha,m} \left(\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ext}(\mathbf{r}) \right) \hat{\Psi}_{\alpha,m} + \\ & + \frac{g_{eg}^+ + g_{eg}^-}{2} \sum_{m,m'} \int d\mathbf{r} \hat{\Psi}_{e,m}^\dagger \hat{\Psi}_{e,m} \hat{\Psi}_{g,m'}^\dagger \hat{\Psi}_{g,m'} + \\ & + \frac{g_{eg}^+ - g_{eg}^-}{2} \sum_{m,m'} \int d\mathbf{r} \hat{\Psi}_{g,m}^\dagger \hat{\Psi}_{e,m'}^\dagger \hat{\Psi}_{g,m'} \hat{\Psi}_{e,m} + \\ & + \sum_{\alpha,m < m'} g_{\alpha\alpha} \int d\mathbf{r} \hat{\Psi}_{\alpha,m}^\dagger \hat{\Psi}_{\alpha,m} \hat{\Psi}_{\alpha,m'}^\dagger \hat{\Psi}_{\alpha,m'} \end{aligned} \quad (3.33)$$

dove gli $\hat{\Psi}_{\alpha,m} = \sum_j w(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) c_{\alpha m j}$ sono i campi fermionici introdotti in 3.29 mentre $g_X = \frac{4\pi\hbar^2 a_X}{2\mu}$ con $X = gg, ee, eg^+, eg^-$. Trascurando i termini costanti

e esplicitando la dipendenza degli operatori di campo dalle funzioni di Wannier otteniamo l'hamiltoniana di Fermi-Hubbard per un sistema a due orbitali

$$H = - \sum_{\langle i,j \rangle \alpha, m} J_\alpha (c_{i\alpha m}^\dagger c_{j\alpha m} + h.c) + \sum_{j, \alpha} \frac{U_{\alpha\alpha}}{2} n_{j\alpha} (n_{j\alpha} - 1) + \\ + V \sum_{j, m, m'} n_{jem} n_{jgm'} + V_{ex} \sum_{j, m, m'} c_{jgm}^\dagger c_{jem'}^\dagger c_{jgm'} c_{jem} \quad (3.34)$$

Il termine $J_\alpha = - \int d\mathbf{r} w_\alpha(\mathbf{r}) (-\hbar^2/2m)\nabla^2 + V_{ext}(\mathbf{r}) w_\alpha(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ dove \mathbf{r}_0 è un vettore primitivo del reticolo e $\langle i, j \rangle$ indica una somma su siti reticolari primi vicini, descrive l'energia di tunneling e dipende dall'overlap delle funzioni di Wannier fra siti adiacenti. I termini $U_{\alpha\alpha}, V$ e V_{ex} descrivono invece l'energia di interazione fra atomi nello stesso sito reticolare. In particolare

$$U_{\alpha\alpha} = g_{\alpha\alpha} \int d\mathbf{r} w_\alpha^4(\mathbf{r}) \quad (3.35)$$

descrive l'interazione fra atomi nello stesso stato elettronico, mentre

$$V = (U_{eg}^+ + U_{eg}^-)/2 \quad (3.36)$$

e

$$V_{ex} = (U_{eg}^+ - U_{eg}^-)/2 \quad (3.37)$$

dove

$$U_{eg}^\pm = g_{eg}^\pm \int d\mathbf{r} w_e^2(\mathbf{r}) w_g^2(\mathbf{r}) \quad (3.38)$$

descrivono rispettivamente l'interazione diretta e di scambio fra coppie di fermioni in stati elettronici diversi.

3.4.3 Simmetrie dell'hamiltoniana

Nella sezione 3.3 è stato dimostrato che in un sistema in cui le lunghezze di scattering non dipendano dallo stato di spin delle particelle interagenti, la popolazione per ciascun stato di spin si conserva. Questo risultato può essere formalizzato in termini di simmetrie dell'hamiltoniana 3.33. Definiamo a tal proposito gli operatori

$$S_n^m = \sum_{\alpha, j} c_{\alpha, m, j}^\dagger c_{\alpha, n, j} \quad (3.39)$$

il cui effetto è quello di mutare da n a m lo stato di spin di una particella posta nel sito reticolare j -esimo ed avente stato elettronico α . Si può dimostrare che per ogni n e m gli operatori 3.39 commutano con l'hamiltoniana di Fermi-Hubbard 3.33

$$[S_n^m, H_{FH}] = 0. \quad (3.40)$$

In particolare, per $m = n$, gli operatori 3.39 si riducono agli operatori numero per lo stato di spin n -esimo. In tal caso, la 3.40 assicura che la popolazione per ciascun stato di spin si conserva. Osserviamo infine che, dal momento che gli operatori S_n^m soddisfano l'algebra di $SU(N)$

$$[S_n^m, S_p^q] = \delta_{mq} S_n^p - \delta_{pn} S_q^m. \quad (3.41)$$

dove con $N = 2I + 1$ si intende il numero di possibili stati di spin. È per questo che, ad esempio, ci potremo riferire ad un gas di ^{173}Yb ($I = 5/2$) come ad un sistema avente simmetria $SU(6)$.

3.4.4 Limiti del modello di Fermi-Hubbard

L'hamiltoniana 3.33 descrive interazioni di singolo sito la cui forza è direttamente proporzionale alla lunghezza di scattering. Come vedremo nella sezione 3.5 questo andamento cessa di esser valido per valori della lunghezza di scattering comparabili con la lunghezza dell'oscillatore armonico associato alla buca di potenziale reticolare. In questo caso, rilevante per i risultati sperimentali discussi nel capitolo 6, sarà necessario tener conto di un modello a più bande per descrivere correttamente il sistema in esame.

3.4.5 Tempo di tunneling

Note le funzione di Wannier $w_n(\mathbf{r})$, dove n rappresenta l'indice di banda, è possibile calcolare il tempo medio necessario ad un atomo per passare da un sito reticolare ad uno adiacente per effetto tunnel. Il tempo di tunneling è definito a partire dagli elementi di matrice $J_{i,j}$ del termine cinetico del modello di Fermi-Hubbard

$$J_{i,j} = \int d\mathbf{r} w_n^*(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right) w_n(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \quad (3.42)$$

come

$$\tau = \frac{\hbar}{n_{pv} J} \quad (3.43)$$

dove $J \equiv J_{i,i+1}$ è l'elemento di matrice 3.42 calcolato per due siti reticolari fra loro adiacenti e n_{pv} è il numero di siti reticolari primi vicini ($n_{pv} = 6$ nel caso tridimensionale.)

Il tempo di tunneling calcolato per mezzo della 3.42 per un atomo appartenente alla banda fondamentale ($n = 1$) o alla prima banda eccitata reticolare è riportato in figura 3.2 ($n = 2$) in funzione della profondità di reticolo.

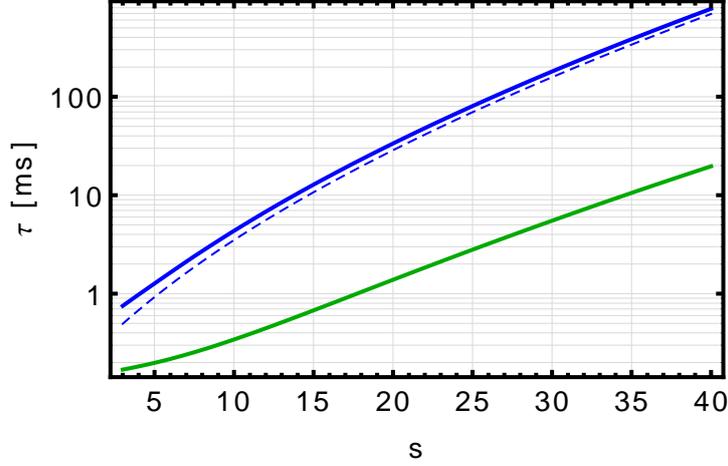


Figura 3.2: Tempo di tunneling in funzione della profondità di reticolo per un atomo appartenente alla banda fondamentale (in blu) o alla prima banda eccitata reticolare (in verde).

La linea tratteggiata corrisponde al tempo di tunneling calcolato per mezzo della formula approssimata [19] $\tau = \hbar \left(\frac{4}{\sqrt{\pi}} E_r s^{3/4} e^{-2s^{1/2}} \right)^{-1}$.

3.5 Atomi fortemente interagenti - Il modello di Busch

Il modello di Fermi-Hubbard prevede una dipendenza lineare dell'energia d'interazione rispetto alla lunghezza di scattering, come si evince chiaramente dalle relazioni 3.35, 3.36, 3.37. Questo risultato si basa su un modello a singola banda ed è in realtà valido solo quando la lunghezza di scattering a_s è molto minore dell'estensione spaziale della funzione d'onda atomica. Al crescere della lunghezza di scattering, la dipendenza lineare dell'energia d'interazione U da a_s cessa di essere valida e U satura, per lunghezze di scattering infinite, all'energia di separazione tra le prime due bande reticolari. Questo risultato è stato dimostrato analiticamente da T.Busch *et al.* [24] nel caso di due particelle interagenti in una buca di potenziale armonica, tridimensionale ed isotropa per mezzo di uno pseudopotenziale a delta regolarizzato. In questa sezione sarà analizzata la trattazione proposta da Busch. L'estensione dei risultati trovati al caso di due particelle interagenti in un sito reticolare verrà invece affrontata nel capitolo 6. Consideriamo quindi due atomi che interagiscano in una buca di potenziale per mezzo dello pseudopotenziale

$$V_{pseudo}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi\hbar^2}{2\mu} a_s \delta(\mathbf{r}) \frac{d}{dr}(r \cdot) = \frac{4\pi\hbar^2}{m} a_s \delta_{reg}(\mathbf{r}) \quad (3.44)$$

dove $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ è la coordinata che descrive il moto relativo fra le due particelle, $r = |\mathbf{r}|$ e a_s è la lunghezza di scattering associata al processo

di collisione elastica. L'hamiltoniana che descrive l'interazione fra le due particelle all'interno della buca di potenziale armonica sarà data da

$$H = \frac{\hbar^2}{m} \left[\frac{1}{2} \left(-\nabla_{\mathbf{r}_1}^2 - \nabla_{\mathbf{r}_2}^2 + \frac{1}{a_{ho}^4} (r_1^2 + r_2^2) \right) + 4\pi a_s \delta_{reg}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \right] \quad (3.45)$$

dove

$$a_{ho} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \quad (3.46)$$

è la lunghezza di oscillatore armonico. Il cambio di variabili ² $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/\sqrt{2}$ e $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)/\sqrt{2}$ consente di separare l'hamiltoniana in due parti, una dipendente dal solo moto relativo e l'altra unicamente dal moto del centro di massa. La dinamica dell'interazione risiede interamente nella parte di hamiltoniana associata al moto relativo. Il problema si riduce così alla risoluzione dell'equazione di Schroedinger di particella singola

$$\frac{\hbar^2}{2m} \left(-\frac{1}{2} \nabla_r^2 + \frac{1}{2a_{ho}^4} r^2 + \sqrt{2}\pi a_s \delta_{reg}(\mathbf{r}) \right) \Psi(\mathbf{r}) = E \Psi(\mathbf{r}). \quad (3.47)$$

dove E è l'energia associata al moto relativo e le cui soluzioni per $a_s = 0$ sono le autofunzioni dell'oscillatore armonico tridimensionale isotropo. L'idea alla base della trattazione di Busch per determinare le soluzioni della 3.47 per $a_s \neq 0$, consiste nello sviluppare la $\Psi(r)$ incognita sulla base delle autofunzioni dell'oscillatore armonico $\phi_{n,\ell}(r)$, tenendo conto che nello sviluppo compariranno solo le autofunzioni caratterizzate da $\ell = 0$ (e quindi da n pari essendo n ed ℓ legati dalla relazione $n = 2k + \ell$ con k intero), essendo queste le uniche definite nell'origine, ossia dove lo pseudopotenziale è diverso da 0. I termini con $\ell \neq 0$, non essendo definiti nell'origine, non risentiranno infatti dello pseudopotenziale, e per questi continueranno a valere le soluzioni dell'oscillatore armonico standard. Avremo pertanto

$$\Psi(r) = \sum_n c_n \phi_{n,0}(r). \quad (3.48)$$

Dalla determinazione dei coefficienti c_n si ottiene per la $\Psi(r)$ la forma

$$\Psi(r) = A_n e^{-\frac{1}{2}(r/a_{ho})^2} U \left[\frac{3}{4} - \frac{e_n(a_s)}{2\hbar\omega}, \frac{3}{2}, \left(\frac{r}{a_{ho}} \right)^2 \right] \quad (3.49)$$

dove A_n è una costante di normalizzazione, $U[a, b, c]$ è la funzione ipergeometrica confluyente e $e_n(a_s)$ sono gli autovalori dell'hamiltoniana per i quali

²Si tratta di una separazione di variabili non standard, in accordo con quella usata in [24], la quale consente di ottenere la stessa massa effettiva sia per la parte di hamiltoniana associata al moto relativo sia per quella associata al moto del centro di massa.

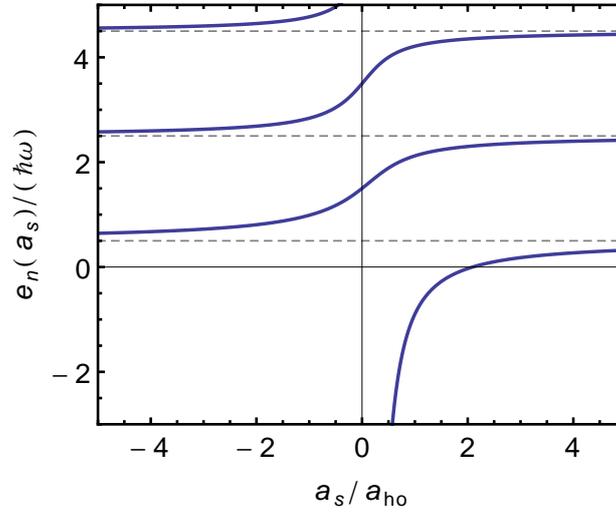


Figura 3.3: (a) Energia di interazione (in unità di $\hbar\omega$) in funzione della lunghezza di scattering (in unità della lunghezza di oscillatore armonico) di due particelle interagenti in una buca di potenziale armonica isotropa. Le linee tratteggiate sono i livelli a cui satura l'energia di interazione per lunghezze di scattering infinite.

$\Psi(r)$ è soluzione, la cui determinazione richiede la risoluzione dell'equazione trascendente

$$\sqrt{2} \frac{\Gamma\left[\frac{3}{4} - \frac{e_n(a_s)}{2\hbar\omega}\right]}{\Gamma\left[\frac{1}{4} - \frac{e_n(a_s)}{2\hbar\omega}\right]} - \frac{a_{ho}}{a_s} = 0 \quad (3.50)$$

dove $\Gamma[z]$ è la funzione Gamma di Eulero. L'indice n che appare nella definizione degli $e_n(a_s)$ è necessario per distinguere le infinite soluzioni della 3.50 corrispondenti a stati vibrazionali diversi della trappola, una volta fissata la lunghezza di scattering a_s .

L'andamento dell'energia d'interazione $e_n(a_s)$ in funzione di a_s è riportato in figura 3.3. Dall'immagine risulta evidente come, fissato n , l'energia d'interazione coincida con quella dell'oscillatore armonico tridimensionale ($\hbar\omega(n + \frac{3}{2})$ con $n = 0, 2, 4, \dots$) per $a_s = 0$ e tenda a saturare al valore $\hbar\omega(n + \frac{5}{2})$ per $a_s \rightarrow \infty$ e al valore $\hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ per $a_s \rightarrow -\infty$.

4

Sistema sperimentale

In questo capitolo verrà fornita una breve descrizione dell'apparato sperimentale utilizzato in laboratorio per realizzare un gas degenere di Itterbio ed eccitarne la transizione d'orologio $^1S_0 \rightarrow ^3P_0$.

La sezione 4.1 è dedicata alla descrizione della sorgente di luce laser a 578 nm utilizzata per eccitare la transizione $^1S_0 \rightarrow ^3P_0$, mentre in sezione 4.2 verranno riassunte le fasi principali di raffreddamento che da un gas di Yb alla temperatura di 500 °C consentono di ottenere un gas di Fermi degenere.

4.1 Sorgente laser a 578 nm

La sorgente laser in esame utilizzata per eccitare la transizione $^1S_0 \rightarrow ^3P_0$ in atomi di ^{173}Yb , già presente in laboratorio prima dell'inizio di questo lavoro di tesi, è caratterizzata da una larghezza di riga estremamente ridotta, dell'ordine dei 50 Hz, che, come vedremo più avanti nel corso del capitolo 5, sono un requisito necessario per poter osservare i dettagli della struttura della transizione $^1S_0 \rightarrow ^3P_0$ in atomi di ^{173}Yb intrappolati in un reticolo ottico tridimensionale. Questo valore della larghezza di riga è stato ottenuto stabilizzando il laser su un modo di una cavità in vetro ULE (*ultra low expansion*) ad altissima finesse ($\mathcal{F} \simeq 170000$) già impiegata all'Istituto Nazionale di Ricerca Metrologica (INRIM) di Torino nell'ambito della realizzazione di un orologio ottico all'Itterbio [25]. In questa sezione, dopo una breve descrizione dello schema ottico che permette il funzionamento del laser (per ulteriori approfondimenti si rimanda a [26]), saranno discussi il metodo di stabilizzazione in temperatura e la caratterizzazione del drift della cavità ULE.

4.1.1 Funzionamento

La luce laser a 578 nm è ottenuta per generazione di seconda armonica a partire dalla radiazione infrarossa a 1156 nm prodotta da un laser a quantum dot montato in una cavità estesa (ECDL) in configurazione Littrow, come mostrato nell'immagine 4.1. Il fascio laser uscente dalla cavità ha una potenza di circa 200 mW e viene innanzitutto collimato e reso simmetrico lungo il piano focale per mezzo di un sistema di lenti. Parte del fascio (circa 4 mW) è successivamente prelevata tramite di un beam splitter e trasmessa attraverso una fibra ottica ad un frequency comb che consente di misurare la frequenza della radiazione infrarossa. La parte restante del fascio viene invece convogliata verso una cavità di duplicazione, all'interno della quale, sfruttando le proprietà non lineari di un cristallo di LiNbO_3 , avviene la generazione di luce gialla a 578 nm. La cavità, di tipo *bow-tie*, consente di incrementare l'efficacia di conversione del cristallo non lineare fintantoché è soddisfatta la condizione di risonanza con la radiazione infrarossa in ingresso. Tale condizione viene realizzata tramite il metodo Haensch-Coillaud, il quale permette di agganciare la cavità al laser in modo tale che questa ne segua le fluttuazioni in frequenza, utilizzando come attuatore un elemento piezoelettrico su cui è montato uno degli specchi della cavità stessa (vedi figura 4.3). La radiazione a 578 nm uscente dalla cavità di duplicazione ha una potenza di circa 50 mW e viene impiegata sia come luce di spettroscopia, sia per stabilizzare il laser su uno dei modi della cavità ULE. A tal proposito, un beam splitter divide il fascio proveniente dalla cavità di duplicazione in due parti a cui ci riferiremo come ramo di spettroscopia, e ramo di stabilizzazione (vedi figura 4.3) mentre una lamina posta a monte del beam splitter $\lambda/2$ ($L1$ in figura 4.3) consente di selezionare la potenza da mandare su ciascuno dei due rami. Il ramo di spettroscopia termina con una fibra utilizzata per trasmettere la luce a 578 nm sul banco ottico che ospita l'esperimento con atomi di Itterbio. A monte della fibra un AOM (*Acousto-Optic Modulator*), indicato come AOM_1 in figura

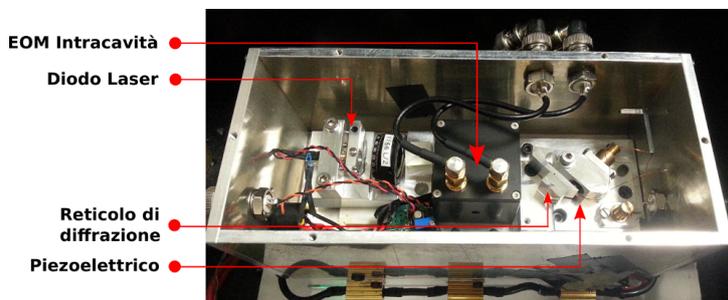


Figura 4.1: Interno della cavità ECDL.

4.3, consente una regolazione fine della frequenza della luce di spettroscopia, nonché il suo spegnimento ed accensione in tempi dell'ordine del μs . Lungo il ramo di stabilizzazione un secondo AOM (AOM_2) montato in configurazione di doppio passaggio consente invece di modificare la frequenza del fascio, portandola ad un valore vicino a quello di uno dei modi della cavità ULE.

La cavità ULE è alloggiata all'interno di una scatola con pareti di PVC foderate di poliestere estruso che ha lo scopo di isolarla termicamente dal resto del laboratorio. Maggiori dettagli sull'isolamento della cavità saranno discussi più avanti nel corso di questo capitolo. La luce a 578 nm giunge all'interno della scatola per mezzo di una fibra ottica e l'aggancio ad uno dei modi della cavità è realizzato col metodo Pound-Drever-Hall [27]. A tal proposito si utilizza un EOM (*Electro-Optic Modulator*) risonante per introdurre sulla frequenza portante del fascio f due sidebands a frequenza $f_{PDH} = f \pm 7$ MHz. La luce riflessa dalla cavità viene raccolta da un fotodiodo e il segnale in uscita da questo, una volta demodolato, va a costituire la sorgente del segnale d'errore con cui viene stabilizzata la frequenza del laser. Un'immagine della cavità e del sistema di aggancio è riportata in figura 4.2.

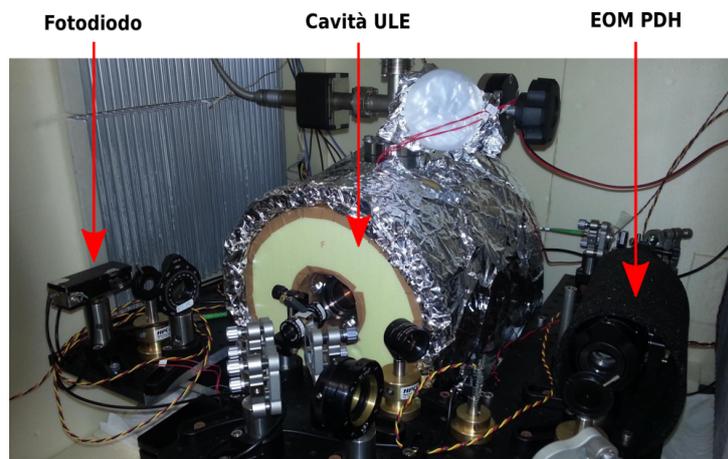


Figura 4.2: Interno della scatola isolante che ospita la cavità ULE.

La stabilizzazione della frequenza del laser è stata realizzata agendo su due distinti attuatori per mezzo di altrettanti controllori PID:

- un piezoelettrico che consente di spostare finemente il reticolo della cavità estesa modificando così la lunghezza fisica della cavità stessa;
- un EOM broadband posto internamente alla cavità estesa tra la sorgente laser a 1156 nm e il reticolo di diffrazione (vedi figura 4.1).

L'EOM rappresenta un elemento insolito nella realizzazione delle cavità in configurazione estesa ed ha lo scopo di consentire una variazione fine e veloce

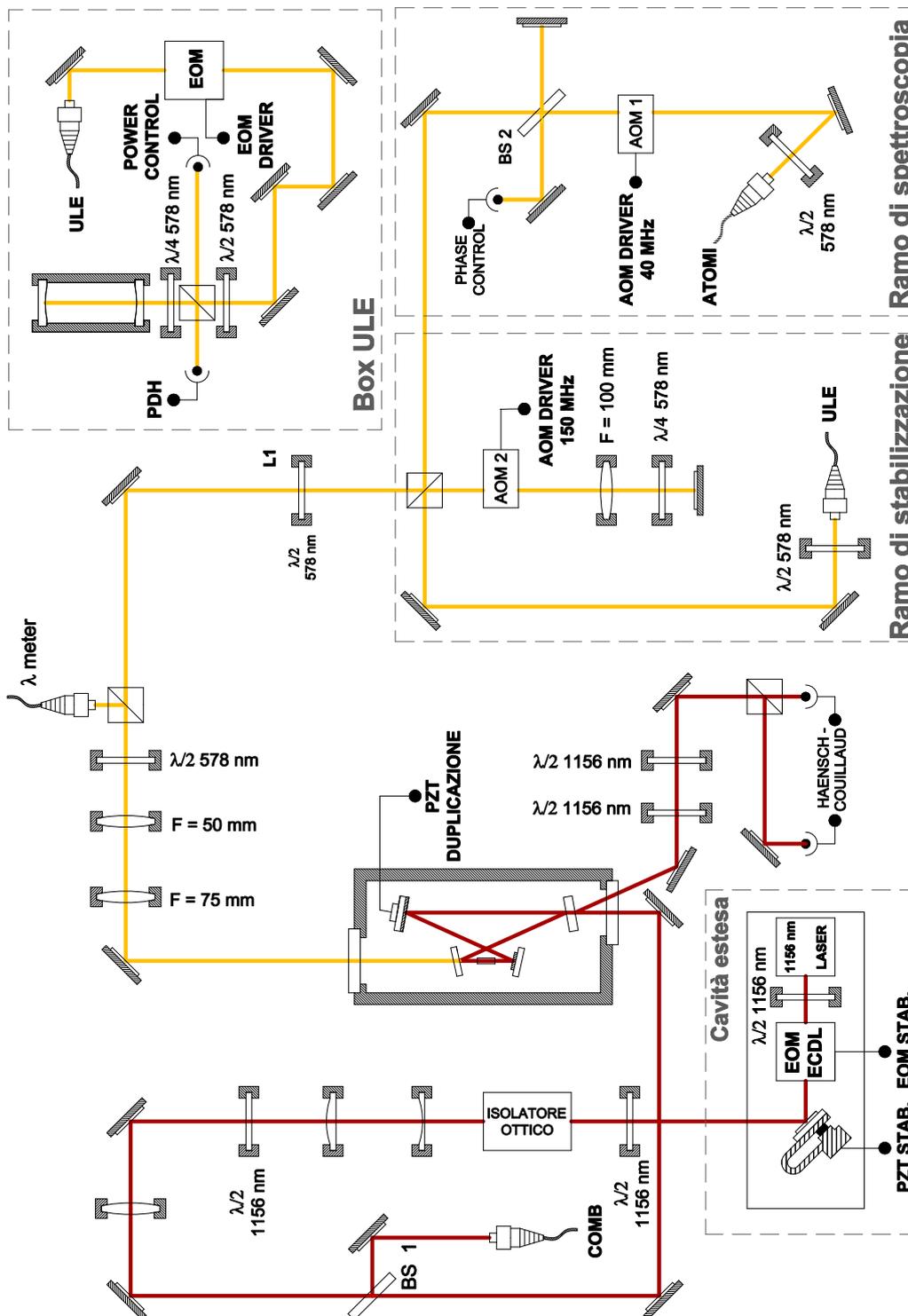


Figura 4.3: Schema ottico del sistema laser utilizzato per generare luce a 578 nm.

del cammino ottico della cavità. Tale variazione è ottenuta applicando al dispositivo una differenza di potenziale, il cui effetto è quello di modificare l'indice di rifrazione del cristallo di cui l'EOM è composto e, di conseguenza, il cammino ottico della luce che lo attraversa. Nell'EOM utilizzato, ad esempio, tale variazione è dell'ordine di 1 nm/V, corrispondenti a circa 3 MHz/V sulla frequenza del laser infrarosso.

La differenza sostanziale tra l'utilizzo di un piezoelettrico e quello di un EOM come attuatori sta nella banda passante dei due dispositivi, essendo questa limitata al kHz per i primi ed estesa ai MHz per i secondi. Proprio per questo, mentre il piezoelettrico è utilizzato per correggere la componente a basse frequenze del segnale di errore (fino a 200 Hz), l'EOM intracavità trova invece impiego nella correzione della componente ad alte frequenze, consentendo di ottenere una banda di aggancio di 500 kHz.

Come accennato nell'introduzione di questo capitolo, la stabilizzazione del segnale ottenuta per mezzo dei due attuatori consente di poter ottenere una larghezza di riga finale della luce a 578 nm inferiore ai 50 Hz su scale di tempo della decina di secondi. Tuttavia, su scale di tempo più lunghe, la frequenza tenderà a fluttuare a causa di drift termici e di invecchiamento (*aging*) del vetro di cui sono composti specchi e corpo della cavità. Come vedremo più avanti, il drift termico può essere minimizzato stabilizzando la cavità intorno ad una temperatura in cui il coefficiente di espansione termica è minimo, mentre il drift di invecchiamento può essere caratterizzato misurando direttamente la frequenza della radiazione infrarossa a 1156 nm con un frequency comb. Nel capitolo 5 vedremo invece come sia possibile una migliore caratterizzazione del drift ricorrendo a misure spettroscopiche.

4.1.2 Misura della frequenza dei modi della cavità ULE

Per come è costruito lo schema ottico del laser, avremo che la frequenza della luce in uscita dal ramo di spettroscopia sarà caratterizzata dalla frequenza

$$f = -2f_{AOM_2} + f_{AOM_1} + f_{ULE} \quad (4.1)$$

dove f_{ULE} è la frequenza del modo della cavità ULE sulla quale il laser è agganciato, f_{AOM_2} è la frequenza di lavoro dell' AOM_2 posto sul ramo di stabilizzazione e f_{AOM_1} è la frequenza di lavoro dell' AOM_1 posto a monte della fibra sul ramo di spettroscopia. I due AOM vanno intesi come operanti all'ordine +1. La 4.1, espressa in funzione della frequenza f_{IR} di emissione del diodo laser assume la forma

$$f = 2f_{IR} + f_{AOM_1}. \quad (4.2)$$

Al fine di poter eccitare la transizione $^1S_0 \rightarrow ^3P_0$ in atomi di ^{173}Yb è necessario che la 4.1 coincida con la frequenza della transizione stessa, il cui valore, noto con la precisione di 4.4 kHz, è [6]

$$f_{(^3P_0)} = 518\,294\,576.850 \text{ MHz.} \quad (4.3)$$

La condizione $f = f_{(^3P_0)}$ viene soddisfatta agganciando innanzitutto il laser sul modo di cavità più vicino in frequenza a $f_{(^3P_0)}$. Supponendo note le frequenze di risonanza della cavità ULE, la frequenza del laser, così stabilizzata al valore $(f_{ULE} - 2f_{AOM_2})$ viene successivamente portata al valore desiderato $f_{(^3P_0)}$ con un'opportuna scelta dello shift in frequenza degli AOM 1 e 2.

Il primo passo è pertanto quello di misurare la frequenza dei modi della cavità ULE. A tal fine è stato predisposto un link in fibra ottica che preleva parte della radiazione a 1156 nm emessa dal diodo laser e la trasporta fino al laboratorio 87 del dipartimento di Fisica e Astronomia, dove, grazie ad un frequency comb, è possibile misurarne la frequenza con la precisione di circa 1 kHz.

La misura di una frequenza incognita con un frequency comb è concettualmente molto semplice e qui ne riassumeremo solo gli aspetti salienti. Maggiori dettagli possono essere trovati in [27]. Lo spettro del comb è caratterizzato dalla successione di frequenze equispaziate

$$f_n = f_{Off} + n \cdot f_{RR} \quad (4.4)$$

dove n è un numero intero positivo, mentre f_{Off} e f_{RR} prendono rispettivamente il nome di frequenza di offset e di ripetizione. Facendo interferire una radiazione a frequenza incognita f_x con la radiazione generata dal comb, si misura una nota di battimento di frequenza f_{BN} uguale alla distanza in frequenza fra la radiazione incognita ed il dente del comb più vicino a questa. Nota f_{BN} , la frequenza incognita risulterà pertanto essere uguale a

$$f_x = f_{Off} + N \cdot f_{RR} + f_{BN}. \quad (4.5)$$

dove N indica il numero del dente più vicino in frequenza a f_x . Per quanto riguarda il comb messo a disposizione dal laboratorio 87, la frequenza di ripetizione è regolata per mezzo del parametro Δ_{RR} che è legato a f_{RR} dalla relazione

$$f_{RR} = \frac{980 \text{ MHz} + \Delta_{RR}}{4} = 245 + \frac{\Delta_{RR}}{4} \text{ [MHz]}. \quad (4.6)$$

Le misure eseguite per determinare la frequenza dei modi della cavità ULE sono state tutte effettuate impostando $f_{Off} = 20 \text{ MHz}$ e $\Delta_{RR} = (20 \text{ MHz} + 280 \text{ Hz})$. L'accuratezza dei due parametri è, rispettivamente, di 1 Hz per f_{Off} e di 10^{-3} Hz per Δ_{RR} .

Nella 4.5 l'unico parametro non immediatamente accessibile è il numero N che individua il dente del comb più vicino alla frequenza incognita. Il metodo più diretto per determinare N consiste nel misurare la frequenza incognita con un misuratore di lunghezza d'onda (λ -meter) che sia caratterizzato da una incertezza sul valore letto minore della frequenza di ripetizione del comb. Detta f_λ la frequenza misurata dallo strumento, in questo caso avremo banalmente

$$N = \text{Int} \left[\frac{f_\lambda}{f_{RR}} \right] \quad (4.7)$$

dove $\text{Int}[\cdot]$ denota l'operazione di parte intera. Il laboratorio 87 dispone di un λ -meter avente una precisione di 40 MHz. Tuttavia, come abbiamo verificato in fase di misura, l'utilizzo di uno strumento con queste caratteristiche può facilmente condurre ad errori di riproducibilità anche dell'ordine del GHz sulla frequenza misurata nel caso in cui il fascio laser non sia perfettamente allineato con la fibra di ingresso. Per verificare il corretto allineamento del λ -meter è stata misurata la frequenza del laser infrarosso che a seguito di un processo di duplicazione viene impiegato per eccitare la transizione $^1S_0 \rightarrow ^3P_1$, la cui frequenza è nota con la precisione di 1 MHz [28].

Esiste tuttavia un metodo alternativo a quello appena descritto che consente di determinare N ricorrendo solo all'utilizzo del comb. Supponiamo di effettuare due misure della frequenza di battimento lasciando l'offset del comb inalterato e variando la frequenza di ripetizione tra una misura e l'altra. Dal momento che la frequenza misurata è la stessa avremo

$$f_x = f_{Off} + N_1 \cdot f_{RR_1} + f_{BN_1} \quad (4.8)$$

per la prima misura e

$$f_x = f_{Off} + N_2 \cdot f_{RR_2} + f_{BN_2} \quad (4.9)$$

per la seconda. Dall'uguaglianza della 4.8 con la 4.9 otteniamo

$$N_1 = \frac{\Delta N f_{RR_2} + f_{BN_2} - f_{BN_1}}{f_{RR_1} - f_{RR_2}} \quad (4.10)$$

dove $\Delta N = N_2 - N_1$. La quantità ΔN è determinabile variando finemente f_{RR} tra f_{RR_1} e f_{RR_2} e contando quante volte la beat note torna ad assumere lo stesso valore iniziale, il che corrisponde a un salto di un dente del comb. Osserviamo inoltre che essendo l'errore sulla 4.10 proporzionale a $|f_{RR_1} - f_{RR_2}|^{-1}$, il valore di N determinato con questo metodo sarà tanto più preciso quanto maggiore sarà la variazione di f_{RR} fra le due misure. In particolare, se definiamo Δf_{BN_1} e Δf_{BN_2} come gli errori sulle due frequenze di battimento misurate, avremo

$$\Delta N_1 = \frac{\sqrt{\Delta f_{BN_1}^2 + \Delta f_{BN_2}^2}}{|f_{RR_1} - f_{RR_2}|}. \quad (4.11)$$

Con un'incertezza tipica sulle misure della frequenza di battimento dell'ordine del kHz, dalla 4.11 avremo che per ottenere $\Delta N \ll 1$ sarà necessario variare la frequenza di ripetizione di almeno 10 kHz.

La determinazione di N per uno stesso modo della cavità ULE è stata effettuata con entrambi i metodi descritti che hanno dato risultati fra loro compatibili. In particolare, il valore di N misurato, ovvero $N = 1036589$, corrisponde ad una frequenza del modo di cavità di

$$f_{ULE} = 518\,294\,325.748 \text{ [MHz]}. \quad (4.12)$$

Misure successive hanno permesso di determinare al kHz il *free spectral range* della cavità ULE, che è risultato essere 1496.089 MHz e di stabilire che proprio la frequenza del modo di cavità poco sopra riportata risulta essere quella più vicina al valore 4.3.

Il valore 4.12, ricavato l'11-02-14, non è costante nel tempo ma varia, come già accennato, a causa del drift dovuto al fenomeno di *aging* degli specchi della cavità di circa 5 kHz al giorno. Dal valore ricavato segue che utilizzando un AOM da 40 MHz all'ordine + 1 a monte della fibra ottica sul ramo di spettroscopia, la condizione 4.1 di uguaglianza fra la frequenza della luce in uscita dal ramo di spettroscopia e quella della transizione $^1S_0 \rightarrow ^3P_0$ si ottiene utilizzando un AOM operante intorno a 105 MHz all'ordine +1 sul ramo di stabilizzazione.

4.1.3 Caratterizzazione del drift e della temperatura critica della cavità ULE

In un sistema che sfrutta l'aggancio ad un modo di cavità per stabilizzare la frequenza di un laser, uno dei fattori che contribuisce maggiormente a determinare la larghezza dello spettro di emissione del laser è la stabilità della frequenza dei modi di cavità. Questa è a sua volta legata alle fluttuazioni del cammino ottico della cavità, ovvero alle variazioni che possono interessare sia la lunghezza geometrica, sia l'indice di rifrazione del materiale che costituisce la cavità stessa.

La cavità utilizzata per stabilizzare il laser di orologio a 578 nm è una cavità di tipo Fabry-Perot, caratterizzata da una lunghezza $L = 10$ cm e da un *free spectral range* $FSR = c/2L \simeq 1.5$ GHz. In questo tipo di cavità la relazione fra fluttuazioni della lunghezza geometrica L e fluttuazioni nella frequenza dei modi è particolarmente semplice. Una variazione δL nella lunghezza si traduce infatti in uno spostamento δf della frequenza f di ciascun modo della cavità uguale a

$$\delta f = f \frac{\delta L}{L}. \quad (4.13)$$

Le fluttuazioni δf modificano la frequenza d'aggancio, dando origine ad un rumore di fase che determina la larghezza di riga del laser. Nel nostro caso, per poter disporre di una larghezza di linea dell'ordine di 10 Hz, essendo $f \simeq 5 \times 10^{14}$, sarà necessario mantenere le fluttuazioni di lunghezza inferiori a $\delta L \sim 3 \times 10^{-15}$ m. Valori così estremi si possono raggiungere soltanto stabilizzando accuratamente la cavità dal punto di vista sia termico sia meccanico. A tal proposito, la cavità e il suo supporto sono stati posti all'interno di una camera da vuoto, la quale, oltre a fungere da stadio di isolamento acustico, ha la funzione di garantire l'isolamento termico e di evitare che fluttuazioni di densità dell'aria, le quali comportano una variazione dell'indice di rifrazione dell'aria stessa, modifichino il cammino ottico che separa gli specchi. Per quanto riguarda la stabilizzazione meccanica, la geometria della cavità è studiata in modo da minimizzare l'effetto delle vibrazioni se questa poggia su un particolare set di punti detti *punti di Airy*. La stabilizzazione termica, infine, è ottenuta grazie ad un meccanismo di feedback che fissa la temperatura di uno schermo in rame che circonda la cavità per mezzo di un circuito resistivo che scalda dall'esterno la camera da vuoto, mantenendo entro 2 mK le fluttuazioni in temperatura. Per isolare ulteriormente la cavità dal punto di vista termico, la camera a vuoto è stata posta all'interno di una scatola di lato ~ 1 m costruita di materiale isolante, e la temperatura dell'aria all'interno della scatola è stata a sua volta stabilizzata a ~ 17.5 °C per mezzo di un secondo meccanismo di feedback, basato questa volta su celle di Peltier, che mantiene le fluttuazioni di temperatura dell'aria entro 0.1 K.

La temperatura a cui stabilizzare la cavità deve essere scelta in modo da minimizzare il coefficiente di espansione termico del vetro che compone la cavità stessa. In generale, infatti, a seguito di una variazione ΔT della temperatura del vetro, la lunghezza della cavità, supposta inizialmente uguale ad L_S , varierà della quantità [29]

$$\Delta L_S(T) = L_S \left[\alpha(T) \Delta T + \alpha'(T) \frac{\Delta T^2}{2} + o(\Delta T^3) \right] \quad (4.14)$$

dove $\alpha(T)$ e $\alpha'(T)$ sono rispettivamente il coefficiente di espansione termica lineare e quadratico. Il vetro con cui è costruita la cavità di stabilizzazione è un vetro di tipo ULE. Come già anticipato, questa tipologia di vetri è caratterizzata da un coefficiente di espansione termico lineare che si annulla per un particolare valore della temperatura, che chiameremo T_{ULE} . Nell'intorno di T_{ULE} il coefficiente di espansione si riduce pertanto alla sola parte quadratica e avremo

$$\Delta L_S(T) = L_S \left[\alpha'(T_{ULE}) (T - T_{ULE})^2 + o(\Delta T^3) \right] \quad (4.15)$$

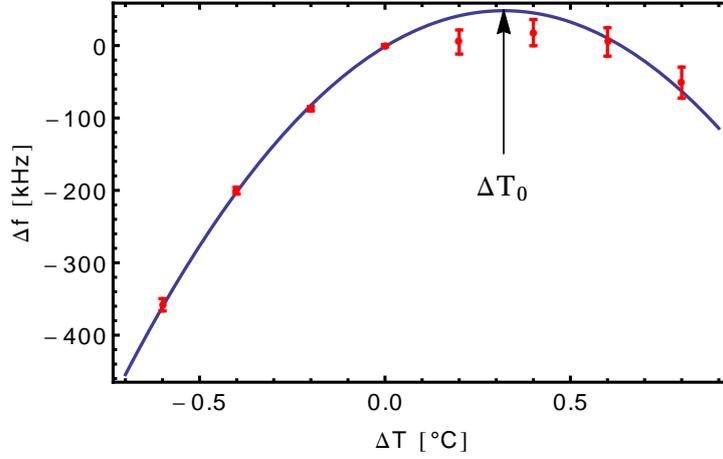


Figura 4.4: Variazione della frequenza del modo di aggancio della cavità ULE in funzione della variazione della temperatura della cavità.

La determinazione della temperatura T_{ULE} della cavità di stabilizzazione si è protratta per i tre mesi che hanno preceduto questo lavoro di tesi. Per determinare T_{ULE} la temperatura della cavità è stata variata ad intervalli di 0.2 K ogni 15 giorni circa nell'intorno di $T_0 \simeq 20.5^\circ\text{C}$, valore approssimativo di T_{ULE} stimato a partire dalle misure riportate in [25]. Il sistema presenta infatti un'inerzia termica estremamente elevata e sono necessari circa cinque giorni prima che la temperatura della cavità vada a regime a seguito di una variazione. Per ogni variazione ΔT della temperatura rispetto a T_0 , è stata determinata sperimentalmente la corrispondente variazione $\Delta f = f(T_0 + \Delta T) - f(T_0)$ della frequenza di uno stesso modo di risonanza della cavità (vedi figura 4.4). Dal momento che nell'intorno di T_{ULE} ci si aspetta un andamento quadratico di Δf in funzione di ΔT , i dati acquisiti sono stati analizzati per mezzo della funzione di fit

$$\Delta f(T) = \Delta f_0 + \beta (\Delta T - \Delta T_0)^2. \quad (4.16)$$

Una volta determinato per mezzo del fit parabolico il parametro ΔT_0 ($\Delta T_0 = (0.32 \pm 0.03)\text{K}$), il set point del sistema di feedback che controlla la temperatura della cavità è stato impostato al valore $T_0 + \Delta T_0 \simeq 20.8^\circ\text{C}$, corrispondente, per definizione, a T_{ULE} ¹.

Parallelamente alle misure portate avanti per determinare T_{ULE} , è stata effettuata una prima caratterizzazione del drift dei modi della cavità dovuto al fenomeno di aging dei vetri degli specchi. A tal proposito, una volta

¹L'elettronica di controllo della temperatura non permette di conoscere T_0 in valore assoluto al meglio di 0.1 K, limitando di fatto il valore con cui è nota T_{ULE} alla stessa precisione. Tuttavia, variazioni differenziali di temperatura sono note con 0.01 K di risoluzione, quantità inferiore all'errore su T_0 pari a 0.03 K.

stabilizzata la temperatura della cavità, la frequenza del modo di aggancio del laser è stata misurata ad intervalli di circa dodici ore. Ciò ha permesso di dare una stima del drift, che è risultato essere di circa 5 kHz al giorno.

4.2 Sistema di raffreddamento e intrappolamento di atomi di Itterbio

In questa sezione sarà descritto sommariamente l'apparato sperimentale utilizzato per raffreddare ed intrappolare un gas di atomi ^{173}Yb . Ulteriori approfondimenti possono essere trovati in [30, 31].

La sorgente di atomi utilizzata per l'esperimento è costituita da un gas monoatomico ottenuto riscaldando una miscela isotopica naturale di Itterbio all'interno di un forno alla temperatura di $\sim 500^\circ\text{C}$ (vedi figura 4.5). Una griglia di microtubi paralleli consente al gas di uscire dal forno dando luogo ad un fascio di atomi collimato. Il fascio uscente dal forno viene decelerato da velocità termiche dell'ordine di 500 m s^{-1} a poche decine di m s^{-1} per mezzo di uno Zeeman slower operante alla lunghezza d'onda di 399 nm caratteristica della transizione $^1S_0 \rightarrow ^1P_1$. Al termine dello Zeeman slower gli atomi vengono caricati all'interno di una trappola magneto-ottica (MOT) nella quale vengono ulteriormente raffreddati grazie all'interazione con tre coppie di fasci laser contropropaganti (due per ogni direzione spaziale) alla lunghezza d'onda di 556 nm caratteristica della transizione di intercombinazione $^1S_0 \rightarrow ^3P_1$. L'impiego di un campo magnetico di quadrupolo consente poi di intrappolare gli atomi in corrispondenza dell'intersezione dei sei fasci laser. La frequenza dei fasci di MOT e del fascio di Zeeman slower può essere regolata e sfruttando il fenomeno dello shift isotopico consente di stabilire quale isotopo dell'Itterbio intrappolare e di scartare gli altri. Nel nostro caso siamo interessati al ^{173}Yb ed è a questo isotopo che sono riferiti i valori riportati di seguito.

Al termine della fase di intrappolamento e raffreddamento all'interno della MOT, la cui durata è di 20 s, al centro della trappola è presente un numero di atomi approssimativamente uguale a $N \approx 4 \times 10^8$ ed aventi una temperatura di $(30 \pm 1)\mu\text{K}$. Il campione atomico così ottenuto viene trasferito in un reticolo ottico unidimensionale, realizzato alla lunghezza d'onda di 1064 nm all'interno di una cavità risonante posta dentro la camera da vuoto di MOT. Abbassando progressivamente la profondità del reticolo, si realizza una prima fase di raffreddamento evaporativo che porta la temperatura degli atomi a valori dell'ordine di $2\mu\text{K}$. Al termine del raffreddamento gli atomi vengono caricati in una trappola dipolare fuori risonanza operante alla lunghezza d'onda di 1064 nm e caratterizzata da un waist di $30\mu\text{m}$. Una volta caricati nella

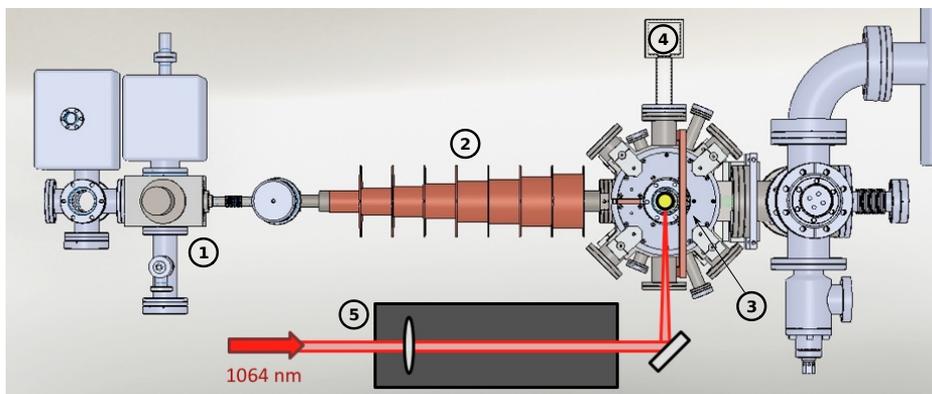


Figura 4.5: Schema del setup sperimentale usato per il raffreddamento di atomi di Itterbio. Sono indicati il forno (1), lo Zeeman slower (2), la camera di MOT (3), la cella in vetro (4) ed il traslatore a cuscinetto ad aria (5).

trappola dipolare, gli atomi vengono trasportati all'interno di una cella in vetro il cui centro si trova ad una distanza di 26 cm dal centro della MOT. Il trasporto è realizzato traslando il waist della trappola (e con esso gli atomi contenuti all'interno della trappola stessa), per mezzo di una lente posta su un traslatore a cuscinetto ad aria. La fase di trasporto ha una durata di circa 2 s, un'efficienza dell'80 % sul numero di atomi trasportati (circa 10^5) ed introduce un riscaldamento di soli $2.5 \mu\text{K}$ [32]. Una volta che il campione giunge al centro della cella in vetro, viene acceso un secondo fascio a 1064 nm perpendicolare al primo, in modo da formare una trappola ottica incrociata. Diminuendo la potenza dei fasci viene effettuato un secondo raffreddamento evaporativo che, in un tempo di 4 s, consente di ottenere un gas di Fermi degenere costituito approssimativamente da 10^5 atomi aventi una temperatura di $0.15 T_F$ dove $T_F \simeq 100 \text{ nK}$ è la temperatura di Fermi. La termalizzazione del gas mediante collisioni in onda s , processo alla base del funzionamento della procedura di raffreddamento evaporativo, è in questo caso possibile dal momento che gli atomi costituiscono una miscela di sei diversi stati di spin e sono pertanto fra loro distinguibili. Oltre al raffreddamento, viene effettuata una procedura di pompaggio ottico che consente di creare una miscela contenente un ben preciso numero di stati di spin e il cui meccanismo di funzionamento sarà discusso in dettaglio nel prossimo capitolo.

Gli atomi vengono infine caricati in un reticolo ottico tridimensionale operante alla lunghezza d'onda magica di 759 nm [9]. Variando la potenza dei fasci che generano il reticolo, è possibile modificarne la profondità fino ad un massimo di circa $40 E_r$ dove $E_r = h 2.00 \text{ kHz}$ è l'energia di recoil di un atomo di ^{173}Yb . Il gas di atomi ultrafreddi intrappolati all'interno del reticolo ottico costituisce il sistema di partenza per la procedura sperimentale

che sarà descritta nei capitoli 5 e 6.

Il setup sperimentale dispone infine di un sistema di imaging in assorbimento che consente di determinare il numero di atomi presenti all'interno del reticolo ottico nello stato elettronico fondamentale (1S_0). Il processo di imaging viene effettuato spengendo innanzitutto i fasci che generano il reticolo ottico e lasciando espandere liberamente la nuvola atomica in esso contenuta per un tempo variabile, a seconda delle esigenze sperimentali, da 4 a 25 ms. Una volta terminata la fase di espansione, gli atomi vengono illuminati con luce risonante a 399 nm e con un sensore CCD viene acquisita la distribuzione bidimensionale della luce trasmessa dalla nuvola atomica, da cui, ricorrendo ad un algoritmo di fit, si determinano numerose proprietà fisiche del sistema, quali il numero di atomi, la loro temperatura, la posizione del centro e le dimensioni del campione.

5

Spettroscopia della transizione d'orologio $^1S_0 \rightarrow ^3P_0$

In questo capitolo verrà descritta la procedura sperimentale che ha permesso di risolvere spettroscopicamente la struttura della transizione di orologio $^1S_0 \rightarrow ^3P_0$ in atomi di ^{173}Yb confinati all'interno di un reticolo ottico tridimensionale in regime di Lamb-Dicke. In particolare, sarà preso in esame il caso in cui ad essere eccitato verso lo stato 3P_0 sia un campione in cui la metà degli atomi si trovi nello stato di spin $m_F = +5/2$ e l'altra metà nello stato $m_F = -5/2$. Vedremo come in questo caso, in presenza di siti reticolari occupati da due atomi, l'interazione fra questi dia luogo a dei picchi la cui frequenza è spostata rispetto alla frequenza di transizione di singolo atomo. Sarà poi analizzato lo spostamento in frequenza dei picchi di risonanza individuati al variare di un campo magnetico esterno per due valori della profondità di reticolo ($s=20$ e $s=30$). Queste misure sono preliminari a quelle descritte nel capitolo 6, dove vedremo come la possibilità di risolvere spettroscopicamente le risonanze di stati a due particelle permetta di osservare il fenomeno delle oscillazioni di spin interorbitali.

L'acquisizione degli spettri è stata realizzata eccitando direttamente il campione di atomi confinato nel reticolo per mezzo di luce laser risonante a 578 nm.

5.1 Preparazione del campione atomico

Come approfondiremo nel capitolo 6, nell'ottica di voler osservare il fenomeno delle oscillazioni di spin interorbitali, è necessario poter disporre di un campione di atomi di ^{173}Yb in cui lo stato di spin sia ben definito (dove per stato

di spin si intende la proiezione del momento angolare totale F , che nel caso degli stati 1S_0 e 3P_0 coincide col momento angolare nucleare, lungo l'asse di quantizzazione, ovvero m_F). Il setup sperimentale dispone a tal proposito di un sistema di pompaggio ottico che permette di trasferire popolazione fra stati di spin diversi, consentendo così la realizzazione di un campione atomico con le caratteristiche sperimentali richieste.

Il meccanismo di pompaggio ottico implementato utilizza due fasci laser a 556 nm (risonanti quindi con la transizione di intercombinazione $^1S_0 \rightarrow ^3P_1$) polarizzati circolarmente σ^+ e σ^- per trasferire popolazione da uno stato di spin m_F del livello fondamentale 1S_0 verso gli stati $m_{F'} = m_F \pm 1$ del livello eccitato 3P_1 . La fase di pompaggio ottico viene effettuata all'interno della cella in vetro, successivamente al caricamento degli atomi nella trappola ottica incrociata e prima dell'accensione dei fasci di reticolo. Due bobine, poste una sopra e l'altra sotto alla cella in vetro che ospita l'esperimento, generano in corrispondenza del centro della trappola ottica incrociata un campo magnetico uniforme di 20 G, orientato nella stessa direzione dell'asse delle bobine. La disposizione delle due bobine e dei fasci di pompaggio ottico è riportata in figura 5.2. Il campo magnetico separa gli stati di spin dei due livelli i quali presentano uno shift Zeeman relativo di 680 kHz/G per quanto riguarda il livello 3P_1 e di soli 207 Hz/G per quanto riguarda il livello 1S_0 . Dal momento che i due livelli presentano uno shift Zeeman relativo diverso (in particolare lo shift Zeeman del livello 1S_0 è praticamente trascurabile rispetto a quello del livello 3P_1), la presenza del campo magnetico rimuove la degenerazione fra le frequenze di transizione di stati con spin diverso, consentendo così di poter eccitare selettivamente i sei sottolivelli dello stato fondamentale variando la frequenza dei due fasci laser (vedi figura 5.1).

Analizziamo ora la procedura seguita per realizzare i campioni atomici che sono stati oggetto di studio di questa tesi, ovvero un campione atomico polarizzato in un unico stato di spin $m_F = \pm 5/2$ e uno in cui la popolazione sia equamente divisa fra gli stati $m_F = +5/2$ e $m_F = -5/2$.

Nel caso in cui si voglia realizzare un campione polarizzato nello stato di spin $m_F = +5/2$, una volta caricati gli atomi all'interno della trappola incrociata, il fascio polarizzato σ^+ viene utilizzato per eccitare la transizione $|^1S_0, m_F = 1/2\rangle \rightarrow |^3P_1, m_F = 3/2\rangle$ che consente di pompare otticamente gli atomi nello stato $|^1S_0, m_F = 3/2\rangle$. Variando di +680 kHz la frequenza del fascio ed andando stavolta ad eccitare la transizione $|^1S_0, m_F = 3/2\rangle \rightarrow |^3P_1, m_F = 5/2\rangle$, gli atomi vengono pompati nello stato $|^1S_0, m_F = 5/2\rangle$. Un procedimento del tutto analogo, realizzato col fascio polarizzato σ^- , consente di popolare lo stato $|^1S_0, m_F = -5/2\rangle$. Terminata questa fase di pompaggio ottico, viene effettuato il raffreddamento evaporativo abbassando l'intensità dei fasci che formano la trappola ottica incrociata. Un successivo impulso

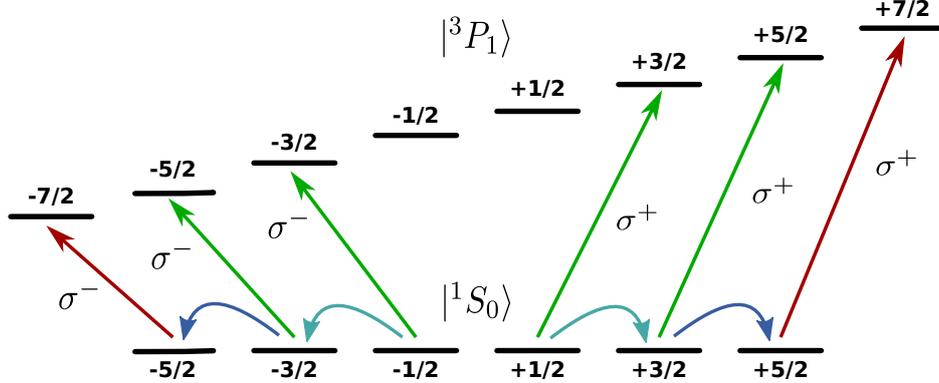


Figura 5.1: Schematizzazione del processo di pompaggio ottico utilizzato per ottenere un campione atomico polarizzato. Due fasci polarizzati circolarmente σ^+ e σ^- (freccie verdi) vengono utilizzati per pompare gli stati $m_F = \pm 5/2$ del livello 1S_0 . Un eventuale impulso risonante con la transizione $|^1S_0, m_F = \pm 5/2\rangle \rightarrow |^3P_1, m_F = \pm 7/2\rangle$ (freccie rosse) realizzato al termine del raffreddamento evaporativo nella trappola ottica incrociata viene impiegato come impulso di blast per ottenere un campione polarizzato in un unico stato di spin (vedi testo).

di *blast*, realizzato eccitando la transizione chiusa $|^1S_0, m_F = -5/2\rangle \rightarrow |^3P_1, m_F = -7/2\rangle$ trasferisce impulso riscaldando gli atomi nello stato di spin $m_F = -5/2$ che lasciano la trappola, dando luogo ad un campione polarizzato unicamente con spin $m_F = +5/2$. Sperimentalmente si verifica che questa procedura è sufficientemente veloce da non causare un riscaldamento degli atomi nello stato di spin $m_F = +5/2$ per effetto delle collisioni con gli atomi nello stato $m_F = -5/2$ che abbandonano la trappola. Analogamente, un impulso di *blast* avente una frequenza tale da eccitare la transizione $|^1S_0, m_F = +5/2\rangle \rightarrow |^3P_1, m_F = +7/2\rangle$ consente di ottenere un campione polarizzato nello stato di spin $m_F = -5/2$. In assenza di *blast* si otterrà invece un campione in cui gli stati $m_F = \pm 5/2$ sono pressoché egualmente popolati, con differenze fra il numero di particelle nell'uno o nell'altro stato che non superano il 5%.

Una volta che il campione è preparato nello stato di spin richiesto dall'esperimento, i fasci che formano la trappola ottica incrociata vengono gradualmente spenti, mentre contemporaneamente vengono accesi i fasci di reticolo, la cui orientazione rispetto alla cella in vetro è mostrata in figura 5.2.

5.2 Calibrazione del reticolo

Dal momento che siamo interessati ad acquisire spettri della transizione di orologio al variare della profondità di reticolo, è utile riassumere brevemente

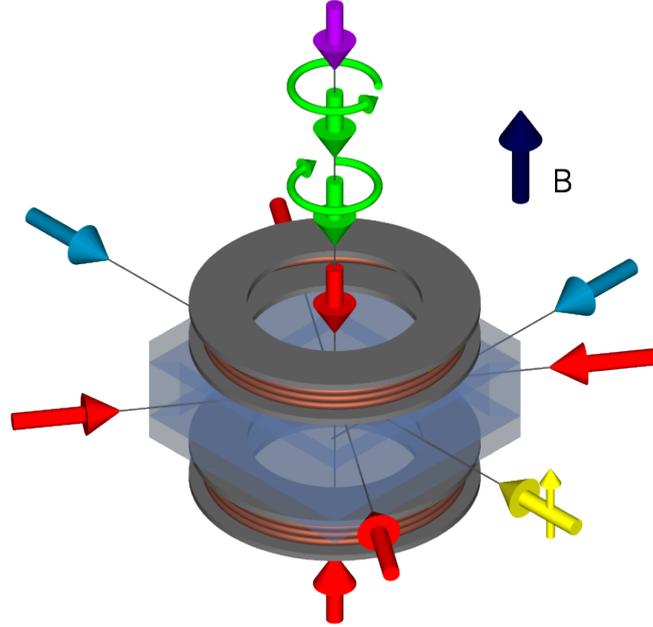


Figura 5.2: Fasci laser in corrispondenza della cella in vetro. Sono mostrati i fasci di reticolo a 759 nm (in rosso), i fasci di pompaggio ottico a 556 nm (in verde), i due fasci che danno luogo alla trappola incrociata (in azzurro), il fascio di imaging a 399 nm (in viola) e il fascio di spettroscopia a 578 nm (in giallo). È altresì indicata la direzione del campo magnetico prodotto dalle due bobine poste in configurazione Helmholtz.

la procedura utilizzata per determinare questo importante parametro sperimentale. Il metodo utilizzato per stimare la profondità di reticolo consiste nel trasferire popolazione dalla banda fondamentale alla seconda banda eccitata per mezzo di una modulazione dell'ampiezza dei fasci reticolari. Detta f_{mod} la frequenza di modulazione dell'ampiezza, si può infatti dimostrare che se

$$f_{mod} = \frac{E_{q,2} - E_{q,0}}{h} \quad (5.1)$$

dove $E_{q,n}$ è l'energia dell' n -esima banda reticolare a quasimpulso q fissato, allora la modulazione induce un trasferimento della popolazione nello stato di quasimpulso q verso la seconda banda eccitata. Questo è formalizzabile considerando la modulazione in ampiezza come una perturbazione

$$H_1 = s E_r \varepsilon \cos(k_L x)^2 \cos(2\pi f_{mod} t) \quad (5.2)$$

dell'hamiltoniana reticolare 2.8. Si può infatti dimostrare [33] che in virtù della perturbazione 5.2, la probabilità di trasferire popolazione dalla banda

n-esima del reticolo alla banda m-esima è direttamente proporzionale a

$$W_{q,q'}^{n,m} = \left| \sum_K c_{K,q}^{(n)} c_{K,q'}^{(m)} (q' + K)^2 \delta_{q,q'} \right|^2 \quad (5.3)$$

dove K è un vettore del reticolo reciproco e i $c_{K,q}^{(n)}$ sono i coefficienti della trasformata di Fourier delle funzioni d'onda reticolari 2.9, ovvero

$$\phi_{n,q}(x) = e^{iqx} u_{n,q}(x) = e^{iqx} \sum_K c_{K,q}^{(n)} e^{iKx} \quad (5.4)$$

Dalla 5.3 si evince come il trasferimento di popolazione avvenga solo tra stati con lo stesso quasimpulso q . Dato che nella 5.3 compare il prodotto dei coefficienti dello sviluppo di Fourier delle due funzioni d'onda considerate calcolati ad egual q , avremo inoltre che il trasferimento di popolazione tra bande con parità opposta sarà inibito rispetto a quello tra bande con la stessa parità (in particolare la 5.3 è nulla se si considerano bande con parità diversa in $q = 0$). Ciò risulta particolarmente evidente se al posto di un potenziale reticolare si considera un potenziale armonico, i cui stati hanno parità ben definita: la 5.2 è infatti un operatore pari che presenta elementi di matrice non nulli solo fra stati con la stessa parità. Questo spiega perché si vada a cercare la frequenza di modulazione che permetta il trasferimento dalla banda fondamentale alla seconda banda eccitata piuttosto che alla prima.

Dal momento che il reticolo ha profondità finita, il trasferimento di popolazione verso la seconda banda scalda gli atomi che abbandonano di conseguenza il reticolo. Andando a misurare con un processo di imaging il numero di atomi rimasti nello stato fondamentale al variare della frequenza di modulazione, risulta così possibile determinare la condizione per cui la 5.1 è soddisfatta. Dal momento che, fissato q , la 5.1 è una funzione monotona della profondità di reticolo s , nota la frequenza di modulazione che causa trasferimento di popolazione ad un certo q , risulta così possibile ricavare s .

Sperimentalmente, la procedura di misura della profondità di reticolo viene effettuata accendendo innanzitutto i tre fasci di reticolo con una rampa esponenziale della durata di 150 ms. Successivamente viene applicata ad uno dei tre fasci una modulazione dell'ampiezza alla frequenza f_{mod} per una durata $T = 100/f_{mod}$. L'ampiezza della modulazione è approssimativamente il 10 % dell'ampiezza del fascio imperturbato. Terminata la modulazione in ampiezza il reticolo viene spento sempre in un tempo di 150 ms e viene successivamente effettuato il processo di imaging volto a determinare la popolazione rimasta. Questa procedura, il cui diagramma temporale è riportato in figura 5.3a, viene effettuata separatamente per tutti e tre i fasci di reticolo. Nota la profondità reticolare $V_{0,i} = s_i E_r$ con $i = 1, 2, 3$ nelle tre direzioni spaziali, la profondità

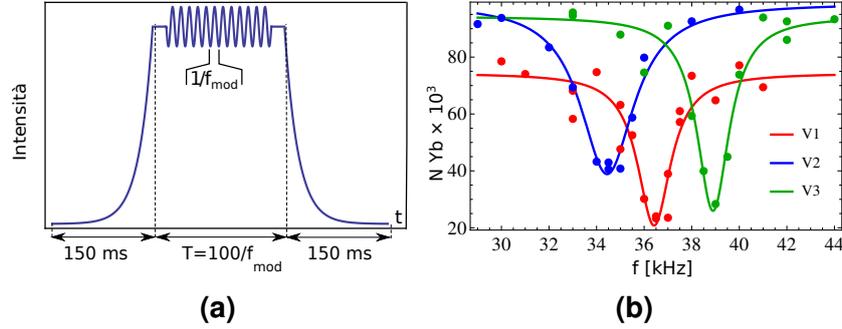


Figura 5.3: (a): Andamento temporale dell'intensità di un fascio reticolare durante la procedura della modulazione di ampiezza. (b): un esempio di calibrazione del reticolo. In figura è mostrato l'andamento della popolazione nello stato fondamentale in funzione della frequenza di modulazione per i tre fasci reticolari. La larghezza delle curve di risonanza è dovuta alla natura fermionica del ^{173}Yb , in virtù della quale, nel limite in cui la banda fondamentale è completamente occupata, è presente popolazione per ogni q appartenente alla prima zona di Brillouin e non solo nell'intorno di $q = 0$, come accadrebbe invece per un gas di bosoni degeneri. Le tre curve sono un fit lorentziano dei dati sperimentali.

complessiva sarà definita dalla media geometrica

$$V_0 = s E_r = \sqrt[3]{s_1 s_2 s_3} E_r \quad (5.5)$$

Un esempio di calibrazione della profondità reticolare è riportato in figura 5.3b.

5.3 Eccitazione della transizione

Un metodo efficiente che può essere impiegato per effettuare misure di spettroscopia su transizioni d'orologio è quello basato sulla tecnica che prende il nome di *electron shelving* [6]. Dal momento che la larghezza di riga estremamente ridotta delle transizioni di orologio rende impossibile la generazione di un segnale di fluorescenza rivelabile da parte degli atomi eccitati nello stato metastabile, l'idea alla base della tecnica dell'*electron shelving* è quella di determinare la popolazione nello stato eccitato andando ad eccitare su una seconda transizione, che stavolta sia fortemente permessa, la popolazione rimasta nello stato fondamentale. Questo secondo impulso, che funge da impulso di imaging, permette di conoscere tramite una misura in assorbimento il numero di atomi rimasti nel livello elettronico fondamentale. Da questo, noto il numero iniziale degli atomi, si ricava facilmente quello degli atomi eccitati nel livello metastabile.

Nel caso in esame di spettroscopia della transizione $^1S_0 \rightarrow ^3P_0$ in atomi di

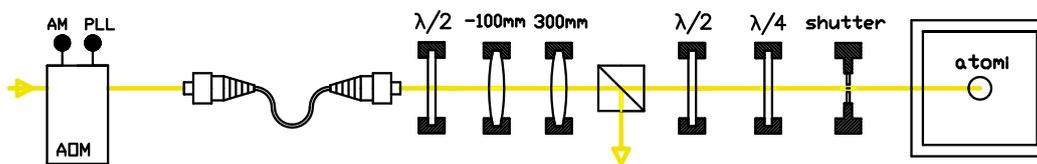


Figura 5.4: Schema ottico utilizzato per eccitare la transizione $^1S_0 \rightarrow ^3P_0$.

^{173}Yb , la misura della popolazione rimasta nello stato fondamentale 1S_0 a seguito dell'eccitazione di parte degli atomi nel livello metastabile 3P_0 , è stata effettuata tramite un impulso di imaging sulla transizione $^1S_0 \rightarrow ^3P_1$ a 399 nm. La vita media estremamente lunga degli atomi nel livello metastabile ($\sim 23\text{s}$) assicura che questi non decadano nello stato fondamentale nel tempo che intercorre fra l'impulso di spettroscopia e l'impulso di imaging.

A causa della distruzione del campione dovuta all'impulso di imaging al termine della procedura di *electron shelving*, per ogni misura di spettroscopia sarà necessario produrre un nuovo campione atomico. Dal momento che la procedura di raffreddamento e intrappolamento degli atomi richiede un tempo di circa 40 s, l'acquisizione di uno spettro composto da qualche decina di punti richiede un tempo dell'ordine delle decine di minuti. Come vedremo più avanti, in misure che si protraggono per tempi così lunghi, iniziano a manifestarsi problemi legati alla stabilità del sistema sperimentale, introdotti in particolare dal drift della frequenza del laser a 578 nm.

Sperimentalmente, l'eccitazione della transizione $^1S_0 \rightarrow ^3P_0$ viene effettuata immediatamente dopo la preparazione del campione, una volta accesi i fasci di reticolo. La luce gialla a 578 nm raggiunge il banco ottico che ospita la cella in vetro attraverso una fibra ottica. Il waist del fascio, reso collimato al termine della fibra, viene portato ad 1 mm per mezzo di un telescopio in modo da far sì che l'intensità risulti uniforme su tutto il reticolo, le cui dimensioni sono dell'ordine dei 100 μm . Un sistema di due lamine, una $\lambda/2$ e una $\lambda/4$, poste prima della cella, consente di ruotare la polarizzazione in modo da renderla lineare e parallela alla direzione del campo magnetico generato dalle due bobine. Uno shutter meccanico, posto lungo il cammino ottico del fascio, consente di interrompere il flusso luminoso in tempi dell'ordine del ms. Lo schema ottico appena descritto è riportato in figura 5.4.

La potenza e la frequenza del del fascio laser sono modulate attraverso il driver che controlla l' AOM_1 posto sul ramo di spettroscopia del sistema di generazione di luce a 578 nm (vedi sezione 4.1.1). Il massimo valore della potenza che il laser può fornire in corrispondenza della cella è dell'ordine dei 20 mW corrispondenti ad un'intensità di 700 mW cm^{-2} . Il controllo in frequenza del driver dell' AOM è realizzato tramite un generatore d'onda *Agilent 33522A* pilotato in remoto via software.

Prima di passare alla trattazione dei dati raccolti, è utile fare alcune considerazioni sulla strategia adottata per identificare i primi picchi di transizione. La transizione che intendiamo eccitare presenta infatti una larghezza di riga naturale estremamente ridotta, dell'ordine dei 38 mHz [12] e non è allargata per effetto Doppler dal momento che gli atomi confinati nel reticolo sono in regime di Lamb-Dicke. Questo, unito al fatto che il laser a 578 nm presenta una larghezza di riga stimata dell'ordine delle decine di Hz, rende in linea teorica difficile individuare le risonanze soprattutto nel caso di eventuali errori nella stima della frequenza del laser.

Bisogna tuttavia considerare che, proprio a causa del valore ridotto della larghezza di riga, la transizione $^1S_0 \rightarrow ^3P_0$ presenta un'intensità di saturazione I_s estremamente ridotta che, per il ^{173}Yb vale [34]

$$I_s = \frac{\pi}{3} \frac{hc}{\lambda^3 \tau} = 4.7 \times 10^{-7} \text{ [mW cm}^{-2}\text{]} \quad (5.6)$$

dove $\tau = 23$ s [12] è la vita media dello stato 3P_0 . Da questo valore dell'intensità di saturazione segue un allargamento per potenza della riga di transizione uguale a

$$\Gamma_S = \Gamma \sqrt{1 + \frac{I}{I_s}} \simeq \Gamma \sqrt{\frac{I}{I_s}} \simeq 507 \sqrt{\left[\frac{P(\text{mW})}{w_0(\text{cm})^2} \right]} \text{ Hz} \quad (5.7)$$

dove P è la potenza del laser utilizzato per eccitare la transizione espressa in mW e w_0 il waist espresso in cm. Nel nostro caso, con un waist di 1 mm, otteniamo dalla 5.7 un allargamento per potenza di circa $5070\sqrt{P([\text{mW}]})$ [Hz]. Un valore così elevato dell'allargamento per potenza semplifica notevolmente la ricerca delle risonanze. La possibilità di poter disporre di una potenza fino a 20 mW in corrispondenza del campione atomico consente infatti di poter allargare le transizioni fino a valori dell'ordine dei kHz rendendo sufficiente un campionamento della frequenza a passi di ~ 100 Hz per l'acquisizione di uno spettro.

La procedura adottata per acquisire i primi spettri della transizione è pertanto consistita in una prima ricerca delle risonanze ad alta potenza (1 mW), seguita da un successivo affinamento della misura a potenze più basse (tipicamente da 5 a 30 μW).

Durante l'eccitazione in corrispondenza degli atomi è stato acceso un un debole campo magnetico del valore di 3.5 G in modo da mantenere lo spin allineato con la polarizzazione del campo elettrico del laser a 578 nm.

5.4 Spettroscopia di un campione polarizzato - Caratterizzazione del drift

L'individuazione dei primi segnali di risonanza è stata inizialmente ostacolata da una serie di problemi di natura tecnica, fra cui due in particolare che hanno richiesto la sostituzione di alcune componenti del setup sperimentale, ovvero l'AOM presente sul ramo di stabilizzazione del sistema laser a 578 nm e del suo AOM driver. La sostituzione dell'AOM si è resa necessaria a causa di un'iniziale erronea valutazione del numero del dente del comb con cui è misurata la frequenza del laser a 1156 nm (in particolare il numero del dente era sbagliato di uno, cui segue un errore nella valutazione della frequenza della luce a 578 nm di 500 MHz). La sostituzione dell'AOM driver è invece stata necessaria a causa della presenza di due sidebands a ± 5 kHz nel segnale emesso dal dispositivo, che avevano come effetto quello di dare origine a dei picchi di risonanza aggiuntivi e fittizi. Risolti questi inconvenienti tecnici l'acquisizione degli spettri della transizione $^1S_0 \rightarrow ^3P_0$ è proceduta come previsto senza altri ulteriori grossi problemi.

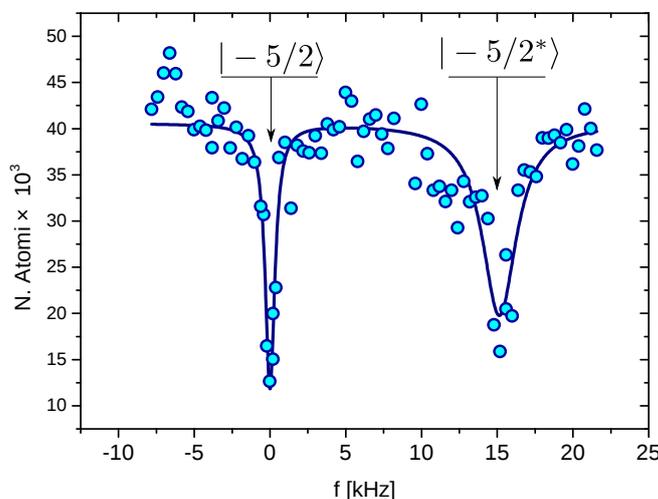


Figura 5.5: Picco d'interazione (sulla sinistra) e relativa blue sideband (sulla destra) della transizione $^1S_0 \rightarrow ^3P_0$ per un campione polarizzato nello stato di spin $m_F = -5/2$.

In figura 5.5 è mostrato lo spettro relativo all'eccitazione di un campione atomico polarizzato nello stato di spin $m_F = -5/2$. Lo spettro è stato acquisito eccitando gli atomi con una potenza di $30 \mu\text{W}$ e una profondità di reticolo $s = 20$. In questo caso la statistica fermionica impedisce che in

ogni sito reticolare sia presente più di un atomo nello stesso stato quantistico. Nel caso di spettroscopia di campioni polarizzati in un unico stato di spin non avremo pertanto interazione fra atomi nello stesso sito reticolare e le risonanze saranno relative unicamente a stati a singola particella.

Lo spettro in esame mostra due picchi di risonanza. Quello a più bassa energia è relativo ad atomi eccitati nella banda fondamentale del reticolo, mentre quello a più alta energia è attribuibile alla sideband blu della transizione (vedi sezione 2.5). Questa ipotesi è avvalorata dalla distanza che separa i due picchi (15.1 ± 1.7) kHz che è compatibile con il gap teorico tra la banda fondamentale del reticolo e la prima banda eccitata calcolata a quasimpulso $q = 0$ e con una profondità di reticolo $s = 20$, ovvero 15.8 kHz (vedi figura 5.6).

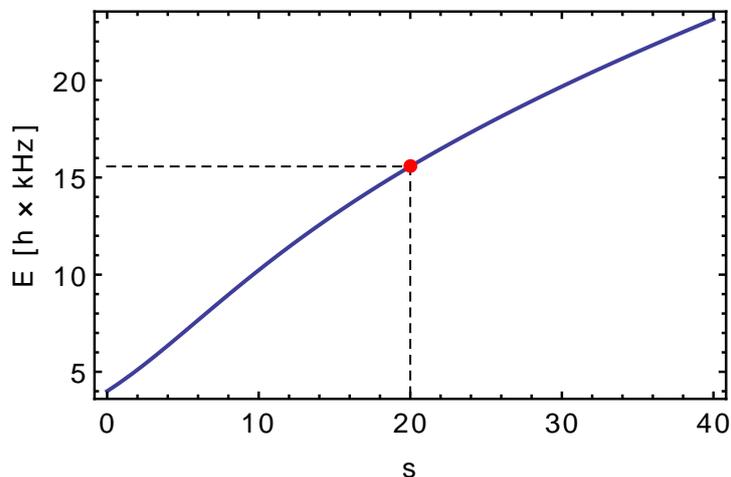


Figura 5.6: Gap tra la banda fondamentale e la prima banda eccitata calcolato per quasimpulso nullo ($q = 0$) in funzione della profondità di reticolo.

Osserviamo inoltre come i due picchi presentino una larghezza sostanzialmente diversa (0.8 kHz per la portante e 2.7 kHz per la sideband), in accordo con quanto discusso teoricamente nella sezione 2.5. La larghezza della riga, qui come nei casi che tratteremo successivamente, è dovuta in massima parte all'allargamento per potenza della transizione atomica. L'allargamento Doppler è infatti fortemente inibito dal confinamento degli atomi all'interno del reticolo ottico, essendo a $s = 20$ il parametro di Lamb-Dicke dell'ordine di

$$\eta = \sqrt{\frac{E_r}{\hbar\omega}} \simeq \sqrt{\frac{1}{20}} \simeq 0.2 < 1. \quad (5.8)$$

Allo stesso modo sono da escludere eventuali allargamenti dovuti ad uno shift della lunghezza d'onda reticolare rispetto alla lunghezza d'onda magica. A

seguito di una variazione $\Delta\nu$ della frequenza dei fasci reticolari rispetto alla frequenza magica ($\nu_{magic} = 394799475(35)$ MHz [6]), si assiste infatti ad uno shift della frequenza della transizione d'orologio $^1S_0 \rightarrow ^3P_0$ uguale a [6]

$$\delta\omega = -221 s \Delta\nu \text{ mHz} \quad (5.9)$$

dove s è la profondità di reticolo in unità dell'energia di recoil e $\Delta\nu$ va espressa in GHz. Dal momento che la frequenza dei fasci reticolari viene misurata con un misuratore di frequenza avente una precisione dell'ordine di 1 GHz, ponendo $\Delta\nu = 1$ GHz, avremo che un sito reticolare posto in corrispondenza del centro del reticolo sarà soggetto ad un light shift differenziale rispetto ad un sito posto in corrispondenza del waist (dove l'intensità è calata di un fattore e^{-2}) uguale a $\delta\omega = 221 \text{ mHz} \times 20(1 - e^{-2}) \simeq 3.8 \text{ Hz}$. Questo risultato conferma come la presenza di un light shift differenziale induca un allargamento della transizione assolutamente trascurabile rispetto a quello per potenza, almeno fintanto che la frequenza reticolare differisca dalla frequenza magica su valori dell'ordine del GHz.

Caratterizzazione del drift

La possibilità di risolvere spettroscopicamente la transizione di orologio $^1S_0 \rightarrow ^3P_0$ ha permesso una caratterizzazione del drift dei modi della cavità ULE su cui il laser a 578 nm è agganciato molto più accurata di quella eseguita per mezzo del frequency comb. Il drift dei modi di cavità dà infatti luogo ad uno spostamento apparente della frequenza di risonanza atomica in funzione del tempo. Acquisendo a tempi diversi lo spettro della transizione nelle stesse condizioni di profondità di reticolo e campo magnetico risulta così possibile ricostruire l'andamento temporale del drift con una precisione tanto maggiore quanto è minore la potenza incidente sugli atomi e quindi la larghezza dei picchi di risonanza.

La caratterizzazione del drift è stata effettuata valutando la posizione del picco di risonanza di un campione polarizzato nello stato di spin $m_F = -5/2$ per un periodo di circa un mese. Tutte le misure sono state effettuate ad una profondità di reticolo $s = 20$ e un campo magnetico in corrispondenza degli atomi di 25 G. La posizione del picco in funzione del tempo di acquisizione dello spettro è mostrata in figura 5.7.

Un fit lineare della posizione dei centri dei picchi di risonanza così acquisiti ha permesso di stimare il drift del modo di aggancio della cavità in

$$\frac{df_{drift}}{dt} = (-3.537 \pm 0.006) \text{ Hz/min.} \quad (5.10)$$

Noto questo valore, il software con il quale viene regolata la frequenza di modulazione dell'AOM posto sul ramo di spettroscopia è stato impostato in modo tale da effettuare una compensazione automatica del drift, così da non dover ricercare la frequenza di transizione ogniqualvolta sia necessario acquisire un nuovo spettro. Purtroppo, come risulta evidente dall'inset di

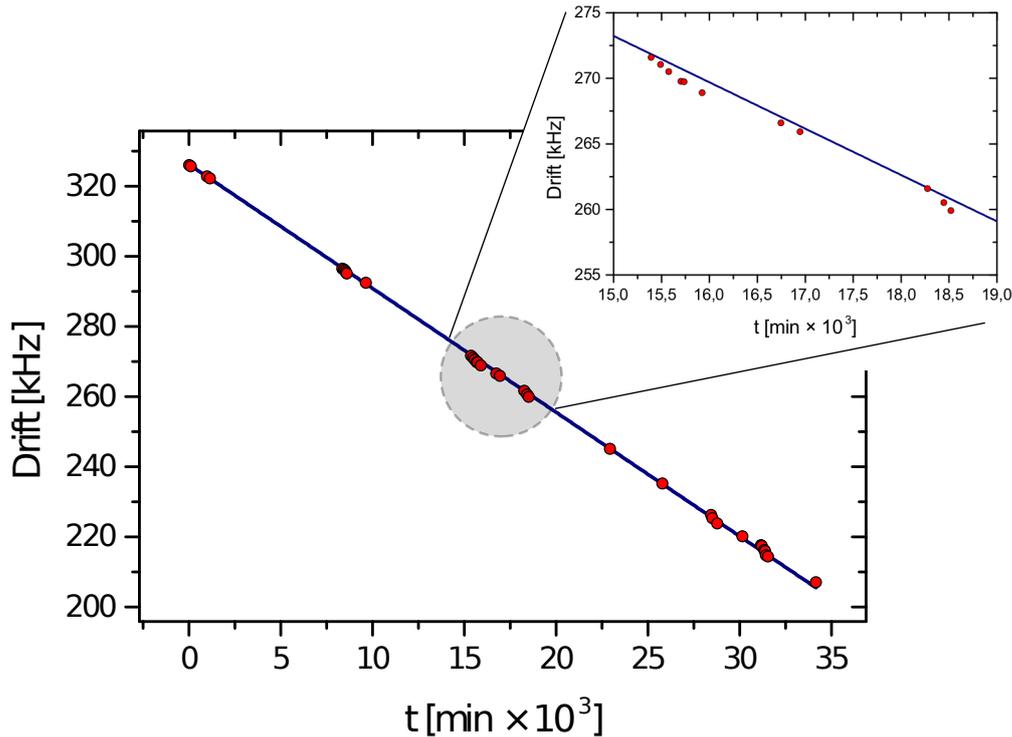


Figura 5.7: Drift del modo di aggancio della cavità ULE in funzione del tempo.

figura 5.7, un andamento oscillatorio del drift caratterizzato da un periodo dell'ordine del giorno sembra sovrapporsi al drift di invecchiamento lineare. Le fluttuazioni appena descritte limitano la possibilità di compensare il drift in modo automatico che rimane indeterminato su valori dell'ordine degli Hz/s. In particolare si è osservato sperimentalmente che, con una potenza incidente sugli atomi di $140 \mu\text{W}$, una volta determinato un picco di risonanza, la compensazione del drift è efficace e consente di mantenere il laser in risonanza per tempi non più lunghi di circa 20/30 minuti. Questo valore aumenta ovviamente con la potenza incidente in virtù del fenomeno dell'allargamento per potenza. Come vedremo più avanti nel capitolo 6, la non completa compensazione del drift limita fortemente la possibilità di poter osservare fenomeni che richiedono che la luce laser rimanga in risonanza con gli atomi per tempi lunghi.

Larghezza di riga del laser

La compensazione del drift della cavità ULE ha permesso di poter dare un limite superiore alla larghezza di riga del laser a 578 nm. La larghezza di riga $\Delta\nu_{578}$ del laser costituisce un parametro sperimentale di primaria importanza dal momento che l'osservazione di fenomeni coerenti guidati dalla luce laser (quali ad esempio le oscillazioni di Rabi) è limitata a tempi dell'ordine di $1/\Delta\nu_{578}$. In figura 5.8 è mostrato lo spettro relativo alla transizione di orologio acquisito per un campione polarizzato nello stato di spin $m_F = -5/2$ con una potenza incidente di $1 \mu\text{W}$. Lo spettro presenta una larghezza di $(46 \pm 8) \text{ Hz}$. L'allargamento è dovuto sia all'allargamento per potenza della transizione, sia alla larghezza di riga del laser. Potremo quindi assumere 50 Hz come un limite superiore della larghezza di riga, ed avremo di conseguenza che il laser andrà considerato come una sorgente di decoerenza per tempi d'interazione con gli atomi superiori ai 20 ms. Tentativi di misurare la larghezza di riga con una potenza incidente inferiore sono risultati vani a causa del drift residuo della cavità ULE che a bassissime potenze, nel tempo compreso fra due successivi impulsi di spettroscopia, determina uno spostamento della frequenza del laser maggiore della larghezza della transizione.

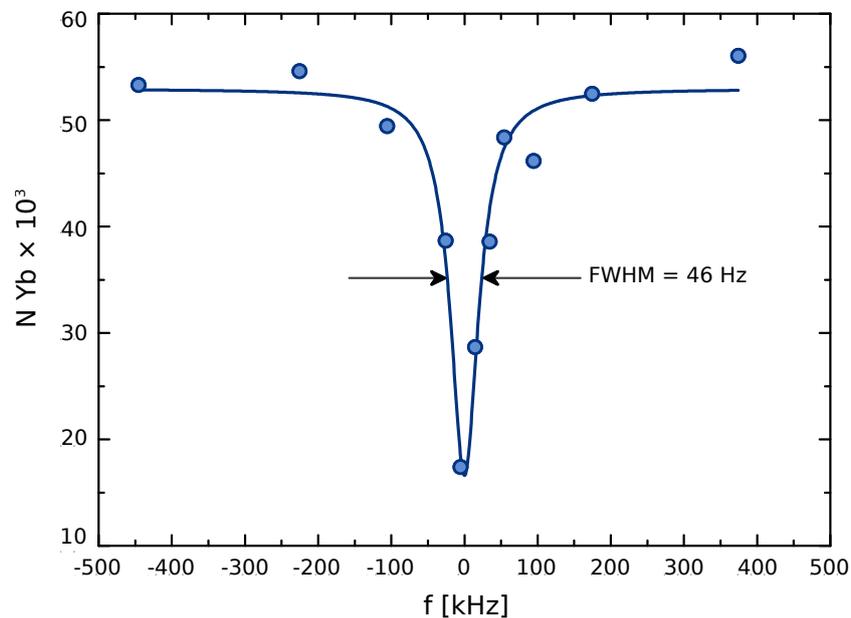


Figura 5.8: Picco d'interazione per un campione SU(1) polarizzato nello stato di spin $m_F = -5/2$ con una potenza incidente di $1 \mu\text{W}$.

5.5 Spettroscopia SU(2)

Una volta compensato, per quanto possibile, il drift della cavità ULE, è stata avviata l'acquisizione degli spettri della transizione d'orologio $^1S_0 \rightarrow ^3P_0$ relativi ad un campione in cui la popolazione è equamente divisa tra atomi negli stati di spin $m_F = \pm 5/2$. Dal momento che, come abbiamo visto nella sezione 3.4.3, l'hamiltoniana che descrive un campione di atomi di Itterbio gode di simmetria SU(N), dove N è il numero di stati di spin presenti, avremo che nel caso in esame, essendo presenti due stati di spin, il sistema sarà caratterizzato da simmetria SU(2). Nel corso del testo ci riferiremo pertanto a campioni atomici con queste caratteristiche come a sistemi SU(2). Il campione atomico in esame è stato preparato per mezzo della procedura di pompaggio ottico descritta nella sezione 5.1 che consente di popolare in modo uguale i due stati di spin.

Nel caso SU(2), la statistica fermionica consente che i siti reticolari possano essere occupati da due nello stesso stato di moto, purché questi abbiano spin diverso. In generale, in uno spettro di un campione atomico di questo tipo, ci aspetteremo quindi di individuare sia dei picchi di risonanza dovuti a stati di singola particella, del tutto analoghi a quelli descritti per un polarizzato in un unico stato di spin, sia dei picchi relativi a stati a due particelle dovuti all'interazione fra due atomi nel medesimo sito reticolare. Come abbiamo avuto modo di vedere nel corso del capitolo 2, l'energia di un sistema di due particelle interagenti differisce da quella di due particelle non interagenti di una quantità che è direttamente proporzionale alla lunghezza di scattering associata al processo di urto fra i due corpi e, nel limite di validità del modello di Fermi-Hubbard, all'integrale spaziale del prodotto dei moduli quadri delle due funzioni d'onda, come mostrato in 3.35 e 3.38. Ciò significa che l'energia necessaria all'eccitazione di un atomo appartenente ad un sito doppiamente occupato differirà da quella necessaria ad eccitare un atomo non interagente di una quantità che è uguale all'energia di interazione fra le due particelle. Se il sistema sperimentale di spettroscopia è dotato di sufficiente risoluzione in frequenza, questo consente quindi di distinguere i picchi di risonanza dovuti a stati di singola particella da quelli dovuti a stati a due particelle. Vediamo ora quanti e quali stati ci aspettiamo da un sistema di due fermioni interagenti.

5.5.1 Stati a due particelle

Consideriamo quindi due atomi di ^{173}Yb nello stato elettronico fondamentale ed interagenti all'interno dello stesso sito reticolare, del quale supponiamo occupino la banda fondamentale. In questo caso, l'antisimmetrizzazione della

funzione d'onda impone, data la simmetria della parte elettronica, che i due atomi si trovino nello stato di singoletto di spin. Seguendo la notazione introdotta nella sezione 3.4.1, avremo pertanto che il sistema appena descritto, che rappresenta lo stato fondamentale di un sistema di due fermioni interagenti, sarà rappresentato dallo stato quantico

$$|gg\rangle = |\phi_g\phi_g\rangle \otimes \frac{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} \quad (5.11)$$

dove \uparrow è associato allo stato di spin $m_F = +5/2$ e \downarrow allo stato di spin $m_F = -5/2$. Per il ^{173}Yb , lo stato $|gg\rangle$ è caratterizzato da una lunghezza di scattering $a_{gg} = 199.4 a_0$ [35] dove a_0 è il raggio di Bohr. Supponiamo ora di eccitare uno dei due atomi dallo stato fondamentale 1S_0 allo stato metastabile 3P_0 . In questo caso viene a cadere il vincolo sulla simmetria della parte elettronica della funzione d'onda e potremo avere sia uno stato di singoletto sia uno stato di tripletto di spin, che identifichiamo rispettivamente con $|eg^+\rangle$ e $|eg^-\rangle$. In termini di funzioni d'onda elettroniche e di spin, l'espressione di questi due stati è data da

$$|eg^\pm\rangle = \frac{|\phi_g\phi_e\rangle \pm |\phi_e\phi_g\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|\uparrow\downarrow\rangle \mp |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (5.12)$$

In accordo al risultato teorico di sezione 3.4.1, dove è stato messo in evidenza come l'energia d'interazione fra due fermioni differisca a seconda che le due particelle si trovino in uno stato di singoletto o di tripletto di spin, assoceremo due diverse lunghezze di scattering agli stati $|eg^\pm\rangle$ che chiameremo a_{eg}^\pm . Se rilasciamo l'ipotesi che i due atomi occupino entrambi la banda fondamentale del reticolo e supponiamo invece che uno dei due occupi la prima banda eccitata avremo che l'eccitazione verso lo stato metastabile 3P_0 di uno dei due atomi darà luogo agli stati $|eg^{\pm*}\rangle$ dove l'apice "*" indica che una delle due particelle si trova nella prima banda eccitata del reticolo. Dal momento che il processo collisionale che dà luogo agli stati $|eg^\pm\rangle$ è lo stesso che origina gli stati $|eg^{\pm*}\rangle$, questi ultimi saranno caratterizzati dalle stesse lunghezze di scattering a_{eg}^\pm . Questo risultato può essere esteso in modo del tutto analogo ad atomi occupanti due qualsiasi bande del reticolo. Esiste infine la possibilità di eccitare verso lo stato metastabile 3P_0 entrambi gli atomi. In questo caso lo stato risultante sarà necessariamente uno stato di singoletto di spin essendo la parte spaziale della funzione d'onda simmetrica per scambio. Lo stato in questione sarà dato dall'espressione

$$|ee\rangle = |\phi_e\phi_e\rangle \otimes \frac{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} \quad (5.13)$$

ed ad esso corrisponderà la lunghezza di scattering a_{ee} . Fra tutti gli stati a due particelle messi in evidenza nel corso di questa sezione, solo quelli caratterizzati dal singoletto di spin sono direttamente accessibili tramite eccitazione con luce a 578 nm dallo stato fondamentale $|gg\rangle$, poiché l'operatore momento di dipolo, in termini del quale è descritta la probabilità di transizione associata a questo processo, agendo sulla sola parte spaziale della funzione d'onda, non può connettere due stati con spin diverso. La possibilità di osservare picchi di risonanza caratteristici di stati a due particelle dipende ovviamente dal numero di siti reticolari doppiamente occupati presenti. Il numero di questi dipende a sua volta dalla densità degli atomi nella trappola ottica incrociata utilizzata per effettuare il raffreddamento evaporativo che precede l'accensione del reticolo. La densità degli atomi all'interno della trappola non è infatti uniforme, ma decresce allontanandosi dal centro dove l'intensità, e quindi il potenziale ottico di dipolo, sono maggiori. Ci aspetteremo quindi in generale di avere un *core* all'interno del reticolo in cui la densità media di atomi per sito reticolare è intorno a due, densità che poi decresce ad un atomo per sito nella zona più esterna. Più avanti vedremo inoltre come la procedura di caricamento di reticolo, oltre a influenzare il numero di siti doppiamente occupati, determini anche il numero di atomi nelle bande eccitate.

5.5.2 Mixing magnetico

Gli stati $|eg^\pm\rangle$ introdotti nella precedente sezione sono autostati del sistema solo a campo magnetico nullo. In questo caso, il sistema costituito da due atomi di cui uno soltanto sia eccitato nello stato elettronico metastabile 3P_0 , è trattabile come un sistema a due livelli che, nella base individuata dagli stati $|eg^\pm\rangle$, è rappresentato dall'hamiltoniana

$$H_0 = \begin{pmatrix} U_{eg}^+ & 0 \\ 0 & U_{eg}^- \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

dove U_{eg}^\pm sono le energie relative rispettivamente agli $|eg^\pm\rangle$. In presenza di un debole campo magnetico, oltre all'hamiltoniana 5.14, sarà infatti necessario tenere conto dell'hamiltoniana Zeeman

$$H_Z = \mu_0 g_x B \hat{F}_z \quad (5.15)$$

dove si è supposto che il campo magnetico B sia allineato con l'asse z , g_x è il fattore di Landé dello stato su cui H_Z agisce e \hat{F}_z è l'operatore proiezione del momento angolare lungo l'asse z . Includendo il contributo del termine Zeeman l'hamiltoniana del sistema diviene

$$H = H_0 + H_Z = \begin{pmatrix} U_{eg}^+ & 0 \\ 0 & U_{eg}^- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \langle eg^+ | H_Z | eg^+ \rangle & \langle eg^+ | H_Z | eg^- \rangle \\ \langle eg^- | H_Z | eg^+ \rangle & \langle eg^- | H_Z | eg^- \rangle \end{pmatrix}. \quad (5.16)$$

L'azione di H_Z su $|eg^\pm\rangle$ è facilmente calcolabile riscrivendo i due stati in termini di stati di singola particella, ovvero

$$\begin{aligned} |eg^\pm\rangle &= \frac{1}{2} (|\phi_g\phi_e\rangle \pm |\phi_e\phi_g\rangle) \otimes (|\uparrow\downarrow\rangle \mp |\downarrow\uparrow\rangle) = \\ &= \frac{1}{2} (|\phi_g\uparrow\rangle|\phi_e\downarrow\rangle \pm |\phi_e\uparrow\rangle|\phi_g\downarrow\rangle \mp |\phi_g\downarrow\rangle|\phi_e\uparrow\rangle - |\phi_e\downarrow\rangle|\phi_g\uparrow\rangle). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Tenendo conto che

$$H_Z|\phi_x, m_F\rangle|\phi_y, m'_F\rangle = \mu_0 B (g_x m_F + g_y m'_F) \quad (5.18)$$

e che, nel nostro caso, \uparrow e \downarrow corrispondono rispettivamente agli stati di spin $m_F = +5/2$ e $m'_F = -5/2$, otterremo

$$\langle eg^+|H_Z|eg^+\rangle = \langle eg^-|H_Z|eg^-\rangle = 0 \quad (5.19)$$

e

$$\langle eg^+|H_Z|eg^-\rangle = \Delta B = \frac{5}{2}\mu_0 B \delta_g \quad (5.20)$$

dove $\delta_g = g_e - g_g = -8.1 \times 10^{-5}$ è il fattore di Landé differenziale introdotto in sezione 1.3. Il campo magnetico introduce pertanto un mixing fra gli stati $|eg^+\rangle$ e $|eg^-\rangle$. Dalla diagonalizzazione dell'hamiltoniana complessiva del sistema

$$H_0 = \begin{pmatrix} U_{eg}^+ & \Delta B \\ \Delta B & U_{eg}^- \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

otteniamo gli autovalori E^\pm , la cui dipendenza dal campo magnetico è mostrata in figura 5.9, e la cui espressione formale è

$$E^\pm = V \pm \sqrt{V_{ex}^2 + \Delta B^2} \quad (5.22)$$

dove $V = (U_{eg}^+ + U_{eg}^-)/2$ e $V_{ex} = (U_{eg}^+ - U_{eg}^-)/2$ a cui corrispondono rispettivamente i nuovi autostati $|eg^{L,H}\rangle$ che sono combinazione lineare degli stati

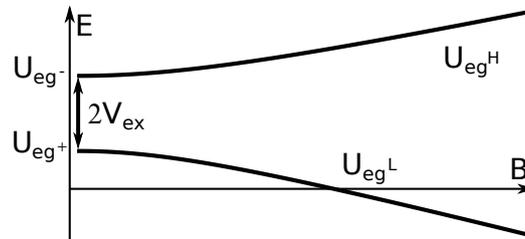


Figura 5.9: Dipendenza dal campo magnetico dell'energia degli stati $|eg^{L,H}\rangle$ ottenuti dalla diagonalizzazione dell'hamiltoniana 5.21.

$|eg^\pm\rangle$. Dal momento che per non depolarizzare il campione tutte le misure sono state effettuate a campo non nullo, saranno gli stati $|eg^{L,H}\rangle$ quelli cui avremo accesso durante le misure di spettroscopia.

Anche gli stati $|eg^{\pm*}\rangle$, in presenza di un campo magnetico, cessano di essere autostati del sistema ed al loro posto, in modo del tutto analogo di quanto fatto con gli stati $|eg^{L,H}\rangle$, sarà necessario introdurre i due nuovi autostati $|eg^{L*,H*}\rangle$.

Osserviamo infine che lo stato $|ee\rangle$ presenta un valore di aspettazione dell'hamiltoniana Zeeman nullo ($\langle ee|H_Z|ee\rangle = 0$) e pertanto non ci aspettiamo variazioni della frequenza di questo stato al variare del campo magnetico.

5.5.3 Un esempio di misura di spettroscopia

In figura 5.10 è mostrato un esempio di spettro relativo ad un campione SU(2) ottenuto con una profondità di reticolo $s = 30$, un campo magnetico di ~ 28 G e una potenza incidente del laser di $10 \mu\text{W}$. Nell'immagine sono chiaramente visibili sei picchi di risonanza, l'interpretazione dei quali è stata effettuata in accordo con quanto riportato nel lavoro di F. Scazza *et al.* [36], che rappresenta l'unico esempio presente in letteratura di eccitazione di un campione atomico SU(2) di ^{173}Yb sulla transizione di orologio $^1S_0 \rightarrow ^3P_0$. I picchi più semplici da individuare sono quelli indicati con ① e ⑤, relativi a stati di singola particella caratterizzati rispettivamente da spin $m_F = -5/2$ e $m_F = +5/2$. L'attribuzione dei due picchi a stati di singola particella può essere fatta preparando due campioni polarizzati nei due stati di spin e verificando che nelle stesse condizioni di campo magnetico la frequenza delle risonanze risultanti dalla spettroscopia di questi coincida con quella osservata con il campione SU(2). Per quanto riguarda lo spin, l'attribuzione del picco ① allo stato con $m_F = -5/2$ (e conseguentemente del picco ⑤ allo stato con $m_F = +5/2$) deriva da considerazioni energetiche. Essendo infatti il fattore di Landé differenziale del ^{173}Yb uguale a $\delta g = -8.1 \times 10^{-5}$, avremo che lo shift Zeeman delle transizioni $\pi |^1S_0, m_F\rangle \rightarrow |^3P_0, m_F\rangle$ sarà uguale a

$$\Delta E_Z = -\delta g \mu_0 m_F B = 113 m_F B h \text{ [Hz/G]} \quad (5.23)$$

da cui segue che a parità di campo magnetico, fra i due lo stato di spin $m_F = -5/2$ sarà quello shiftato verso energie minori. Meno immediata è l'identificazione dei picchi ②, ③ e ④. Queste risonanze sono sicuramente attribuibili all'eccitazione di stati a due particelle dal momento che non risultano visibili negli spettri effettuati con campioni polarizzati in un unico stato di spin. Nel lavoro di F. Scazza *et al.*, il picco ② è attribuito all'eccitazione dello stato $|eg^{L*}\rangle$, il picco ③ all'eccitazione dello stato $|eg^L\rangle$ ed infine il

picco ④ a quella dello stato $|ee\rangle$. L'attribuzione dei picchi ai tre stati è non banale se non si conoscono le lunghezze di scattering a_{ee} e a_{eg}^+ e si basa essenzialmente su considerazioni fatte sullo spostamento delle risonanze al variare del campo magnetico, come avremo modo di vedere più avanti. Al fine di dare una giustificazione preliminare sulla posizione dei tre picchi in esame consideriamo quindi le lunghezze di scattering differenziali $\Delta a_x = a_x - a_{gg}$ con $x = \{eg^+, ee\}$ ricavate in [36], le quali risultano essere $\Delta a_{eg}^+ = (22.7 \pm 7.3) a_0$ e $\Delta a_{ee} = (106.8 \pm 10.4) a_0$. Se assumiamo valido il modello di Fermi-Hubbard e prendiamo ad esempio come riferimento la frequenza di risonanza dello stato $|eg^+\rangle$ avremo che questa differisce da quella dello stato $|ee\rangle$ della quantità

$$\Delta U_{ee} = U_{eg^+} - U_{ee} = \frac{4\pi\hbar^2}{m_{Yb}} (\Delta a_{eg}^+ - \Delta a_{ee}) \int w_0^4(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (5.24)$$

dove U_{ee} e U_{eg^+} sono le energie di interazione dei due stati e w_0 è la funzione di Wannier caratteristica di un atomo appartenente alla banda fondamentale del reticolo. Dal momento che $\Delta a_{eg}^+ < \Delta a_{ee}$ segue che il picco relativo allo stato $|ee\rangle$ si trova ad un'energia maggiore rispetto a quello relativo allo stato $|eg^+\rangle$. Per quanto riguarda invece il calcolo dell'energia d'interazione dello stato $|eg^{+*}\rangle$, sarà necessario usare la stessa lunghezza di scattering associata

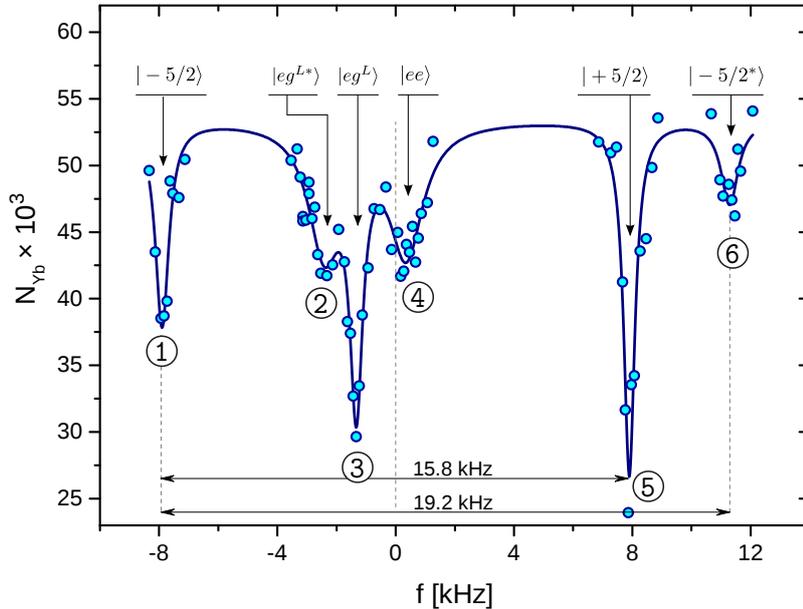


Figura 5.10: Spettroscopia di un campione SU(2) sulla transizione d'orologio $^1S_0 \rightarrow ^3P_0$.

ad $|eg^+\rangle$ dal momento i due stati derivano dello stesso processo collisionale ed avremo pertanto

$$\Delta U_{eg^{+*}} = U_{eg^+} - U_{eg^{+*}} = \frac{4\pi\hbar^2}{m_{Yb}} \Delta a_{eg}^+ \int (w_0^4(\mathbf{r}) - w_0^2(\mathbf{r}) w_1^2(\mathbf{r})) d\mathbf{r} \quad (5.25)$$

dove $w_1(\mathbf{r})$ è la funzione di Wannier relativa ad un atomo nella prima banda eccitata del reticolo.

Dal momento che fra i due integrali spaziali che compaiono nella 5.25 quello relativo allo stato $|eg^+\rangle$ dà un risultato sicuramente maggiore di quello relativo allo stato $|eg^{+*}\rangle$, coinvolgendo quest'ultimo il prodotto di funzioni di Wannier appartenenti a bande differenti (vedi figura 5.11), avremo che il picco relativo allo stato $|eg^{+*}\rangle$ si troverà ad un'energia minore rispetto a quello relativo a $|eg^+\rangle$, confermando così l'ordine introdotto inizialmente.

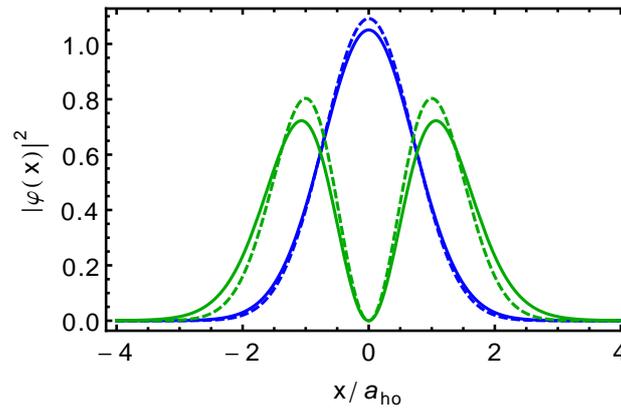


Figura 5.11: Funzioni di Wannier relative alla banda fondamentale (in blu) ed alla prima banda eccitata del reticolo (in verde) per $s = 30$. Le linee tratteggiate rappresentano invece l'andamento delle funzioni d'oscillatore armonico.

Sidebands

Il picco ⑥ è infine attribuibile alla blue sideband dello stato di singola particella $|m_F = -5/2\rangle$ (picco ①) dal momento che le due risonanze distano fra loro (19.2 ± 0.4) kHz che è compatibile con il valore teorico di 19.6 kHz ¹. La visibilità dei picchi relativi alle blue sidebands è legata essenzialmente a due fattori, la potenza della luce incidente sugli atomi e la densità atomica

¹Dal momento che è stata effettuata una sola acquisizione dello spettro in esame, risulta impossibile fornire un errore statistico sulla posizione dei picchi. Questo è stato pertanto stabilito uguale a un quarto della *half width half maximum* del picco stesso.

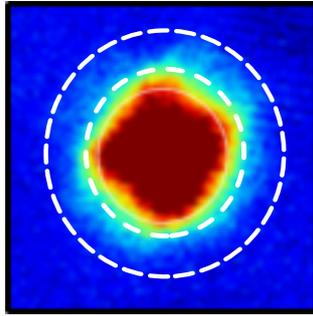


Figura 5.12: Band mapping di un campione atomico ottenuto al termine dell'ottimizzazione della procedura di caricamento del reticolo. Gli atomi appartenenti a bande eccitate sono mappati nella zona compresa fra i due cerchi tratteggiati.

al centro della trappola prima del caricamento del reticolo, da cui dipende il numero di atomi nelle bande eccitate. Per densità basse avremo infatti che la condizione energeticamente favorita sarà quella per cui ogni sito reticolare è occupato al massimo da due atomi aventi spin opposto ed appartenenti alla banda fondamentale del reticolo. Dal momento che per il principio di esclusione di Pauli all'interno dello stesso sito reticolare non possono coesistere due atomi con gli stessi numeri quantici, se la densità aumenta e la banda fondamentale del reticolo è completamente occupata gli atomi in eccesso andranno ad occupare le bande eccitate. La possibilità di controllare la densità atomica consente pertanto di definire il numero di atomi nelle bande eccitate. Questo è un parametro sperimentale di grande importanza dal momento che questi atomi sono caratterizzati da una mobilità maggiore rispetto a quelli appartenenti alla banda fondamentale e presentano pertanto rispetto a questi un tempo di tunneling minore. La possibilità di effettuare un processo di tunneling su tempi minori di quelli richiesti da un atomo appartenente alla banda fondamentale, e quindi di collidere con atomi appartenenti ai siti vicini, fa degli atomi nelle bande eccitate una sorgente di decoerenza, come avremo modo di approfondire nel capitolo 6, e il controllo del loro numero si rende pertanto necessario se si vogliono osservare fenomeni su tempi scala maggiori del tempo di tunneling. Il controllo della densità atomica e, conseguentemente del numero di atomi nelle bande eccitate, dipende molto dal metodo con cui il reticolo viene caricato.

Sperimentalmente, ad esempio, abbiamo osservato come accendere innanzitutto il solo fascio verticale del reticolo lasciando espandere gli atomi all'interno del reticolo unidimensionale da questo generato ed accendendo solo successivamente gli altri due fasci, comporti una minore densità e quindi un minor numero di atomi nelle bande eccitate, rispetto a caricare contemporaneamente tutti e tre i fasci reticolari. Un metodo pratico che permette di

verificare la presenza di atomi nelle bande eccitate è costituito dalla procedura di *band mapping* la quale consiste nello spengere adiabaticamente i fasci reticolari lasciando espandere il sistema per un tempo di ~ 2 ms al termine del quale la densità in funzione della posizione rispetto al centro di espansione viene misurata tramite un impulso di imaging. Questa procedura consente di mappare la distribuzione degli atomi nello spazio degli impulsi dal momento che, se si considera la nuvola iniziale come puntiforme e si trascurano le collisioni, la densità misurata nello spazio reale dipenderà da quella iniziale nello spazio degli impulsi secondo la relazione [29]

$$n_r(\mathbf{r}, t = t_{TOF}) = n_p(m_{Yb}\mathbf{r}/t_{TOF}, t = 0) \quad (5.26)$$

dove n_r e n_p sono rispettivamente la densità nello spazio reale e in quello degli impulsi e t_{TOF} è il tempo di volo. In particolare, nel caso di spengimento adiabatico del reticolo in un tempo maggiore dell'inverso del gap fra le bande, gli stati con quasimpulso q verranno mappati in stati di particella libera con impulso $p = q$ consentendo così di determinare la distribuzione della popolazione nelle bande reticolari. L'immagine di figura 5.12 mostra il risultato della procedura di band mapping applicata ad un campione ottenuto ottimizzando il processo di caricamento degli atomi all'interno del reticolo. L'immagine mostra una zona centrale, approssimativamente quadrata, di densità uniforme generata dall'espansione degli atomi appartenenti alla prima zona di Brillouin del reticolo. Un reticolo cubico presenta infatti una zona di Brillouin cubica di lato $2\hbar k_L$ che viene mappata, a seguito dell'espansione della nuvola, in un cubo avente lato $2\hbar k_L t_{TOF}/m_{Yb}$ nello spazio reale. Gli atomi appartenenti alle bande eccitate del reticolo vengono invece mappati nello spazio reale al di fuori del cubo corrispondente alla prima zona di Brillouin e la loro presenza è indicata nell'immagine dalla zona di colore più chiaro che è presente ai lati del quadrato. La procedura di band-mapping appena descritta costituisce pertanto un metodo abbastanza efficace per determinare se è o meno presente popolazione nelle bande eccitate senza ricorrere a misure di spettroscopia. Anche la potenza incidente sugli atomi gioca un ruolo decisivo nel mettere in evidenza i picchi di risonanza relativi alle blue sidebands. In regime di Lamb-Dicke abbiamo infatti che l'altezza dei picchi relativi alle sidebands è ridotta rispetto a quella della portante di un fattore η^{n_s} dove η è il parametro di Lamb-Dicke e n_s è l'ordine della sideband. Anche se sono presenti atomi nelle bande eccitate, a bassa potenza sarà pertanto visibile solo il picco relativo alla portante e solo alzando la potenza inizieranno a distinguersi dal fondo i picchi relativi alle sidebands. Quanto appena affermato è mostrato in figura 5.13 dove è stato riportato lo spettro di un campione SU(1) ottenuto con una potenza incidente di 1 mW. A causa dell'alta potenza incidente, oltre al picco relativo alla prima blue

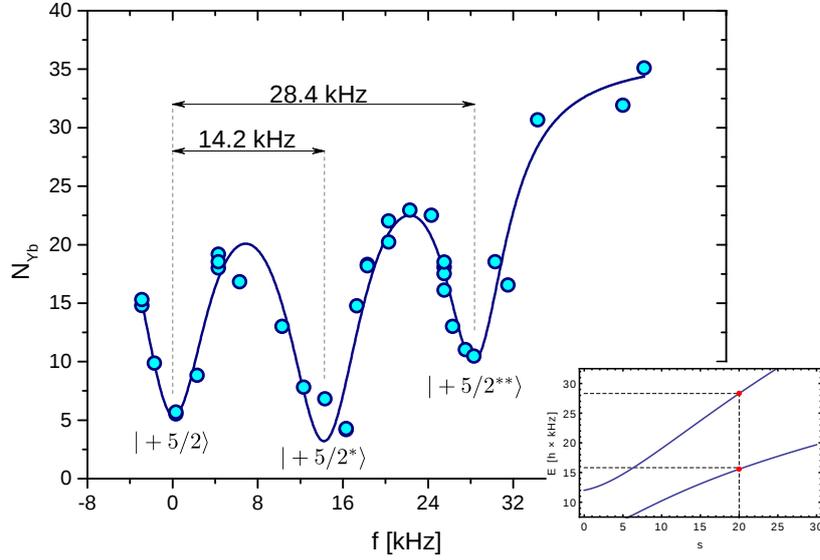


Figura 5.13: Sidebands relative allo stato $|m_F = +5/2\rangle$ ottenute eccitando il campione con una potenza di 1 mW. Nell'inset è mostrata la distanza fra le prime due bande eccitate rispetto alla banda fondamentale del reticolo per un confronto teorico con i dati sperimentali. Dai dati sperimentali risulta che la distanza fra la banda fondamentale e la seconda banda eccitata è di (28.3 ± 2.7) kHz compatibile con la distanza teorica fra le due bande di 28.3 kHz.

sideband è chiaramente visibile un ulteriore picco che attribuiamo alla seconda blue sideband. Il fatto che nell'immagine tutti e tre i picchi presentino la stessa ampiezza e altezza è probabilmente dovuto al tunneling degli atomi appartenenti alle bande eccitate i quali, collidendo con gli atomi dei siti vicini, causano uno svuotamento del campione.

5.6 Spettroscopia SU(2) al variare del campo magnetico

La variazione della frequenza di risonanza dello stato $|eg^L\rangle$ in funzione del campo magnetico può essere utilizzata per dare una stima delle lunghezze di scattering a_{eg}^\pm . Da un fit dei dati sperimentali con la funzione 5.22 che descrive l'andamento teorico della frequenza di risonanza dello stato $|eg^L\rangle$ al variare di B è infatti possibile ottenere i parametri V e V_{ex} dai quali si ricavano le energie U_{eg}^\pm . Note queste ultime ed assumendo valido il modello di Fermi-Hubbard, le lunghezze di scattering a_{eg}^\pm saranno facilmente ottenibili

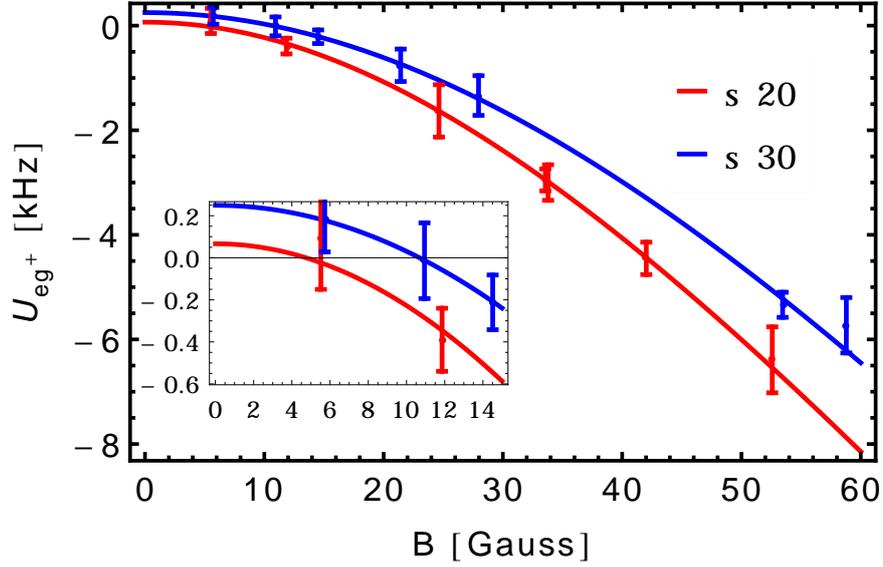


Figura 5.14: Andamento della frequenza di risonanza dello stato $|eg^L\rangle$ in funzione del campo magnetico e relativo fit per le profondità di reticolo $s = 20$ e $s = 30$.

invertendo la relazione

$$U_{eg^\pm} = \frac{4\pi\hbar^2}{m_{Yb}} a_{eg}^\pm \int w_0^4(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (5.27)$$

Nell'elaborare i parametri ricavati per mezzo del fit è necessario tenere conto che attraverso le misure di spettroscopia non si misura tanto l'energia assoluta dello stato $|eg^L\rangle$, ovvero U_{eg}^L , quanto piuttosto la differenza $\Delta U = U_{eg}^L - U_{gg}$ fra l'energia dello stato in esame e il fondamentale. Il parametro V del fit andrà pertanto inteso come $V = (U_{eg}^+ + U_{eg}^-)/2 - U_{gg}$. In figura 5.14 è riportato il fit relativo alle frequenze di risonanza dello stato $|eg^+\rangle$ per le profondità di reticolo $s = 20$ e $s = 30$ ed al variare di B tra 0 e 60 G. Il riferimento di zero rispetto al quale sono espresse le frequenze in esame è il punto equidistante dalle frequenze $f_{\pm\frac{5}{2}}$ associate agli stati di singola particella $|\pm 5/2\rangle$. La distanza in frequenza fra questi due stati permette inoltre di determinare in modo molto accurato il campo magnetico essendo $B = (f_{+\frac{5}{2}} - f_{-\frac{5}{2}})/(2 \times 283.55 \text{ Hz G}^{-1})$. I parametri ottenuti dai due fit sono riportati in tabella 5.1.

Dalla media delle lunghezze di scattering ottenute per le due profondità di reticolo otteniamo $a_{eg}^+ = (210 \pm 55) a_0$ e $a_{eg}^- = (2601 \pm 55) a_0$. Il risultato relativo ad a_{eg}^+ , benché compatibile con quello ottenuto nel lavoro di F. Scazza *et al.* [36], è affetto da un errore statistico maggiore e pertanto nel corso di questo lavoro di tesi si è preferito utilizzare il valore riportato in [36] piuttosto

s	V [h kHz]	V_{ex} [h kHz]	U_{gg} [h kHz]	a_{eg}^+ [a_0]	a_{eg}^- [a_0]
20	13.58 ± 0.25	-13.52 ± 0.28	2.21	205 ± 48	2645 ± 48
30	18.51 ± 0.47	-18.26 ± 0.50	3.11	215 ± 62	2557 ± 62

Tabella 5.1: Risultati dei fit relativi alle frequenze dello stato $|eg^+\rangle$ al variare del campo magnetico e lunghezze di scattering da questi ottenute. Per il calcolo di U_{gg} è stata utilizzata come lunghezza di scattering $a_{gg} = 199.4 a_0$ [35].

che quello appena ricavato, ovvero $a_{eg}^+ = (219.5 \pm 2.0) a_0$. Per quanto riguarda invece il valore ottenuto per a_{eg}^- va osservato come questo ecceda di circa 2.5 volte la lunghezza di oscillatore armonico associata ai siti reticolari che per $s = 30$ è uguale a $a_{ho} \simeq 980 a_0$. Come è stato messo in evidenza nel corso della sezione 3.4.4, in questo regime il modello di Fermi-Hubbard cessa di essere valido ed è necessario utilizzare un modello a più bande per stimare correttamente la lunghezza di scattering. A riprova dell'inadeguatezza di questo modello nel descrivere il fenomeno fisico in esame, va osservato come il valore di U_{eg}^- ricavato, ovvero $U_{eg}^-/h \simeq 40$ kHz ecceda di circa 25 kHz il valore della separazione fra la banda fondamentale e la prima banda eccitata del reticolo che a $s = 30$ è uguale a circa 15 kHz. Questo risultato, che è in forte contraddizione col modello di Busch presentato nella sezione 3.5, sarà corretto nel corso del prossimo capitolo dove vedremo come le oscillazioni di spin interorbitali rappresentino uno strumento ideale per misurare direttamente il parametro V_{ex} .

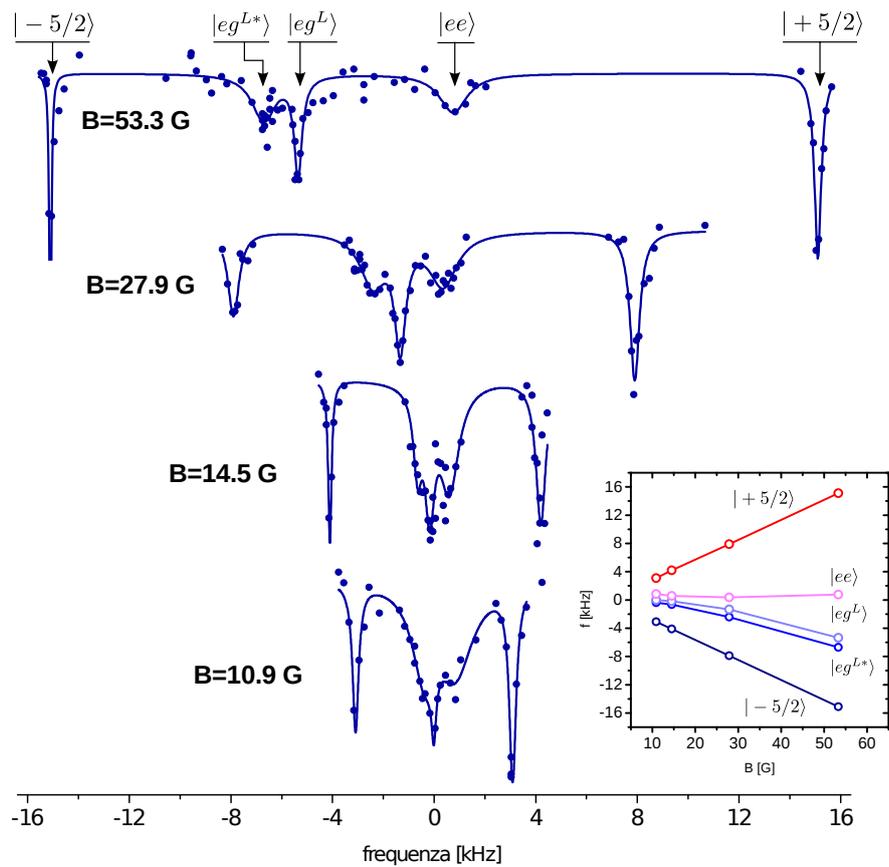


Figura 5.15: Spettri di un campione SU(2) realizzati per vari valori di campo magnetico. La distanza fra le frequenze relative agli stati di singola particella $|\pm 5/2\rangle$ permette di definire il valore del campo magnetico. Si osservi come mentre la frequenza associata agli stati $|eg^+\rangle$ e $|eg^{+*}\rangle$ si modifichi al variare di B , quella dello stato $|ee\rangle$ rimanga pressoché costante, in accordo con quanto stabilito teoricamente.

6

Oscillazioni di spin interorbitali

Nel corso di questo capitolo sarà introdotto il fenomeno delle oscillazioni di spin interorbitali, la cui natura coerente è stata osservata per la prima volta nell'ambito di questo lavoro di tesi [37]. Il meccanismo che è alla base delle oscillazioni di spin di cui tratteremo è l'evoluzione libera di uno stato a due particelle $|\Psi\rangle = \alpha|eg^+\rangle + \beta|eg^-\rangle$ che sia combinazione lineare degli stati $|eg^+\rangle$ ed $|eg^-\rangle$ introdotti precedentemente. Come vedremo in dettaglio più avanti, l'evoluzione libera determina infatti uno sfasamento periodico nel tempo fra la componente di Ψ proporzionale ad $|eg^+\rangle$ e quella proporzionale ad $|eg^-\rangle$ il quale si traduce in un'inversione periodica e coerente dello spin (dove con spin si intende la proiezione del momento angolare sull'asse di quantizzazione) sia dell'atomo nello stato 1S_0 , sia di quello nello stato metastabile 3P_0 .

In letteratura sono presenti vari esempi in cui vengono messe in evidenza dinamiche di spin per certi aspetti analoghe a quelle appena descritte. In [38], ad esempio, le oscillazioni di spin sono osservate in un sistema formato da due atomi fermionici di ^{40}K , mentre in [39] il sistema che dà luogo alle oscillazioni è formato da coppie di atomi di ^{87}Rb nella banda fondamentale di un reticolo ottico. In [40], infine, sempre utilizzando coppie di atomi di ^{87}Rb ma in stati vibrazionali diversi di una buca di potenziale, viene realizzata una porta quantistica SWAP il cui meccanismo di funzionamento è basato su oscillazioni di spin. In tutti questi esempi gli atomi coinvolti nelle oscillazioni di spin sono caratterizzati dallo stesso stato elettronico. In questo lavoro di tesi per la prima volta sono state invece messe in evidenza oscillazioni di spin che coinvolgono due atomi in stati elettronici diversi. L'unico altro esempio presente in letteratura in cui viene studiata un'analogia dinamica di spin è infatti rappresentato dal lavoro di F. Scazza *et al.* [36], nel quale tuttavia non viene messa in luce la natura coerente delle oscillazioni.

Le oscillazioni di spin costituiscono uno strumento ideale per la misura di importanti quantità di interesse fisico, quali ad esempio le energie di interazione U_{eg}^\pm e le lunghezze di scattering a_{eg}^\pm associate ai processi collisionali

che danno origine agli stati $|eg^\pm\rangle$. Come avremo modo di vedere nella parte finale del capitolo le oscillazioni possono anche essere utilizzate come uno strumento estremamente sensibile per verificare l'accuratezza della simmetria $SU(N)$ in sistemi a due elettroni. L'osservazione di questo fenomeno, la cui analogia con l'interazione di scambio fra elettroni nella materia condensata è forte, rappresenta inoltre un passo avanti nella realizzazione di simulatori quantistici basati su atomi ultrafreddi interagenti all'interno di un reticolo ottico [4].

6.1 Dinamica di spin-exchange

Con l'obiettivo di chiarire il meccanismo alla base delle oscillazioni di spin, consideriamo lo stato

$$|\Psi\rangle = \alpha|eg^+\rangle + \beta|eg^-\rangle \quad (6.1)$$

combinazione lineare degli stati $|eg^\pm\rangle$ e dove $|\beta|^2 = 1 - |\alpha|^2$. A campo magnetico nullo, dal momento che sia $|eg^+\rangle$ che $|eg^-\rangle$ sono autostati del sistema descritto dall'hamiltoniana 5.14, avremo che l'evoluzione temporale di $|\Psi\rangle$ sarà data, a meno di un fattore di fase globale, da

$$|\Psi(t)\rangle = \alpha|eg^+\rangle + e^{-2iV_{ex}t/\hbar}\beta|eg^-\rangle \quad (6.2)$$

dove $2|V_{ex}| = |U_{eg}^- - U_{eg}^+|$. A causa dello sfasamento relativo e periodico fra la parte di $|\Psi(t)\rangle$ proporzionale ad $|eg^+\rangle$ e quella proporzionale ad $|eg^-\rangle$, avremo che, nonostante la proiezione di $|\Psi(t)\rangle$ sugli stati $|eg^\pm\rangle$ si mantenga costante nel tempo essendo questi stati stazionari del sistema, quella di misurare un atomo in un ben definito stato elettronico e di spin oscillerà ad una frequenza $f_{osc} = 2V_{ex}/\hbar$. Questo risultato si può facilmente dimostrare riscrivendo innanzitutto gli stati $|eg^\pm\rangle$ (vedi 5.12) in termini di stati di singola particella

$$|eg^\pm\rangle = \frac{1}{2}(|e\uparrow, g\downarrow\rangle \mp |e\downarrow, g\uparrow\rangle \pm |g\uparrow, e\downarrow\rangle - |g\downarrow, e\uparrow\rangle). \quad (6.3)$$

dove $|\alpha\uparrow, \beta\downarrow\rangle$ rappresenta uno stato a due particelle in cui gli atomi 1 e 2 sono caratterizzati rispettivamente dallo stato elettronico α e β e dallo stato di spin \uparrow e \downarrow . Con la notazione introdotta, ad esempio, la probabilità di misurare uno dei due atomi nello stato $|g\uparrow\rangle$ nel caso semplificato in cui $\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$, sarà data da

$$P(|g\uparrow\rangle)(t) = |\langle\Psi(t)|g\uparrow, e\downarrow\rangle|^2 + |\langle\Psi(t)|e\downarrow, g\uparrow\rangle|^2 = \frac{1}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{2V_{ex}t}{\hbar}\right) \right] \quad (6.4)$$

ovvero una probabilità oscillante a frequenza f_{osc} . Analogamente avremo

$$P(|e\downarrow\rangle)(t) = P(|g\uparrow\rangle)(t) = \frac{1}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{2V_{ex}t}{\hbar}\right) \right] \quad (6.5)$$

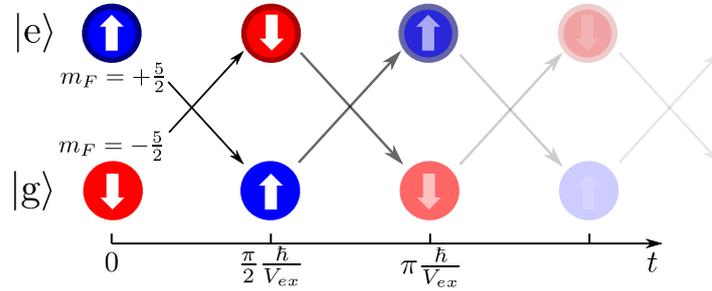


Figura 6.1: Rappresentazione pittorica delle oscillazioni di spin interorbitali. Un atomo nello stato $|g\rangle$ e l'altro nello stato eccitato $|e\rangle$ periodicamente si "scambiano" lo spin, ad una frequenza $f_{osc} = 2V_{ex}/h$.

e

$$P(|e \uparrow\rangle)(t) = P(|g \downarrow\rangle)(t) = \frac{1}{2} \left[1 + \cos \left(\frac{2V_{ex}t}{\hbar} \right) \right]. \quad (6.6)$$

Le probabilità 6.5 e 6.6 possono essere interpretate dal punto di vista pittorico come uno "scambio" periodico nel tempo dello spin fra l'atomo nello stato $|g\rangle$ e quello nello stato $|e\rangle$, come è rappresentato graficamente in figura 6.1. Lo spin totale rimane costante, in accordo con la conservazione del momento angolare, ma la distribuzione della popolazione per ciascun stato elettronico e stato di spin oscilla nel tempo.

Passando ad un caso più generale in cui $\alpha \neq \beta \neq 1/\sqrt{2}$ avremo che le oscillazioni si ridurranno in ampiezza. In particolare, se calcoliamo ad esempio la probabilità di misurare una particella nello stato $|g \uparrow\rangle$, otterremo

$$P(|g \uparrow\rangle)(t) = \frac{1}{2} \left[1 - 2\alpha \sqrt{1 - |\alpha|^2} \cos \left(\frac{2V_{ex}t}{\hbar} \right) \right]. \quad (6.7)$$

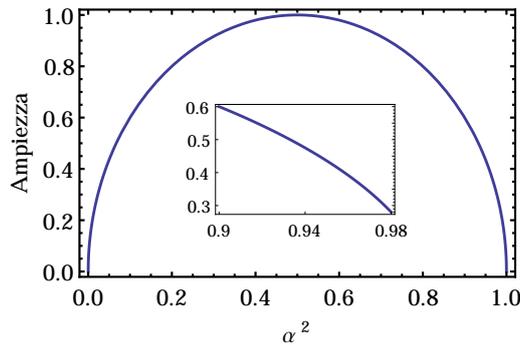


Figura 6.2: Ampiezza delle oscillazioni di spin in funzione del parametro α di mixing fra gli stati $|eg^+\rangle$ ed $|eg^-\rangle$.

da cui si evince che la nuova ampiezza delle oscillazioni di spin è $2\alpha\sqrt{1-|\alpha|^2}$. Come è possibile osservare in figura 6.2, l'ampiezza delle oscillazioni si mantiene elevata anche per valori di α vicini ad uno, ovvero un mixing molto debole fra gli stati $|eg^+\rangle$ ed $|eg^-\rangle$.

6.2 Stern-Gerlach ottico

Dal punto di vista sperimentale, per poter rivelare le oscillazioni di spin è necessario poter misurare separatamente la popolazione atomica in ciascuno dei due stati di spin coinvolti nell'oscillazione per un dato stato elettronico. Il metodo descritto in sezione 4.2, con il quale è possibile misurare la popolazione nello stato elettronico fondamentale, senza che venga fatta alcuna distinzione per quanto riguarda lo spin, non è infatti in grado di fornire alcuna informazione sulla dinamica delle oscillazioni, dal momento che la quantità misurata, ovvero $P(|g\rangle) = P(|g\uparrow\rangle) + P(|g\downarrow\rangle) = 1$, è costante nel tempo.

Nell'esperimento in corso, al fine di effettuare misure analoghe a quella qui richiesta, viene sfruttato un fascio laser detunato verso il rosso rispetto alla transizione $|^1S_0, F=5/2\rangle \rightarrow |^3P_1, F=7/2\rangle$ il quale, esercitando una forza di dipolo dipendente dallo spin sugli atomi, permette di separare spazialmente le varie componenti di spin, la popolazione delle quali viene successivamente misurata tramite il metodo di imaging in assorbimento precedentemente descritto (vedi figura 6.3a). Questa procedura, data l'analogia con il celebre

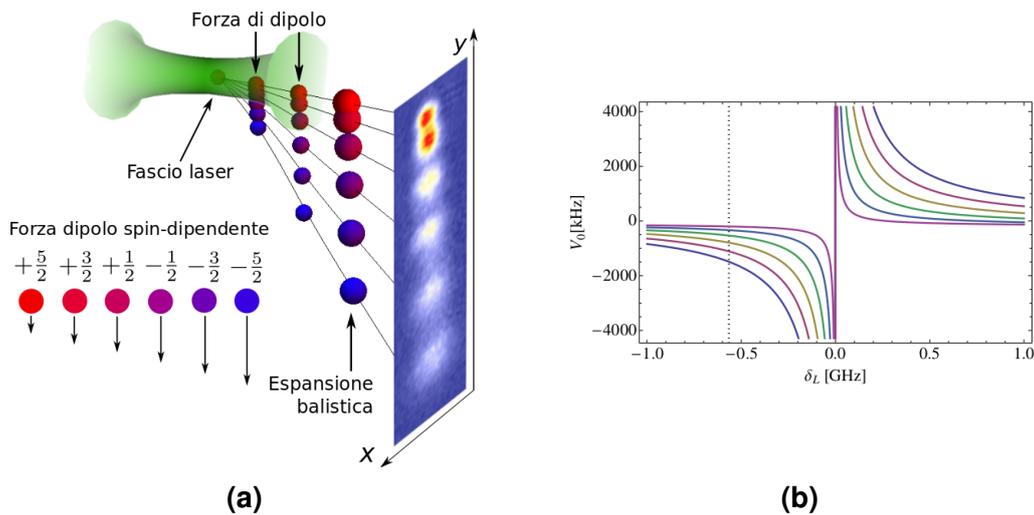


Figura 6.3: (a): Meccanismo di funzionamento dello Stern-Gerlach ottico (OSG). Un impulso di laser OSG della durata di 2.5 ms viene utilizzato per separare spazialmente le varie componenti di spin. Prima di effettuare l'imaging viene effettuata un'espansione balistica di 4.5 ms. (b): Potenziale ottico generato dal fascio di OSG in funzione del detuning rispetto alla transizione $^1S_0, m_F = 5/2 \rightarrow ^3P_1, m_F = 7/2$. La linea tratteggiata rappresenta la frequenza di OSG, mentre le linee di differenti colori rappresentano il potenziale per i vari stati di spin. Tratto da [41]

esperimento di Stern e Gerlach, prende il nome di Stern-Gerlach ottico (OSG). Il fascio utilizzato per la procedura di OSG è detunato rispetto alla transizione $^1S_0 \rightarrow ^3P_1$ di -566 MHz ed è caratterizzato da una potenza di 4 mW e da un waist di 50 μm posto in corrispondenza degli atomi ma non centrato esattamente sul campione, in modo tale che le particelle sperimentino un gradiente d'intensità. La polarizzazione della luce è circolare σ^- e pertanto saranno permesse solo transizioni del tipo $|^1S_0, F = 5/2, m_F\rangle \rightarrow |^3P_1, F = 7/2, m_F - 1\rangle$. All'origine della procedura di OSG sta la dipendenza del potenziale ottico [16]

$$V_i = \frac{3\pi c^2 \Gamma}{2\omega_0^3} I(\mathbf{r}) \frac{|c_i|^2}{\Delta_i} \quad (6.8)$$

esercitato su un atomo nello stato fondamentale $|^1S_0, F = 5/2, m_F = m_i\rangle$ dai coefficienti di Clebsch-Gordan $c_i = \langle 5/2, m_i; 1, -1 | 7/2, m_i - 1 \rangle$ e dal detuning rispetto agli stati eccitati

$$\Delta_i = E(^1S_0, F = 5/2, m_F = m_i) - E(^3P_1, F = 7/2, m_F = m_i - 1) \quad (6.9)$$

come mostrato in figura 6.3b.

Con la procedura di OSG è possibile separare spazialmente gli atomi appartenenti allo stato fondamentale aventi spin $m_F = +5/2$ da quelli aventi spin $m_F = -5/2$ e risulta pertanto possibile, una volta misurate le due popolazioni, seguire l'andamento delle oscillazioni al variare del tempo.

6.3 Preparazione del campione atomico

Al fine di osservare le oscillazioni di spin è innanzitutto necessario creare lo stato di sovrapposizione 6.2. Dal punto di vista teorico il metodo più semplice per realizzare lo stato in questione è quello di andare ad eccitare il campione contemporaneamente sulle frequenze relative alle transizioni $|gg\rangle \rightarrow |eg^+\rangle$ e $|gg\rangle \rightarrow |eg^-\rangle$ sfruttando l'allargamento per potenza o andando ad aggiungere una sideband sulla frequenza del laser. Posta in questi termini questa procedura è irrealizzabile dal momento che per ragioni di simmetria della parte nucleare, lo stato $|eg^-\rangle$ non è spettroscopicamente accessibile partire dallo stato $|gg\rangle$ (vedi sezione 5.5.1). Si potrebbe allora pensare di applicare lo stesso metodo a campo magnetico non nullo andando ad eccitare il campione sulle transizioni $|gg\rangle \rightarrow |eg^{L,H}\rangle$ per poi abbassare adiabaticamente il campo facendo evolvere lo stato $|eg^L\rangle$ su $|eg^+\rangle$ e lo stato $|eg^H\rangle$ su $|eg^-\rangle$. A differenza di $|eg^-\rangle$, lo stato $|eg^H\rangle$ è dato infatti da un mixing di $|eg^\pm\rangle$ ed è pertanto accessibile a partire $|gg\rangle$ in virtù della sua componente proporzionale ad $|eg^+\rangle$. Questo metodo richiede tuttavia di accedere per via spettroscopica allo stato

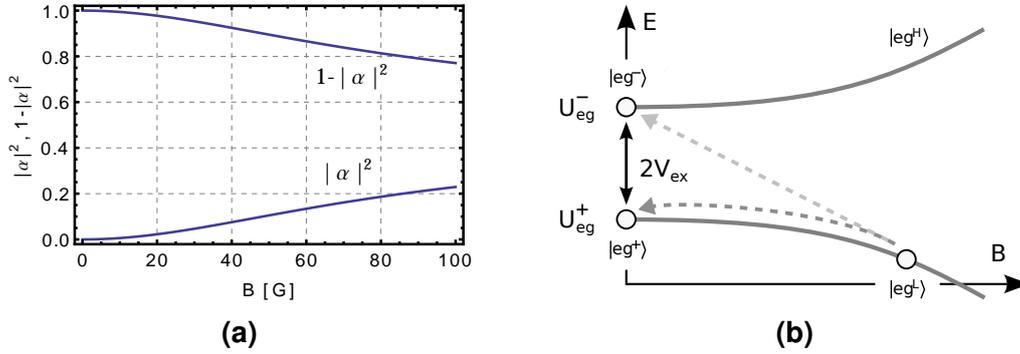


Figura 6.4: (a):Proiezione degli stati $|eg^H\rangle = \alpha|eg^{\mp}\rangle \pm \sqrt{1-|\alpha|^2}|eg^{\pm}\rangle$ sugli stati $|eg^{\pm}\rangle$ al variare del campo magnetico per una profondità di reticolo $s = 30$ e i valori di V e V_{ex} calcolati col modello di sezione 5.6. (b): Illustrazione del metodo di spengimento non adiabatico del campo magnetico che consente di ottenere una sovrapposizione coerente degli stati $|eg^{\mp}\rangle$ e quindi di dare inizio al fenomeno delle oscillazioni di spin.

$|eg^H\rangle$, procedura non banale sia perché la componente di $|eg^H\rangle$ proporzionale ad $|eg^+\rangle$ è piccola in corrispondenza dei campi magnetici producibili in laboratorio, come mostrato in figura 6.4a ($B_{MAX} \sim 60$ G), sia perché non disponendo di un modello teorico valido (il modello di sezione 5.5.2 basato sulla teoria di Fermi-Hubbard pone lo stato $|eg^H\rangle$ ad un'energia troppo alta), risulta difficile individuare la posizione del picco relativo a questo stato e distinguerlo dalle numerose sidebands presenti nella regione di energie dove il picco dovuto ad $|eg^H\rangle$ è atteso.

Per ovviare a questi problemi abbiamo pensato di eccitare il campione a campo magnetico alto sulla transizione $|gg\rangle \rightarrow |eg^L\rangle$ andando così a popolare lo stato $|eg^L\rangle$ per poi portare a zero non adiabaticamente il campo in modo da far evolvere $|eg^L\rangle$ non sullo stato $|eg^+\rangle$ ma su $|\Psi\rangle = \alpha|eg^+\rangle + \beta|eg^-\rangle$, come mostrato in figura 6.4b. Ci aspettiamo che questo metodo sia tanto più efficiente nel popolare lo stato $|eg^-\rangle$ quanto minore è l'adiabaticità del processo, ovvero per campi magnetici iniziali alti e tempi di spengimento brevi.

Spengimento del campo magnetico

Per dare una stima del tempo di spengimento del campo magnetico tale da consentire un popolamento non trascurabile dello stato $|eg^-\rangle$, è stata effettuata una simulazione andando a risolvere l'equazione di Schroedinger relativa ad un'hamiltoniana della forma 5.21 in cui il campo B decresce esponenzialmente da un valore iniziale B_0 a zero ed utilizzando come condizione iniziale lo stato $|eg^L\rangle$ autostato della 5.21 a campo magnetico B_0 . L'equazione di Schroedinger

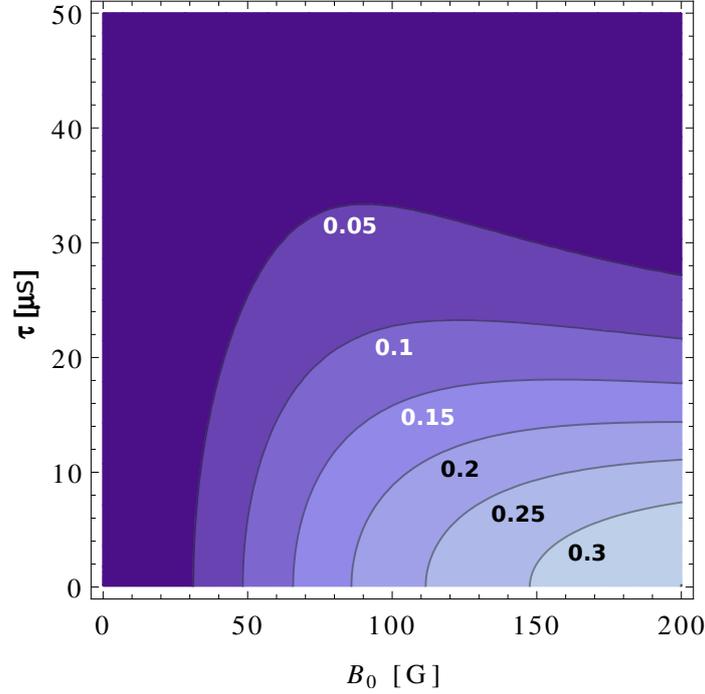


Figura 6.5: Proiezione dello stato atomico su $|eg^- \rangle$ ($P_{eg^-} = |\langle eg^- | \Psi \rangle|^2$) al termine dello spengimento del campo magnetico. Sull'asse x è riportato il valore iniziale del campo magnetico, sull'asse y la costante di decadimento della rampa esponenziale che caratterizza lo spengimento del campo.

in esame, la cui espressione formale è

$$i \hbar |\dot{\Psi}(t)\rangle = \begin{pmatrix} V + V_{ex} & \Delta B(t) \\ \Delta B(t) & V - V_{ex} \end{pmatrix} |\Psi(t)\rangle \quad (6.10)$$

con $|\Psi(0)\rangle = |eg^L\rangle_{B=B_0}$ e $\Delta B(t) = \frac{5}{2} \mu_0 \delta_g B_0 e^{-t/\tau}$, è stata risolta numericamente utilizzando come valori di V e V_{ex} quelli ricavati col modello di sezione 5.6 per una profondità di reticolo $s = 20$. I risultati della simulazione sono riportati in figura 6.5, dove le curve di livello mostrano la proiezione dello stato finale $|\Psi\rangle$ sullo stato $|eg^- \rangle$ (ovvero $P_{eg^-} = |\langle eg^- | \Psi \rangle|^2$) ottenuta al termine della rampa di spengimento del campo in funzione del campo magnetico iniziale (B_0) e della costante di decadimento esponenziale (τ). Si osserva come per i valori massimi di campo magnetico ottenibili in laboratorio, ovvero circa 60 G, avremo che P_{eg^-} è non trascurabile ($>10\%$) solo per valori della costante di decadimento τ minori di 20 μs . Prima di questo lavoro di tesi lo spengimento del campo magnetico era effettuato tramite un relais che interrompeva la corrente di alimentazione delle due bobine poste in corrispondenza della cella in vetro tramite un segnale TTL inviato via

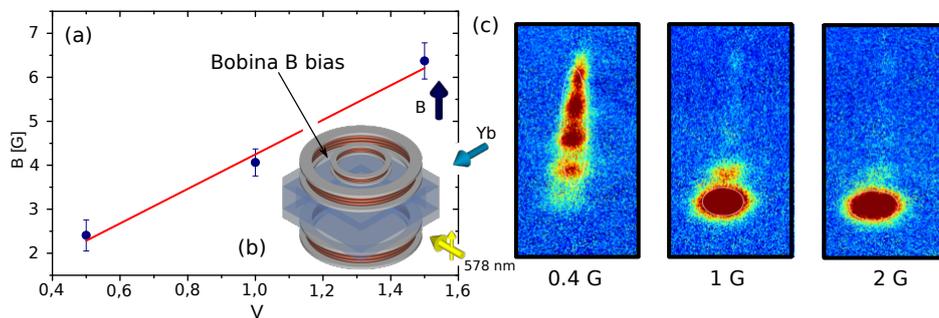


Figura 6.6: (a): calibrazione della bobina utilizzata per generare il campo magnetico di bias. Il campo magnetico generato in corrispondenza degli atomi è misurato in funzione della tensione applicata ai capi della bobina. La sole risultante dal fit è $(3.92 \pm 0.43) \text{ G/V}$. (b): posizione della bobina in relazione alla cella in vetro e alle due bobine principali. (c): polarizzazione di un campione SU(1) al termine dello spengimento della rampa per vari valori del campo magnetico generato dalla bobina di bias. Possiamo osservare come il campione rimanga polarizzato solo per valori del campo di bias superiori a 2 G.

software e consentiva così di portare a zero il campo in tempi dell'ordine dei $400 \mu\text{s}$, ovvero circa un ordine di grandezza superiori rispetto a quanto richiesto. Per ridurre il tempo di spengimento del campo il relais è stato così sostituito da un mosfet disaccoppiato dal resto dell'elettronica per mezzo di un *opto coupler*. Tramite il mosfet è stato possibile raggiungere un tempo di spengimento del campo dell'ordine dei $30 \mu\text{s}$, ovvero sufficiente, almeno in linea teorica, a garantire un popolamento non trascurabile dello stato $|eg^- \rangle$.

Al fine di non depolarizzare il campione atomico al termine dello spengimento del campo è stata inoltre aggiunta in corrispondenza della cella in vetro un'ulteriore bobina, la cui posizione rispetto alle due bobine principali ed alla cella è mostrata in figura 6.6(b). Lo scopo di questa bobina è quello di generare un campo magnetico di bias, avente direzione e verso in corrispondenza degli atomi analoghi a quello generato dalle due bobine principali, e che consenta di mantenere un asse di quantizzazione definito una volta che in queste cessi di scorrere corrente. La calibrazione del campo generato dalla nuova bobina è stata effettuata valutando lo spostamento della frequenza di risonanza di un campione polarizzato in un unico stato di spin in funzione della differenza di potenziale V applicata ai capi della bobina stessa ed è riportata in figura 6.6(a). Dalla calibrazione è risultato che il valore del campo magnetico generato in corrispondenza degli atomi è di $(3.92 \pm 0.43) \text{ G/V}$. Sperimentalmente è stato osservato che un campo magnetico di bias di $B_B = 2 \text{ G}$ è sufficiente a non depolarizzare il campione al termine dello spengimento del campo principale tramite il mosfet, come mostrato in figura 6.6(c).

Dovremo tuttavia tenere conto che in presenza di un campo magnetico

di bias B_B non saranno tanto $|eg^\pm\rangle$ gli autostati su cui verranno proiettati gli atomi al termine della rampa di spengimento, quanto piuttosto gli stati $|eg^{L,H}\rangle$ calcolati per $B = B_B$. In questo caso, la frequenza delle oscillazioni di spin misurata sarà necessariamente maggiore di quella che si misurerebbe a campo nullo essendo $|U_{eg}^H - U_{eg}^L| \geq |U_{eg}^- - U_{eg}^+|$, come mostrato in figura 5.9. Per quanto le energie degli stati $|eg^{L,H}\rangle$ differiscano poco da quelle degli $|eg^\pm\rangle$ per valori bassi del campo magnetico¹, sarà quindi tuttavia necessario tenere conto di questo effetto per estrapolare dai dati acquisiti la frequenza delle oscillazioni a $B = 0$.

Popolamento dello stato $|eg^L\rangle$

Una volta stabilito che almeno in linea teorica è possibile creare lo stato di sovrapposizione 6.2 con il metodo dello spengimento non adiabatico del campo magnetico appena descritto, rimane aperto il problema di quale siano i parametri sperimentali più efficienti per popolare lo stato $|eg^L\rangle$ a campo magnetico alto. Per quanto riguarda il tempo di eccitazione del campione, al fine di garantire il massimo trasferimento di popolazione nello stato $|eg^L\rangle$, una volta individuata la frequenza di risonanza della transizione $|gg\rangle \rightarrow |eg^L\rangle$, abbiamo determinato il tempo corrispondente ad un impulso π andando ad analizzare l'evoluzione coerente della popolazione dello stato in esame al variare del tempo di eccitazione del campione. Dalle oscillazioni di Rabi risultanti abbiamo estrapolato che per una potenza della luce incidente sugli atomi di $140 \mu\text{W}$ si ha il massimo trasferimento di popolazione in $|eg^L\rangle$ per un tempo di eccitazione di 3 ms. Questo valore della potenza di eccitazione è risultato sperimentalmente un ottimo compromesso per ottenere una frequenza di Rabi sufficientemente alta senza tuttavia causare un eccessivo allargamento della riga che avrebbe determinato il popolamento di altri stati oltre ad $|eg^L\rangle$. Oltre al tempo di eccitazione giocano un ruolo di primaria importanza dal punto di vista della buona riuscita dell'esperimento il numero di atomi e la profondità di reticolo. Una densità troppo bassa degli atomi determina infatti un numero esiguo di siti doppiamente occupati da cui consegue l'impossibilità di popolare lo stato $|eg^L\rangle$. Allo stesso modo, una densità troppo alta aumenta il numero di atomi nelle bande eccitate del reticolo i quali, avendo un tempo di tunneling più basso di quelli nella banda fondamentale, collidono con gli atomi dei siti vicini facendo perdere coerenza al campione atomico. Sempre sperimentalmente, valutando l'ampiezza delle oscillazioni di Rabi e il loro tempo di coerenza, abbiamo determinato che un buon compromesso sul

¹Per $B \rightarrow 0$ l'energia degli stati $|eg^{L,H}\rangle$ differisce da quella di $|eg^\pm\rangle$ di un fattore proporzionale $\frac{1}{2} \frac{B^2}{V_{ex}}$ che, per $s = 30$ è dell'ordine di 5 h Hz/G^2 (vedi 6.32).

numero di atomi è $N \simeq 40 \times 10^3$. Per quanto riguarda infine la profondità di reticolo, è opportuno effettuare il popolamento dello stato $|eg^L\rangle$ a reticolo alto ($s = 35$), in modo da minimizzare il tunneling degli atomi nei 3 ms di durata dell'impulso π .

6.4 Rivelazione delle oscillazioni

Riassumendo, la procedura sperimentale che abbiamo sviluppato per osservare il fenomeno delle oscillazioni di spin ha inizio con la preparazione di un gas di atomi ultrafreddi di ^{173}Yb all'interno di una trappola ottica di dipolo. Gli atomi più energetici vengono eliminati dal gas riducendo progressivamente la potenza dei fasci che generano la trappola (raffreddamento evaporativo), fino a che non rimane un campione composto approssimativamente da 4×10^4 atomi ad una temperatura dell'ordine di $0.15 T_F$ (25 nK). Il campione atomico viene a questo punto caricato adiabaticamente all'interno del reticolo ottico tridimensionale e la trappola ottica di dipolo viene spenta (vedi figura 6.7). La profondità del reticolo, durante questa fase, è mantenuta alta ($s \simeq 35$) in modo da minimizzare il tunnel degli atomi fra siti reticolari adiacenti ²

²A $s = 35$ il tempo di tunneling per gli atomi della banda fondamentale è dell'ordine dei 180 ms, mentre quello degli atomi della banda eccitata è di 10 ms.

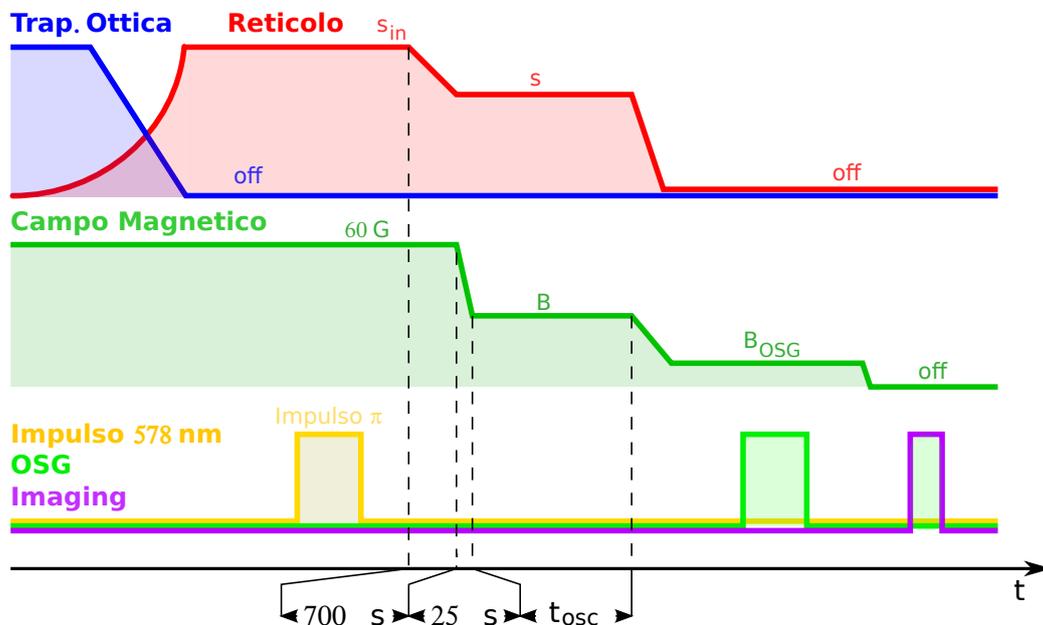


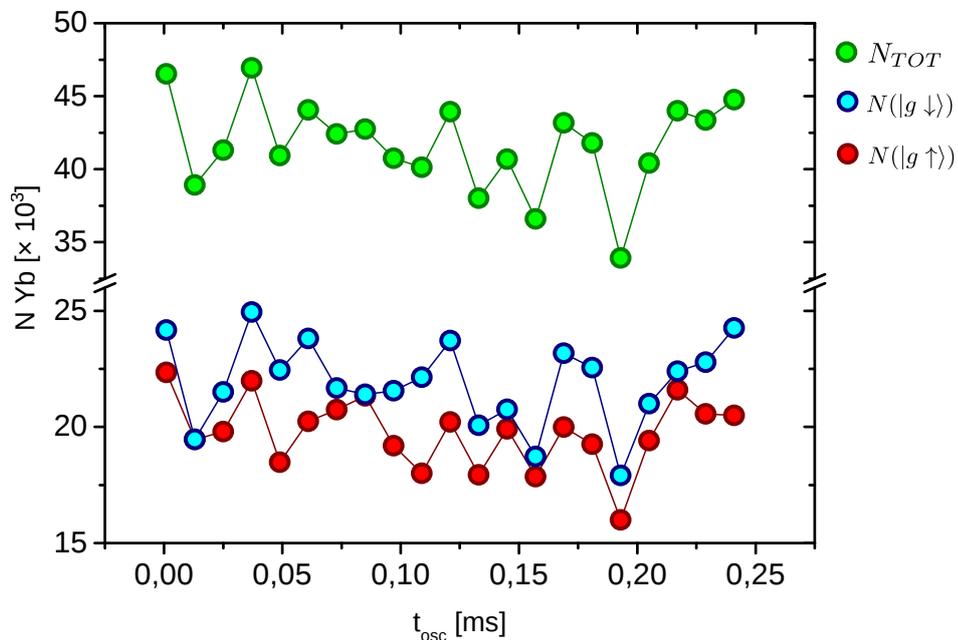
Figura 6.7: Sequenza sperimentale utilizzata per osservare le oscillazioni di spin. Si veda il testo per maggiori dettagli.

Durante tutta questa fase preliminare il campo magnetico in corrispondenza degli atomi viene tenuto ad un valore di circa 60 G tenendo accese sia le due bobine principali, sia la bobina necessaria a generare il campo di bias. Una volta terminato il caricamento all'interno del reticolo, il campione viene eccitato sulla transizione $|gg\rangle \rightarrow |eg^L\rangle$ per mezzo di un impulso π realizzato col laser a 578 nm. Nel caso si vogliano studiare le proprietà delle oscillazioni al variare di s , come vedremo meglio più avanti, la profondità di reticolo viene portata a questo punto al valore finale s_F . A questa fase segue l'abbassamento non adiabatico del valore del campo magnetico che in tempi dell'ordine dei 30 μs viene portato al valore finale B_F in modo da realizzare lo stato di sovrapposizione 6.2 e dare inizio alla dinamica delle oscillazioni. Dopo un tempo t_{osc} il reticolo viene spento e la popolazione negli stati $|g \uparrow\rangle$ e $|g \downarrow\rangle$ viene spazialmente separata per mezzo della procedura di Stern-Gerlach ottico precedentemente descritta. All'impulso di Stern-Gerlach segue l'espansione balistica delle due nuvole atomiche per un tempo di 4.5 ms dopo la quale viene effettuato un impulso di imaging. La popolazione dei due stati di spin viene poi valutata tramite un fit gaussiano che ben approssima la distribuzione degli atomi che risulta dalle immagini prodotte per mezzo del processo di imaging.

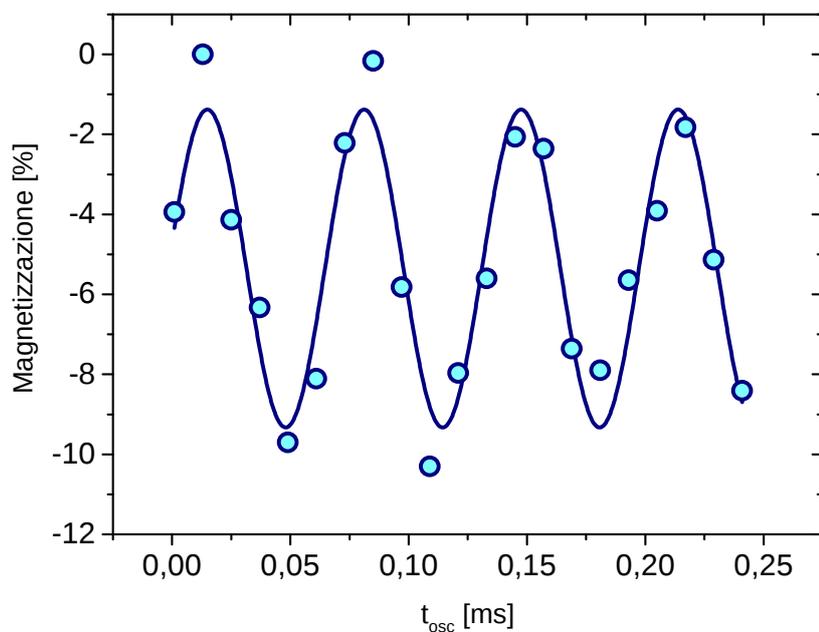
Potrebbe a questo punto sembrare che l'informazione a nostra disposizione sia ridondante, dal momento che almeno la linea teorica è sufficiente conoscere l'evoluzione temporale della popolazione di un solo stato di spin per ricostruire la dinamica delle oscillazioni. In realtà, come è chiaramente osservabile da figura 6.8a, nella quale sono mostrati i dati relativi alle due popolazioni di spin $N(|g \uparrow\rangle)$ e $N(|g \downarrow\rangle)$ e il numero totale di atomi $N(|g \uparrow\rangle) + N(|g \downarrow\rangle)$ acquisiti in funzione del tempo di oscillazione t_{osc} per una profondità di reticolo $s = 35$, lo scattering del numero di atomi tra una misura e l'altra rende praticamente impossibile poter riconoscere un'oscillazione nei dati relativi alle due popolazioni di spin. Al fine di poter ricostruire la dinamica dell'oscillazione è stato perciò necessario valutare non tanto le singole popolazioni quanto piuttosto la magnetizzazione

$$M = \frac{N(|g \uparrow\rangle) - N(|g \downarrow\rangle)}{N(|g \uparrow\rangle) + N(|g \downarrow\rangle)} \quad (6.11)$$

la quale fornisce una misura indipendente dalle fluttuazioni del numero di atomi. La magnetizzazione relativa ai dati di figura 6.8a è mostrata in figura 6.8b. Dall'immagine è evidente come l'oscillazione descritta dalla magnetizzazione presenti un'ampiezza piuttosto ridotta ($\sim 10\%$), caratteristica che accomuna il set di dati in esame a tutti quelli raccolti nel corso di questo lavoro di tesi. A ridurre il valore dell'ampiezza dell'oscillazione rispetto al



(a)



(b)

Figura 6.8: (a): Set di dati relativo alle popolazioni negli stati di spin $m_I = \pm 5/2$ acquisiti in funzione del tempo di oscillazione a $s = 35$ e (b) relativa magnetizzazione. Dal fit sinusoidale della magnetizzazione risulta una frequenza di (15.08 ± 0.18) kHz, un'ampiezza di $(4.94 \pm 0.66)\%$ e un offset di $(-5.35 \pm 0.23)\%$.

caso ideale di un'ampiezza del 100% che si avrebbe preparando lo stato $|\Psi\rangle = 1/\sqrt{2}(|eg^+\rangle + |eg^-\rangle)$, contribuiscono

- l'eccitazione della transizione $|gg\rangle \rightarrow |eg^L\rangle$ a campo magnetico finito, la quale determina un'iniziale ridotto mixing dello stato $|eg^-\rangle$ all'interno dello stato $|eg^L\rangle$;
- lo spengimento del campo magnetico in un tempo finito il quale rende il processo di proiezione dello stato $|eg^L\rangle$ su $|eg^\pm\rangle$ non perfettamente non adiabatico;
- la presenza di siti singolarmente occupati che contribuiscono al segnale di fondo pur non partecipando alla dinamica dell'oscillazione.

È inoltre presente un effetto sistematico che introduce un offset nella magnetizzazione e che, anche in questo caso, riguarda non solo il set di dati in esame ma tutti quelli acquisiti. La presenza di questo offset è stata attribuita ad uno sbilanciamento iniziale nelle due popolazioni di spin dovuto al processo di pompaggio ottico attraverso il quale viene preparato il campione atomico.

Al fine di dare un errore statistico ai punti sperimentali acquisiti a tempi t_{osc} diversi, ogni oscillazione è stata acquisita più volte (in genere 4/5) ed è stato effettuato un fit sinusoidale sull'oscillazione media risultante. Noto il risultato del fit e supponendo che i punti siano caratterizzati tutti dallo stesso errore statistico, l'errore sui singoli punti σ è stato calcolato imponendo che il χ^2 ridotto del fit fosse uguale ad uno, ovvero

$$\chi^2 = \frac{1}{N - R} \sum_{i=1}^N \frac{(y_i^\mu - y_i^{fit})^2}{\sigma^2} = 1 \quad (6.12)$$

dove y_i^μ e y_i^{fit} sono rispettivamente la magnetizzazione media e quella risultante dal fit in corrispondenza del tempo di oscillazione i -esimo, N è il numero totale di punti e R il numero di parametri del fit. Un esempio di questo procedimento, effettuato su 5 oscillazioni acquisite a $s = 30$, è riportato in figura 6.9.

6.5 Oscillazioni di spin al variare della profondità di reticolo

Nel corso di questa sezione vedremo come le oscillazioni di spin, la cui frequenza a campo magnetico nullo è direttamente proporzionale alla differenza di energia fra lo stato $|eg^+\rangle$ e lo stato $|eg^-\rangle$, si siano rivelate uno strumento

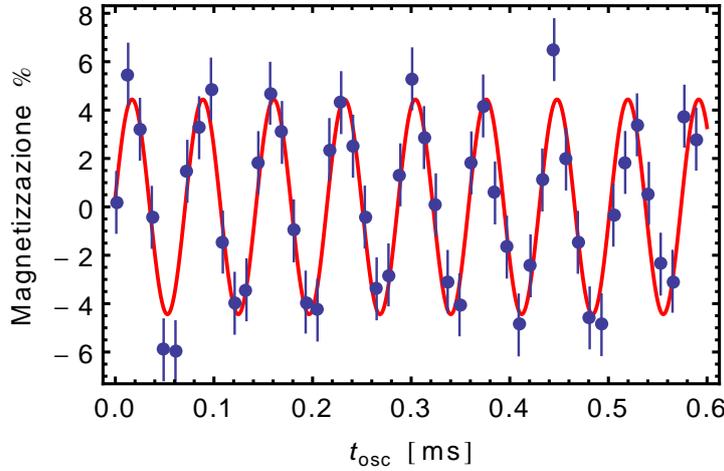


Figura 6.9: Fit sinusoidale della media di 5 oscillazioni acquisite alla profondità di reticolo $s = 30$. Dal fit risulta una frequenza di oscillazione di (13.92 ± 0.06) kHz. L'offset è stato rimosso.

estremamente efficace per determinare la lunghezza di scattering a_{eg^-} associata all'interazione fra due atomi nello stato $|eg^- \rangle$. L'inadeguatezza del modello discusso in sezione 5.6 nel fornire una stima corretta dell'energia d'interazione U_{eg^-} dello stato $|eg^- \rangle$ risulta particolarmente evidente se si confronta il valore di $2V_{ex}/h$ precedentemente ricavato con il modello del mixing magnetico per $s = 30$ (circa 38 kHz, vedi tabella 5.1) con quello derivante dalla frequenza delle oscillazioni ($2V_{ex}/h = f_{osc} = 13.9$ kHz, vedi figura 6.9). Quest'ultimo risultato, in particolare, è in accordo col modello di Busch *et al.* [24] secondo cui l'energia d'interazione fra due particelle interagenti in una buca armonica non può superare la spaziatura fra i livelli della buca stessa. Nel caso in esame abbiamo infatti una spaziatura tra la banda fondamentale e la prima eccitata del reticolo che per $s = 30$ è uguale a ~ 19.7 kHz, valore maggiore dell'energia d'interazione $U_{eg^-} = U_{eg^+} + 2V_{ex} \sim 16.9$ kHz. Va tuttavia osservato come nonostante il valore di U_{eg^-} ricavato mediante le oscillazioni di spin non sia in disaccordo con la trattazione di Busch *et al.*, la stima di U_{eg^-} appena ricavata differisca di circa solo una parte su dieci dal valore della separazione delle bande. In questo regime di forte interazione fra gli atomi il modello di Fermi-Hubbard cessa di essere valido e l'energia d'interazione non è più direttamente proporzionale alla lunghezza di scattering. Nota U_{eg^-} , applicare direttamente il modello di Busch per calcolare a_{eg^-} costituirebbe comunque un errore, dal momento che il potenziale esterno con cui i due atomi interagiscono non è di tipo armonico ma di tipo reticolare. Nel prossimo paragrafo analizzeremo pertanto un modello che permette di estendere la trattazione di Busch *et al.* ad un potenziale reticolare e che rappresenta uno dei risultati originali di questo lavoro di tesi.

6.5.1 Estensione del modello di Busch al caso di un potenziale reticolare

Il problema di due atomi interagenti in un sito reticolare tramite uno pseudopotenziale a delta regolarizzata può essere affrontato partendo dal problema associato a due atomi interagenti in una buca di potenziale armonica, le cui soluzioni esatte sono quelle individuate dal modello di Busch *et al.* (vedi sezione 3.5). Dal momento che queste soluzioni formano una base completa nello spazio associato al moto delle due particelle, ovvero $\mathfrak{R}^3 \times \mathfrak{R}^3$, risulta possibile determinare, con precisione in linea teorica infinita, il contributo dei termini anarmonici del potenziale all'energia dello stato fondamentale del sistema complessivo, semplicemente espandendo questi ultimi sulla base del problema armonico.

Consideriamo quindi due atomi interagenti in un sito reticolare. L'hamiltoniana che descrive il sistema è

$$H = \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m} + \frac{\mathbf{p}_2^2}{2m} + V_{lat}(\mathbf{r}_1) + V_{lat}(\mathbf{r}_2) + V_{pseudo}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad (6.13)$$

dove

$$V_{lat}(\mathbf{r}) = V_{lat}(x, y, z) = s E_r \sum_{x_i=x,y,z} \sin^2(k_L x_i) \quad (6.14)$$

è il potenziale reticolare e $V_{pseudo}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi\hbar^2}{m} a_s \frac{d}{dr} \delta(\mathbf{r})$ è lo pseudopotenziale a delta regolarizzato attraverso cui i due atomi interagiscono. Al fine di tenere conto dell'anarmonicità del reticolo, è innanzitutto necessario sviluppare il potenziale reticolare in serie di potenze. Nel caso in cui si considerino due atomi interagenti nel sito reticolare che ha il minimo nell'origine avremo pertanto

$$V_{lat}(\mathbf{r}) = s E_r \left[(k_L \mathbf{r})^2 + \sum_{\substack{n=4 \\ x_i=\{x,y,z\}}}^{\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n V_{lat}(x_i)}{dx_i^n} \right|_{x_i=0} x_i^n \right] = s E_r (k_L \mathbf{r})^2 + V_{anh}(\mathbf{r}) \quad (6.15)$$

dove $V_{anh}(\mathbf{r})$ sono le correzioni anarmoniche al potenziale quadratico. La 6.15, unitamente al cambio di variabili

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{\sqrt{2}} \quad \mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{\sqrt{2}} \quad (6.16)$$

permette di riscrivere l'hamiltoniana separando la parte quadratica in \mathbf{r} (a cui ci riferiremo come *coordinata relativa*) da quella in \mathbf{R} (a cui ci riferiremo, impropriamente, come *coordinata del centro di massa*) in modo tale che le

parte cinetica sia caratterizzata dalla stessa massa effettiva per entrambe le coordinate:

$$H = \underbrace{\frac{\mathbf{P}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\mathbf{R}^2}_{H_{CM}} + \underbrace{\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\mathbf{r}^2 + V_{pseudo}(\mathbf{r})}_{H_{rel}} + \underbrace{V_{anh}(\mathbf{r}, \mathbf{R})}_{H_{anh}} \quad (6.17)$$

dove $\omega^2 = 2s E_r k_L^2/m$. Le soluzioni della 6.17 relativamente a $H_{CM} + H_{rel}$ sono note essendo quest'ultima l'hamiltoniana associata al problema di due atomi interagenti in una buca armonica, affrontato da T. Busch [24] e discusso in sezione 3.5.

Essendo H_{CM} l'hamiltoniana relativa ad un oscillatore armonico tridimensionale ed isotropo, le sue soluzioni in coordinate polari ($\mathbf{R} \rightarrow \{R, \theta_R, \phi_R\}$) saranno identificate dai tre usuali numeri quantici $\{N, L, M\}$ ed assumeranno la forma

$$\psi_{N,L,M}(\mathbf{R}) = A_{N,L} R^L e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{R}{a_{ho}}\right)^2} L_g\left(\frac{N-L}{2}, \frac{2L+1}{2}, \left(\frac{R}{a_{ho}}\right)^2\right) Y_L^M(\theta_R, \phi_R) \quad (6.18)$$

dove $a_{ho} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ è la lunghezza di oscillatore armonico, $A_{N,L}$ è una costante di normalizzazione, L_g sono i polinomi di Laguerre e $Y_L^M(\theta_R, \phi_R)$ sono le armoniche sferiche con numero quantico angolare L e magnetico M . Gli autovalori corrispondenti alla 6.18 sono i ben noti

$$E_N = \hbar\omega\left(N + \frac{3}{2}\right). \quad (6.19)$$

Per quanto riguarda invece le soluzioni di H_{rel} , queste coincideranno con le autofunzioni dell'oscillatore armonico 6.18 (che identificheremo con il set di numeri quantici $\{n, \ell, m\}$ e con le coordinate $\mathbf{r} \rightarrow (r, \theta_r, \phi_r)$ per distinguerle da quelle di H_{CM}) per $\ell \neq 0$. Per $\ell \neq 0$ le autofunzioni dell'oscillatore armonico si annullano infatti nell'origine che rappresenta invece l'unico punto dello spazio dove lo pseudopotenziale è definito. Lo pseudopotenziale non agir  pertanto sulle autofunzioni caratterizzate da $\ell \neq 0$ e il problema si ridurr  cos  a quello di un oscillatore armonico standard. Nel caso $\ell = 0$ le soluzioni di H_{rel} sono invece rappresentate dalle autofunzioni di Busch 3.49 con autovalori 3.50.

Queste premesse ci permettono di scrivere la soluzione del problema armonico $H_{CM} + H_{rel}$ come il prodotto

$$\Psi_{\{Q,q\}}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = \psi_Q(\mathbf{R})\phi_q(\mathbf{r}) \quad (6.20)$$

dove $\psi_Q(\mathbf{R})$ e $\phi_q(\mathbf{r})$ sono rispettivamente soluzioni di H_{CM} e H_{rel} mentre Q e q sono i set di numeri quantici $Q = \{N, L, M\}$ e $q = \{n, \ell, m\}$. Al fine di

espandere V_{anh} sulla base del problema armonico, e quindi di determinare gli elementi di matrice

$$\langle Q, q | H_{anh}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) | Q', q' \rangle \quad (6.21)$$

dove $|Q, q\rangle$ è lo stato corrispondente all'autofunzione 6.20, il potenziale $V_{anh}(\mathbf{r}, \mathbf{R})$ è stato innanzitutto espanso sulla base delle armoniche sferiche, in modo da determinare i coefficienti $V_{anh}^{(\lambda_R, \mu_R, \lambda_r, \mu_r)}(r, R)$ dello sviluppo in serie

$$V_{anh}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = \sum_{\lambda_R, \mu_R} \sum_{\lambda_r, \mu_r} V_{anh}^{(\lambda_R, \mu_R, \lambda_r, \mu_r)}(r, R) Y_{\lambda_R}^{\mu_R}(\theta_R, \phi_R) Y_{\lambda_r}^{\mu_r}(\theta_r, \phi_r) \quad (6.22)$$

Dal punto di vista computazionale la determinazione degli $V_{anh}^{(\lambda_R, \mu_R, \lambda_r, \mu_r)}(r, R)$ è semplificata dal fatto che essendo il potenziale simmetrico intorno all'origine, nello sviluppo in serie compariranno solo i termini con λ_R ed λ_r pari. Inoltre, per ragioni di simmetria, avremo che fissati λ_R ed λ_r , i coefficienti dello sviluppo non dipendono dal segno di μ_R ed μ_r . Lo sviluppo in serie 6.22 permette di separare la parte angolare da quella radiale negli elementi di matrice 6.21 riducendo notevolmente il tempo computazionale necessario al calcolo di questi.

Il calcolo numerico degli elementi di matrice 6.21 può essere ulteriormente semplificato sviluppando i coefficienti $V_{anh}^{(\lambda_R, \mu_R, \lambda_r, \mu_r)}(r, R)$ in una somma di prodotti fra monomi in r e in R , ovvero

$$V_{anh}^{(\lambda_R, \mu_R, \lambda_r, \mu_r)}(r, R) = \sum_{\alpha, \beta} V_{\alpha, \beta}^{(\lambda_R, \mu_R, \lambda_r, \mu_r)} r^\alpha R^\beta \quad (6.23)$$

in modo da separare la parte dell'integrale in r da quella in R . Così facendo gli elementi di matrice 6.21 diventano

$$\sum_{\lambda_R, \mu_R} \sum_{\lambda_r, \mu_r} \sum_{\alpha, \beta} V_{\alpha, \beta}^{(\lambda_R, \mu_R, \lambda_r, \mu_r)} \langle Q | R^\beta Y_{\lambda_R}^{\mu_R}(\theta_R, \phi_R) | Q' \rangle \langle q | r^\alpha Y_{\lambda_r}^{\mu_r}(\theta_r, \phi_r) | q' \rangle \quad (6.24)$$

dove

$$\langle Q | R^\beta Y_{\lambda_R}^{\mu_R}(\theta_R, \phi_R) | Q' \rangle = \int dR \psi_Q^*(R) R^\beta \psi_{Q'}(R) \int d\Omega Y_L^{*M} Y_{\lambda_R}^{\mu_R} Y_{L'}^M \quad (6.25)$$

con $d\Omega = d\theta_R d\phi_R \sin(\theta_R)$ e dove $\psi_Q(R)$ è la parte radiale di $\psi_Q(\mathbf{R})$. Un'espressione del tutto analoga vale per $\langle q | r^\alpha Y_{\lambda_r}^{\mu_r}(\theta_r, \phi_r) | q' \rangle$.

La parte angolare di ciascun elemento di matrice è stata in questo modo ridotta a due integrali del prodotto di tre armoniche sferiche, uno associato alla coordinate del centro di massa (θ_R, ϕ_R) e l'altro alle coordinate relative (θ_r, ϕ_r) . Il risultato di questi integrali è ben noto essendo

$$\begin{aligned} & \int d\Omega Y_{\ell_1}^{*m_1}(\theta, \phi) Y_{\ell_2}^{m_2}(\theta, \phi) Y_{\ell_3}^{\ell_3}(\theta, \phi) = \\ & = \frac{(-1)^{m_1}}{\sqrt{4\pi}} \left[\prod_{i=\{1,2,3\}} \sqrt{(2\ell_i + 1)} \right] \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ -m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.26)$$

dove tra parentesi tonde sono indicati i simboli $3j$. I due integrali radiali che compaiono nella 6.24 non hanno invece risultato noto e sono stati calcolati numericamente.

Una volta noti gli elementi di matrice di H_{anh} , l'energia dello stato fondamentale del sistema sarà data dal minore degli autovalori di

$$H = H_{CM} + H_{rel} + H_{anh}. \quad (6.27)$$

Il calcolo degli elementi di matrice della 6.27 può essere limitato agli n ed N pari essendo solo questi quelli che contribuiscono a determinare l'energia dello stato fondamentale. Tenendo infatti presente che nello sviluppo 6.22 in armoniche sferiche di V_{anh} compaiono solo le armoniche simmetriche, e quindi con λ_r e λ_R pari, avremo infatti gli integrali 6.26 per ragioni di simmetria saranno diversi da zero solo fra stati con la stessa parità. In altre parole, se in 6.26 assumiamo che $Y_{\ell_2}^{m_2}$ sia una delle armoniche che compare nello sviluppo di V_{anh} , allora necessariamente ℓ_1 e ℓ_3 devono essere o entrambi pari o entrambi dispari. Va ora osservato che nelle autofunzioni 6.18 dell'oscillatore armonico tridimensionale la parità dei numeri quantici angolari L e N è la stessa, essendo questi legati dalla relazione

$$N = 2K + L \quad (6.28)$$

con K intero. Tenendo conto di queste costrizioni sulla parità di N ed L e n ed ℓ , avremo che la 6.27 sarà un'hamiltoniana a blocchi diagonali del tipo

$$H = \begin{pmatrix} H_P & \emptyset \\ \emptyset & H_D \end{pmatrix} \quad (6.29)$$

dove H_P contiene tutti gli elementi di matrice di H con N , L , n ed ℓ pari mentre H_D contiene gli elementi dispari (o con ℓ pari e L dispari o viceversa). I due blocchi sono ovviamente diagonalizzabili separatamente e, dal momento che a determinare l'energia d'interazione contribuiscono i soli termini pari, essendo questi quelli che includono le correzioni date dal modello di Busch, per determinare l'energia dello stato fondamentale sarà sufficiente diagonalizzare il blocco H_P . Una volta determinata, diagonalizzando H_P , l'energia dello stato fondamentale $E_0(a_s, s)$ di due particelle interagenti in un reticolo di profondità s attraverso uno pseudopotenziale caratterizzato da una lunghezza di scattering a_s , l'energia d'interazione sarà data da

$$U_{int}[s, a_s] = E_0(a_s, s) - E_0(0, s) \quad (6.30)$$

essendo $E_0(0, s)$ l'energia dello stato fondamentale di due particelle non interagenti.

I valori di $U_{int}[s, a_s]$ al variare della lunghezza di scattering e della profondità di reticolo sono stati determinati per mezzo di un codice sviluppato con il software *Mathematica* e la cui realizzazione si è svolta durante questo lavoro di tesi.

Convergenza del modello

Prima di applicare il modello sviluppato ai dati sperimentali, è utile fare alcune considerazioni riguardo alla convergenza del modello stesso verso valori di energia stazionari al variare del numero di bande considerate nello sviluppo del potenziale anarmonico $V_{anh}(\mathbf{r}, \mathbf{R})$ sulla base 6.20. Per quanto riguarda lo sviluppo in serie di potenze 6.15, va innanzitutto osservato che considerare i termini fino al decimo ordine è più che sufficiente a descrivere correttamente l'andamento del potenziale per tutta l'estensione di un sito reticolare, come è chiaramente mostrato in figura 6.10, ed è pertanto a questo ordine l'approssimazione del potenziale è stata limitata. Dal momento che questa approssimazione non riproduce l'andamento corretto del potenziale nei siti reticolari adiacenti (occorrerebbe spingersi fino al ventesimo ordine per questo) il modello così sviluppato non sarà in grado di descrivere il tunneling delle particelle verso siti primi vicini. Questa approssimazione è pertanto valida per profondità di reticolo alte e quindi per la maggior parte delle misure che sono state effettuate nel corso di questo lavoro di tesi. Torniamo ora

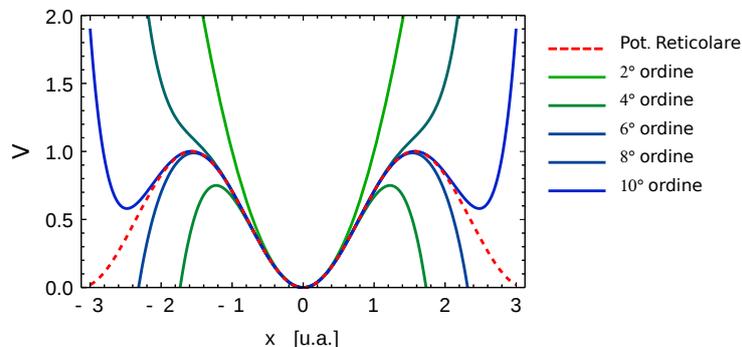


Figura 6.10: Sviluppo di un potenziale reticolare unidimensionale $V = \sin^2(x)$ a vari ordini.

al problema del numero di bande necessarie a far convergere U_{int} verso un valore di energia ben definito. Applicando il modello al caso di due particelle interagenti con uno pseudopotenziale caratterizzato da una lunghezza di scattering $a_s = 4000 a_0$, valore analogo a quello che è atteso per a_{eg^-} , è stato possibile constatare come l'energia d'interazione tenda a convergere ad un valore pressoché stazionario già a partire da $n_{Max} = N_{Max} = 4$, come è

mostrato in figura 6.11, dove con n_{Max} e N_{Max} si intende il massimo valore del numero quantico principale delle funzioni d'onda di oscillatore armonico su cui gli elementi di matrice 6.21 sono stati calcolati. In particolare, dalla simulazione è emerso come il valore di U_{int} calcolato per $n_{Max} = N_{Max} = 4$ differisca da quello calcolato per $n_{Max} = N_{Max} = 6$ per circa una parte su 10^{-4} ed è stato quindi sufficiente limitare n_{Max} ed N_{Max} a quattro nell'applicazione del modello sviluppato ai dati sperimentali.

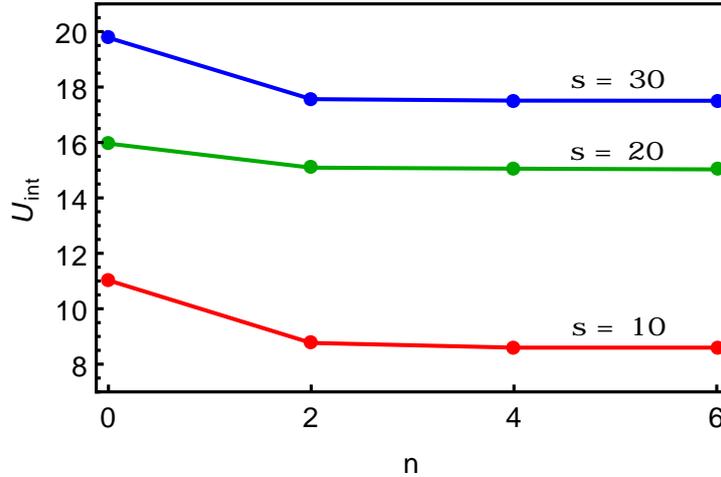


Figura 6.11: Andamento dell'energia d'interazione per varie profondità s di reticolo al variare del numero massimo di livelli di oscillatore armonico n_{max} e N_{max} utilizzati nel modello, sviluppando il potenziale in serie fino al decimo ordine. I valori riportati per $n_{max} = N_{max} = 0$ sono quelli derivanti dall'approssimazione armonica del potenziale (modello di Busch). Si osserva una sostanziale buona convergenza del modello a partire da $n_{max} = N_{max} = 4$

6.5.2 Determinazione di a_{eg}^- dai dati sperimentali

Seguendo la procedura indicata in sezione 6.4, la frequenza delle oscillazioni di spin è stata misurata per diversi valori della profondità di reticolo compresi fra $s \simeq 10$ e $s \simeq 40$. Per profondità inferiori a $s = 10$ non è stato infatti sperimentalmente possibile osservare oscillazioni, probabilmente a causa della perdita di coerenza causata dal tempo di tunneling estremamente ridotto (circa 1 ms a $s = 5$, vedi figura 3.2). Valori di profondità superiori ad $s = 40$ non sono invece sperimentalmente accessibili a causa della potenza finita dei fasci di reticolo.

Come già anticipato precedentemente, dal momento che la misura della frequenza delle oscillazioni viene effettuata a campo magnetico finito (3.5

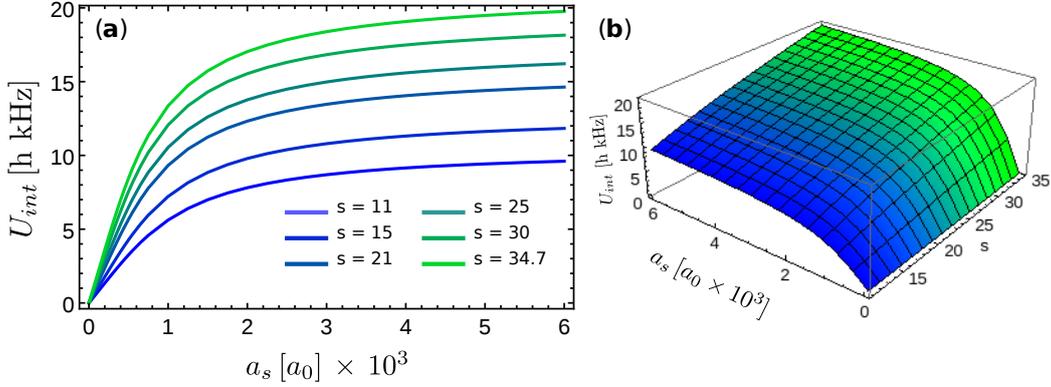


Figura 6.12: (a): Valori simulati dell'energia d'interazione U_{int} per due particelle interagenti in una buca di potenziale reticolare attraverso uno pseudopotenziale a delta regolarizzata caratterizzato da una lunghezza di scattering a_s al variare della profondità di reticolo s . (b): Funzione di interpolazione $U_{int}[s, a_s]$.

G) al fine di non depolarizzare il campione, la frequenza misurata non sarà $f_{osc} = 2V_{ex}/h = (U_{eg^-} - U_{eg^+})/2h$ quanto piuttosto

$$f'_{osc}[B] = (U_{eg^H} - U_{eg^L})/2h = f_{osc} + \Delta f[B] \quad (6.31)$$

dove U_{eg^H} e U_{eg^L} sono rispettivamente le energie degli stati $|eg^H\rangle$ e $|eg^L\rangle$ e $\Delta f[B]$ è una correzione sempre positiva. Se assumiamo valido il modello del mixing magnetico introdotto in sezione 5.5.2 una stima di $\Delta f[B]$ per $B \rightarrow 0$ è data da

$$\Delta f[B] = \frac{(\Delta B)^2}{V_{ex}} = \frac{\left(\frac{5}{2} \mu_0 \delta_g B\right)^2}{V_{ex}} \simeq 80 \frac{B^2[\text{G}]}{V_{ex}[\text{h kHz}]} [\text{Hz}] \quad (6.32)$$

Nei casi osservati sperimentalmente, ovvero per $V_{ex} \sim 10 h$ kHz, con $B = 3.5$ G avremo $\Delta f[B] \sim 0.2$ kHz.

Al fine di ricavare correttamente il parametro $2V_{ex}$ dalla frequenza delle oscillazioni di spin, la quantità 6.32 è stata innanzitutto sottratta ai valori delle frequenze di oscillazione misurati. Più avanti vedremo come il modello per due particelle interagenti elaborato precedentemente ci permetta di dare una stima migliore della correzione $\Delta f[B]$. Per ora assumeremo come valida la 6.32, il cui ordine di grandezza risulta comunque essere corretto.

Le frequenze misurate, corrette per l'effetto del campo magnetico di bias sono riportate in funzione della profondità di reticolo in figura 6.13. I valori riportati in grafico rappresentano la media su più misure effettuate alla stessa profondità di reticolo, mentre le barre di errore sono relative alla deviazione standard.

Con l'intento di dare una stima della lunghezza di scattering a_{eg^-} , il modello teorico è stato adattato ai dati sperimentali seguendo una procedura di fit. A tal proposito il modello è stato innanzitutto impiegato per realizzare una simulazione numerica del valore dell'energia d'interazione U_{int} fra le due particelle al variare della profondità di reticolo s e della lunghezza di scattering a_s nel range $10 \leq s \leq 40$ e $0 \leq a_s \leq 10^5 a_0$. I risultati della simulazione, per sei diversi valori di s sono mostrati in figura 6.12a. I risultati della simulazione sono stati successivamente interpolati in modo da realizzare una mappa bidimensionale, riportata in figura 6.12b, di U_{int} in funzione di s ed a_s nel range sopra specificato. Una volta determinata la funzione $U_{int}[s, a_s]$, è stato eseguito un fit dei dati sperimentali relativi alla frequenza delle oscillazioni e quindi al parametro $2|V_{ex}|/h = (U_{eg^-} - U_{eg^+})/h$, utilizzando come funzione di fit

$$f_{fit}[a_{eg^-}, a_{eg^+}] = (U_{int}[s, a_{eg^-}] - U_{int}[s, a_{eg^+}]) / h. \quad (6.33)$$

Sono stati effettuati due diversi fit dei dati, il primo lasciando come parametri liberi entrambe le lunghezze di scattering a_{eg^+} e a_{eg^-} e il secondo lasciando come unico parametro libero a_{eg^-} e fissando a_{eg^+} al valore ricavato in [36], ovvero $a_{eg^+} = 219.5 a_0$. I due fit sono mostrati in figura 6.13. Il fit ottenuto lasciando come parametri liberi entrambe le lunghezze di scattering ha dato come risultati

$$a_{eg^+} = (1.3 \pm 0.5) \times 10^2 a_0 \quad a_{eg^-} = (2.2 \pm 0.5) \times 10^3 a_0 \quad (6.34)$$

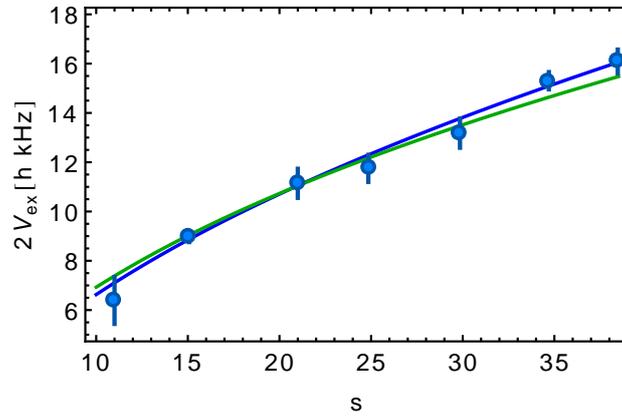


Figura 6.13: Frequenza delle oscillazioni di spin misurata in funzione della profondità di reticolo s . I dati sono stati corretti per tenere conto del campo magnetico di bias di 3.5 G utilizzato per non depolarizzare il campione. Le linee sono due diversi fit eseguiti sui punti sperimentali utilizzando il modello di due particelle interagenti sviluppato nel corso di questo capitolo. Nel primo fit (linea blu) sono state determinate entrambe le lunghezze di scattering a_{eg^+} e a_{eg^-} . Nel secondo fit (linea verde) a_{eg^+} è stata fissata a $219.5 a_0$ [36] ed è stata determinata a_{eg^-} . Si veda il testo per maggiori dettagli.

Dal fit in cui la sola a_{eg^-} è stata lasciata come parametro libero è stato invece ottenuto

$$a_{eg^-} = (3.2 \pm 0.3) \times 10^3 a_0 \quad (6.35)$$

I due fit non danno risultati fra loro consistenti per quanto riguarda la stima di a_{eg^-} . Dal momento che il fit ottenuto lasciando entrambe le lunghezze di scattering come parametri liberi non dà un valore di a_{eg^+} compatibile con quello riportato in [36], è stata scelta come miglior stima di a_{eg^-} quella ottenuta fissando a_{eg^+} a $219.5 a_0$.

Va comunque osservato che dare una stima accurata di a_{eg^-} con il metodo appena descritto è reso complicato dal fatto che in questo regime, come si può vedere in figura 6.14, la dipendenza della lunghezza di scattering dall'energia d'interazione è estremamente debole ed errori derivanti, ad esempio, da una stima sbagliata della profondità del reticolo possono facilmente determinare errori ingenti nella stima del parametro in esame. Nella prossima sezione vedremo come rielaborando il modello del mixing magnetico introdotto in sezione 5.5.2, sia possibile dare una stima alternativa di a_{eg^-} misurando la frequenza delle oscillazioni di spin al variare del campo magnetico di bias.

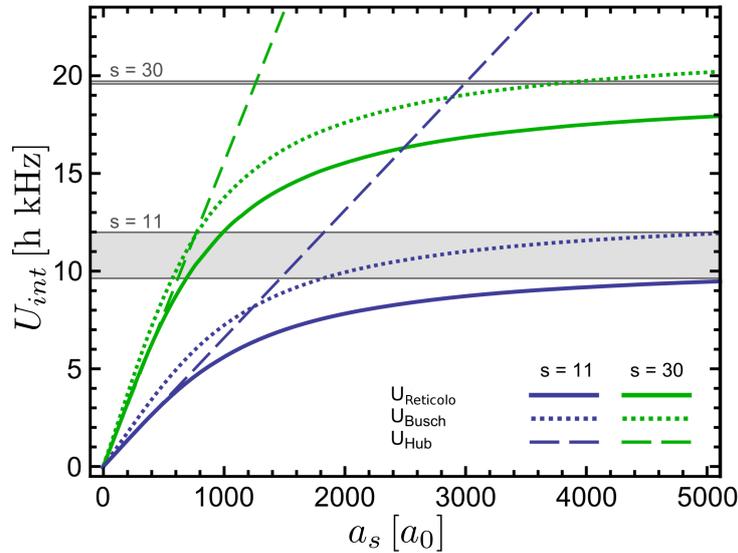


Figura 6.14: Confronto fra le energie d'interazione ottenute con il modello di Hubbard, il modello di Busch e il modello per particelle interagenti sviluppato nel corso di questo capitolo in funzione della lunghezza di scattering per due diversi valori della profondità di reticolo ($s = 11$ e $s = 30$). In grigio l'ampiezza delle bande a $s = 11$ e $s = 30$.

6.6 Fattore di Franck - Condon

Prendiamo nuovamente in considerazione il problema di due atomi interagenti per mezzo di un potenziale a delta regolarizzata discusso nella precedente sezione. Dal momento che all'aumentare della lunghezza di scattering cresce la repulsione fra le particelle, avremo che queste tenderanno ad incrementare la propria distanza relativa. Per tener conto degli effetti del potenziale d'interazione la funzione d'onda complessiva del sistema dovrà quindi essere necessariamente modificata rispetto al caso non interagente e verrà pertanto anch'essa a dipendere dalla lunghezza di scattering. Questo risultato è riportato in figura 6.15(b) nel caso di interazione all'interno di una buca di potenziale armonica ed è quindi analogo a quello che si otterrebbe per due particelle interagenti in un reticolo per $s \gg 1$. Con queste premesse appare ora evidente il motivo dell'inadeguatezza del modello del mixing magnetico introdotto in [36] e riportato in sezione 5.5.2 nel riprodurre correttamente l'andamento dei dati sperimentali al fine di dare una stima di a_{eg^-} . Nel calcolo degli elementi di matrice 5.20 non è stato infatti considerato che la parte spaziale delle funzioni d'onda coinvolte non è la stessa, essendo gli stati $|eg^+\rangle$ ed $|eg^-\rangle$ caratterizzati da due diverse lunghezze di scattering. Per tenere conto della dipendenza delle funzioni d'onda dei due stati dalla lunghezza di

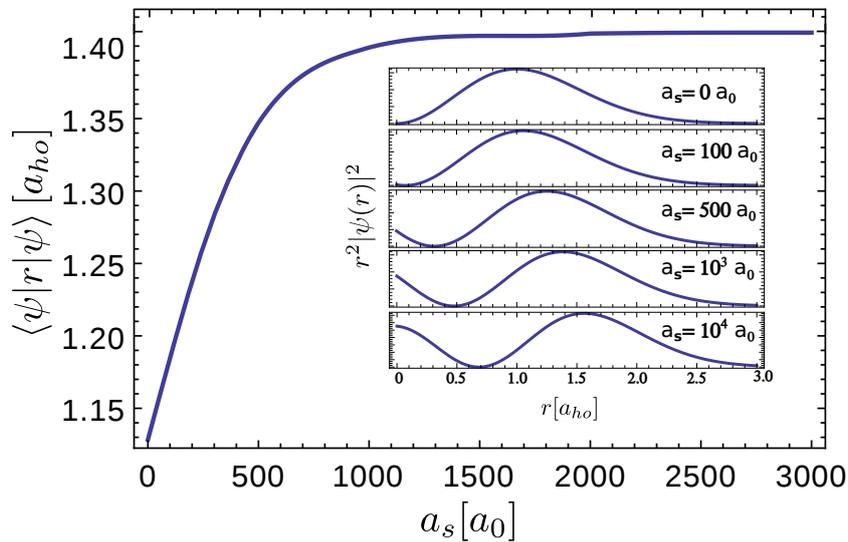


Figura 6.15: Distanza relativa media ($r = |r_1 - r_2|/\sqrt{2}$) di due particelle interagenti in una buca di potenziale armonica. Nell'inset è mostrata la densità di probabilità radiale ($r^2 |\psi(r)|^2$) associata alle funzioni di Busch al variare della lunghezza di scattering. Si osserva uno spostamento verso destra del massimo della funzione al crescere di a_s , in accordo con l'aumento della distanza relativa fra le particelle.

scattering è pertanto necessario moltiplicare gli elementi di matrice 5.20 per un fattore correttivo dato dall'integrale di sovrapposizione

$$F(a_{eg^+}, a_{eg^-}) = \iint d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \psi_{eg^+}^{+*}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \psi_{eg^-}^-(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \quad (6.36)$$

dove $\psi_{eg^+}^+(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ e $\psi_{eg^-}^-(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ sono rispettivamente le funzioni d'onda spaziali degli stati $|eg^+\rangle$ e $|eg^-\rangle$. Mutuando il nome che descrive un fattore del tutto analogo dall'ambito della fisica delle molecole [42], ci riferiremo alla 6.36 come *fattore di Franck-Condon*.

L'andamento del fattore di Franck-Condon $F(a_1, a_2)$ per due particelle interagenti nella banda fondamentale di un reticolo di profondità $s = 30$ è riportato in figura 6.16a in funzione delle lunghezze di scattering a_1 ed a_2 . Dall'immagine è possibile osservare come lungo la diagonale, ovvero per $a_1 = a_2$, si abbia $F(a_1, a_2) = 1$, come è necessario che sia dal momento che il fattore F in questo caso è calcolato per due stati identici. Fuori dalla diagonale F decresce, fino ad assestarsi su valori dell'ordine di 0.6 nel caso di stati caratterizzati da lunghezze di scattering molto diverse. Con l'introduzione

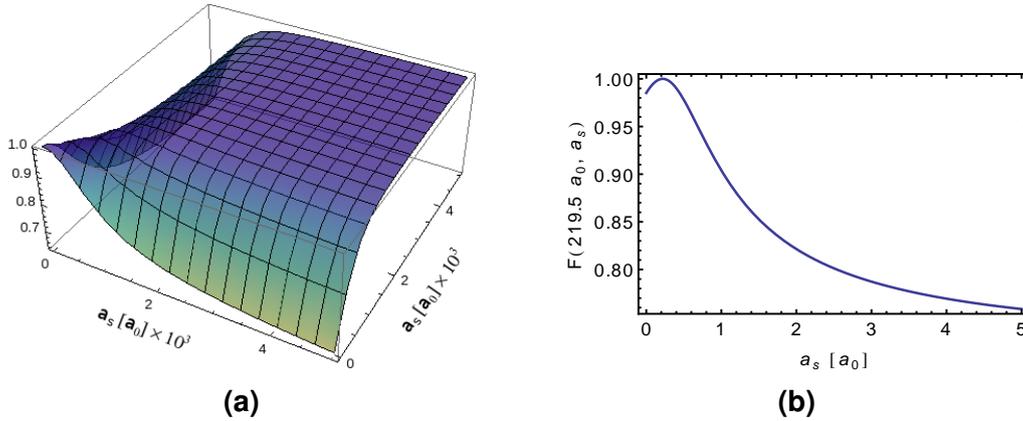


Figura 6.16: (a): Andamento del fattore di Franck-Condon $F(a_1, a_2)$ al variare delle lunghezze di scattering a_1 ed a_2 . (b): Fattore di Franck-Condon calcolato per $a_1 = 219.5 a_0$.

del fattore di Franck-Condon, l'hamiltoniana Zeeman 5.21 diventa

$$H_Z = \begin{pmatrix} U_{eg^+} & F(a_{eg^+}, a_{eg^-}) \Delta B \\ F(a_{eg^+}, a_{eg^-}) \Delta B & U_{eg^-} \end{pmatrix} \quad (6.37)$$

dove $\Delta B = \frac{5}{2} \mu_0 \delta_g B$ e a cui corrispondono gli autovalori

$$E^{H,L} = \frac{U_{eg^+} + U_{eg^-}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{U_{eg^+} - U_{eg^-}}{2}\right)^2 + F^2(a_{eg^+}, a_{eg^-}) \Delta B^2} \quad (6.38)$$

e, rispettivamente, gli autostati $|eg^H\rangle$ e $|eg^L\rangle$. La 6.38 ci permette innanzitutto di dare una migliore stima delle correzioni dovute al campo magnetico di bias da sottrarre alle frequenze di oscillazione misurate al variare della profondità di reticolo al fine di ricavare a_{eg^-} tramite la funzione di fit 6.33. Assumendo $a_{eg^+} = 219.5 a_0$ e prendendo come stima di a_{eg^-} la 6.35, otteniamo infatti un fattore di Franck-Condon $F \simeq 0.77$ (vedi figura 6.16b). Le nuove correzioni sono scalate di un fattore $0.77^2 \simeq 0.6$ rispetto a quelle precedentemente calcolate e sono quindi dell'ordine di 0.1 kHz per una frequenza di oscillazione di 10 kHz. Con i dati sperimentali così corretti, la funzione di fit 6.33 con a_{eg^+} fissata al valore $219.5 a_0$ dà come stima di a_{eg^-}

$$a_{eg^-} = (3.3 \pm 0.3) \times 10^3 a_0. \quad (6.39)$$

Come conclusione di questa sezione osserviamo in figura 6.17b come l'energia d'interazione dello stato $|eg^-\rangle$, ottenuta sommando ai dati sperimentali relativi a $2V_{ex}$ in funzione della profondità di reticolo l'energia dello stato $|eg^+\rangle$, calcolata assumendo $a_{eg^+} = 219.5 a_0$ per mezzo del modello sviluppato nel corso di questo capitolo, si mantenga comunque sempre inferiore alla separazione in energia fra le prime due bande reticolari, risultato in accordo con quanto previsto dalla teoria di Busch.

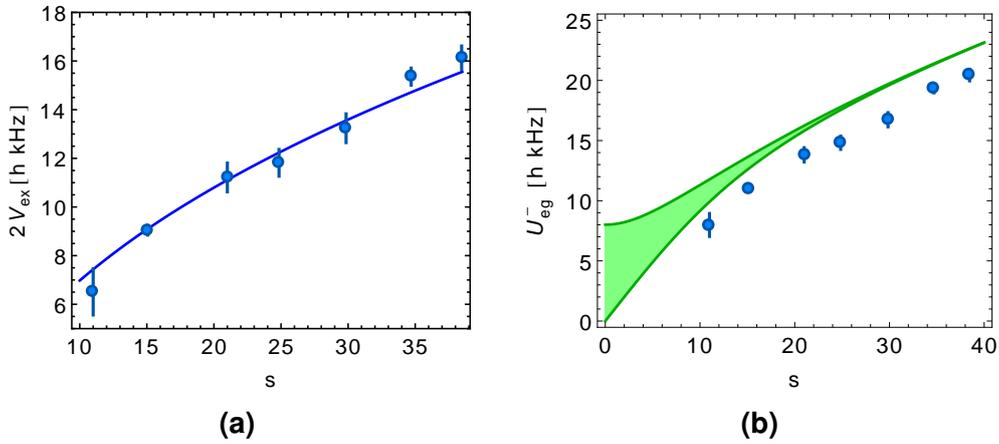


Figura 6.17: (a): Fit della frequenza delle oscillazioni di spin in funzione della profondità di reticolo. A differenza del fit riportato in figura 6.13 in questo caso i dati sono stati corretti per il campo magnetico di bias col modello 6.37, ottenendo per a_{eg^-} il valore $(3.3 \pm 0.3) a_0$. (b): Energia d'interazione dello stato $|eg^-\rangle$ calcolata sommando ai valori sperimentali ottenuti per $2V_{ex}$ in funzione della profondità di reticolo l'energia d'interazione dello stato $|eg^+\rangle$ calcolata usando $a_{eg^+} = 219.5 a_0$. I punti sono confrontati con la differenza di energia fra la seconda e la prima banda del reticolo.

6.7 Oscillazioni di spin al variare del campo magnetico

L'acquisizione della frequenza delle oscillazioni di spin al variare del campo magnetico di bias permette di ottenere un'ulteriore stima del valore di a_{eg^-} . Una volta fissato il valore di a_{eg^+} , la 6.38 mette infatti in relazione la frequenza di oscillazione

$$f_{osc}[B] = (E^H[B, U_{eg^-}] - E^L[B, U_{eg^+}])/h \quad (6.40)$$

con il campo magnetico B e con l'energia d'interazione U_{eg^-} , nota la quale è possibile ricavare a_{eg^+} . È interessante osservare come invertendo la 6.40, le misure della frequenza di oscillazione al variare del campo magnetico permettano di stimare l'energia dello stato $|eg^H\rangle$, la cui determinazione per via spettroscopica è resa difficile dal ridotto mixing dello stato $|eg^+\rangle$ in $|eg^H\rangle$ a campi magnetici bassi (vedi sezione 6.3).

Al fine di determinare a_{eg^-} , la frequenza delle oscillazioni di spin è stata pertanto misurata in funzione del campo magnetico generato dalla bobina di bias per valori compresi fra 0 e 20 G. Quest'ultimo valore corrisponde al massimo campo che la bobina di bias può generare in corrispondenza degli atomi e costituisce pertanto un limite superiore oltre il quale non è stato possibile spingersi in questo tipo di misure. Le misure sono state effettuate ad una profondità di reticolo alta ($s = 30$), in modo da ridurre eventuali effetti di decoerenza dovuti al tunneling degli atomi. Al fine di ricavare a_{eg^-} dai dati sperimentali così ottenuti, è stato eseguito un fit delle frequenze di oscillazione raccolte, fissando a_{eg^+} a $219.5 a_0$ ed utilizzando come funzione

$$f_{fit}[B, a_{eg^-}] = 2\sqrt{V_{ex}^2[a_{eg^-}] + (\alpha F[219.5 a_0, a_{eg^-}] B[G])^2} \quad (6.41)$$

dove $\alpha = \frac{5}{2} \frac{\mu_0 \delta_g}{10^7 h}$ e $V_{ex} = (U_{int}[30, a_{eg^-}] - U_{int}[30, 219.5 a_0])/2h$. Le funzioni $U_{int}[s, a_s]$ e $F[a_1, a_2]$ cui viene fatto riferimento nella 6.41 sono rispettivamente la funzione di interpolazione introdotta in sezione 6.5 che definisce l'energia d'interazione al variare della profondità di reticolo e della lunghezza di scattering e la funzione che definisce il fattore di Franck-Condon il cui andamento nel caso in esame ($a_{eg^+} = 219.5 a_0$) è riportato in figura 6.16b. Dal fit, il cui risultato è mostrato in figura 6.18, e nel quale non è stato tenuto conto dell'errore di misura dei dati dal momento che la statistica è troppo ridotta, si ottiene come stima di a_{eg^-} il valore

$$a_{eg^-} = (3.54 \pm 0.16) \times 10^3 a_0. \quad (6.42)$$

in ottimo accordo con quello ricavato col metodo sperimentale precedentemente discusso e riportato in 6.39.

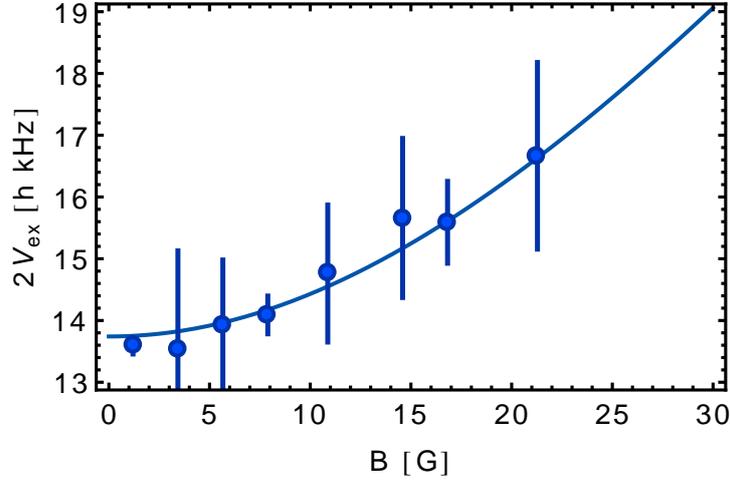


Figura 6.18: Fit della frequenza delle oscillazioni di spin in funzione del campo magnetico. Dal fit si ottiene come stima della lunghezza di scattering a_{eg-} il valore $a_{eg-} = (3.54 \pm 0.16) \times 10^3 a_0$.

Per testare l'efficacia del modello descritto dall'hamiltoniana 6.37 nel riprodurre correttamente l'andamento dei dati sperimentali, è stato inoltre effettuato un fit simultaneo dei dati relativi all'energia d'interazione dello stato $|eg^L\rangle$ misurata per via spettroscopica (vedi figura 5.14) e di quelli relativi alla frequenza delle oscillazioni di spin. Entrambi i set di dati sono stati acquisiti al variare del campo magnetico ad una profondità di reticolo $s = 30$. Il fit è stato eseguito esprimendo sia il fattore di Franck-Condon sia l'energia d'interazione in funzione della lunghezza di scattering a_{eg-} e fissando a_{eg+} a $219.5 a_0$ in modo tale che a_{eg-} sia l'unico parametro libero. Come funzione di fit è stata utilizzata la 6.41 per quanto riguarda la parte di dati relativi alle oscillazioni di spin e la funzione

$$f_{fit} = V[a_{eg-}] - \sqrt{V_{ex}^2[a_{eg-}] + \alpha^2 F^2[219.5 a_0, a_{eg-}] B^2}. \quad (6.43)$$

dove $V[a_{eg-}] = (U_{int}[30, a_{eg-}] + U_{int}[30, 219.5 a_0])/2h$ per i dati relativi alle misure di spettroscopia. Dal fit simultaneo dei due set di dati, il cui andamento è riportato in figura 6.19, si ottiene come stima di a_{eg-} il valore

$$a_{eg-} = (4.4 \pm 0.6) \times 10^3 a_0. \quad (6.44)$$

valore non compatibile con quello ricavato dal fit della frequenza delle oscillazioni di spin in funzione della profondità di reticolo (vedi 6.39). Dall'immagine 6.19 si osserva comunque un sostanziale buon accordo dei due fit con i dati sperimentali, nonostante il valore predetto per la lunghezza di scattering differisca nei due casi di $900 a_0$. Questa costituisce un'ulteriore evidenza della debolezza della dipendenza di U_{eg-} da a_{eg-} in questo regime.

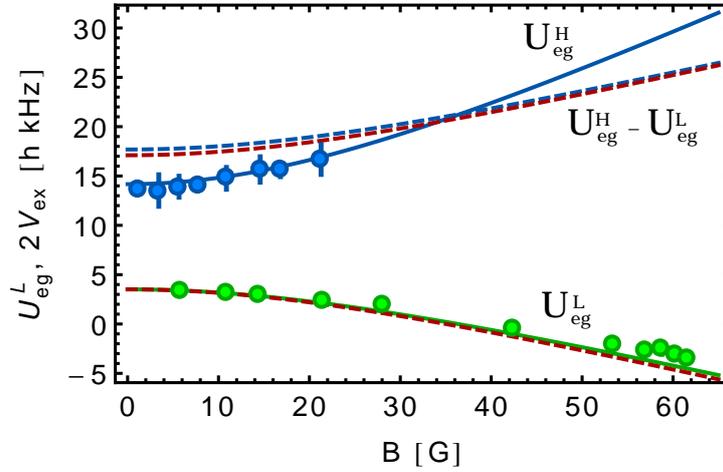


Figura 6.19: Fit simultaneo della frequenza delle oscillazioni di spin (in verde) e dell'energia d'interazione dello stato $|eg^L\rangle$ (in blu) al variare del campo magnetico e ad una profondità di reticolo $s = 30$. L'energia attesa per lo stato $|eg^-\rangle$ è mostrata tratteggiata in blu. Il risultato del fit è confrontato con quello ottenuto dallo stesso modello (vedi testo per maggiori dettagli) ma assumendo come valore della lunghezza di scattering quella derivante dal fit della frequenza delle oscillazioni in funzione della profondità di reticolo, ovvero $a_{eg^-} = 3300 a_0$ (linee tratteggiate in rosso).

6.8 Smorzamento delle oscillazioni

Il fenomeno delle oscillazioni di spin interorbitali è stato osservato in un sistema di atomi interagenti all'interno di un reticolo ottico tridimensionale. In particolare, il fenomeno è riconducibile ad atomi interagenti in siti reticolari doppiamente occupati in cui una delle due particelle si trova nello stato fondamentale 1S_0 e l'altra nello stato eccitato 3P_0 . Ciò costituisce un indubbio vantaggio in termini di riduzione delle sorgenti di decoerenza delle oscillazioni in quanto essendo solo uno dei due atomi nello stato 3P_0 , le collisioni inelastiche associate al canale collisionale $^3P_0 - ^3P_0$ risulteranno fortemente sopresse. Nonostante questo si osserva un tempo di vita finito delle oscillazioni, dell'ordine di 1 ms, dopo il quale diventa impossibile distinguerle dallo scattering della magnetizzazione in assenza di eccitazione con luce a 578 nm, come mostrato in figura 6.20. La perdita di coerenza delle oscillazioni è probabilmente associata al tunneling di atomi appartenenti alle bande eccitate del reticolo e ad imperfezioni nello spengimento del campo magnetico tra una misura e la successiva.

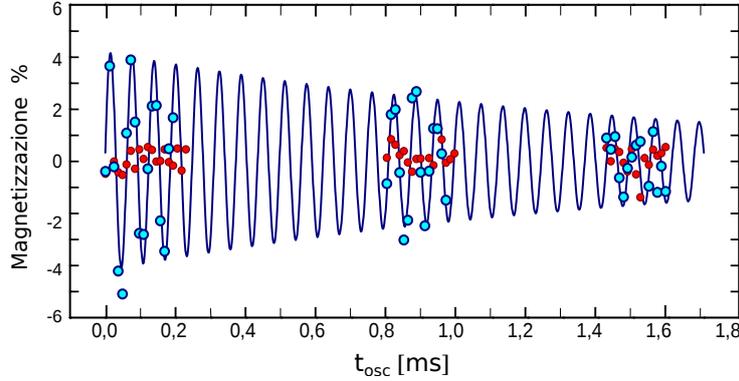


Figura 6.20: Oscillazioni di spin. I dati sono stati acquisiti ad una profondità di reticolo $s = 35$ e con un campo magnetico di bias di 3.5 G. I punti rossi sono relativi alla magnetizzazione misurata senza eccitare il campione con luce a 578 nm. Le oscillazioni iniziano a non essere discernibili dallo scattering della magnetizzazione in assenza di eccitazione a partire da 1.4 ms. Dal fit si ricava un tempo di smorzamento delle oscillazioni di (1.0 ± 0.2) ms.

6.9 Misura dell'accuratezza della simmetria $SU(N)$ in atomi di Itterbio

Le oscillazioni di spin costituiscono uno strumento ideale per misurare l'accuratezza della simmetria $SU(N)$ in atomi di Itterbio. La frequenza di oscillazione a campo magnetico e profondità di reticolo fissati dipende infatti dalla differenza tra l'energia di interazione dello stato $|eg^H\rangle$ e quella dello stato $|eg^L\rangle$, e queste a loro volta dipendono dalle lunghezze di scattering a_{eg}^+ e a_{eg}^- . Se la simmetria $SU(N)$ è rispettata, le due lunghezze di scattering non devono dipendere dallo stato di spin dei due atomi interagenti e la frequenza di oscillazione è quindi indipendente dallo spin delle particelle (escludendo ovviamente il caso in cui lo spin sia lo stesso, caso questo proibito dal principio di esclusione di Pauli).

La misura e il confronto della frequenza delle oscillazioni ottenute con varie miscele di spin costituisce pertanto, almeno teoricamente, un valido strumento per determinare l'accuratezza della simmetria $SU(N)$. A tal proposito, nell'ultima parte di questo lavoro di tesi, sono state acquisite e confrontate fra loro alcune misure della frequenza di oscillazione di due campioni, uno costituito dalla miscela di spin $m_F = \{+\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\}$ e l'altro dalla miscela $m_F = \{+\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\}$. Le misure sono state effettuate ad una profondità di reticolo $s = 30$ con un campo magnetico di bias di 3.5 G. La differenza fra le frequenze di oscillazione delle due miscele, indicate con Δf , sono riportate in figura 6.21. I tre punti mostrati nell'immagine sono le medie delle differenze misurate relative a giorni diversi. I punti ① e ② sono

stati ottenuti acquisendo più oscillazioni per ciascuna delle due miscele e poi mediando.

La necessità di raggruppare e mediare fra loro i due gruppi di misure piuttosto che fare una media unica dei dati è motivata dal fatto che il valore delle frequenze di oscillazione misurato, come mostrato chiaramente dai due grafici in alto di figura 6.21), differisce nei due set di dati, molto probabilmente a causa di problemi tecnici, legati ad esempio all'allineamento del reticolo. Nei due set di dati, per ciascuna delle due miscele di spin, le singole misure di frequenza non sono pertanto fra loro confrontabili, ma lo sono soltanto i Δf che risultano infatti compatibili nel limite dell'errore sperimentale. Con l'intento di ridurre eventuali vizi di tipo sperimentale è stata allestita una seconda procedura di misura in cui, per ogni tempo di oscillazione, è stato acquisito alternativamente un punto sperimentale relativo alla miscela $m_F = \{+\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\}$ e uno alla miscela $m_F = \{+\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\}$. La media risultante da queste ultime misure è quella individuata dal punto ③, la quale risulta compatibile con zero nel limite dell'errore sperimentale. I risultati ottenuti sembrano mettere in evidenza una violazione della simmetria nel sistema preso in esame, dal momento che la media pesata dei tre punti riportati in figura 6.21, ovvero $\Delta \bar{f} = (68 \pm 36)$ Hz, è compatibile con zero solo entro 2σ . A causa dei problemi tecnici descritti queste misure non possono

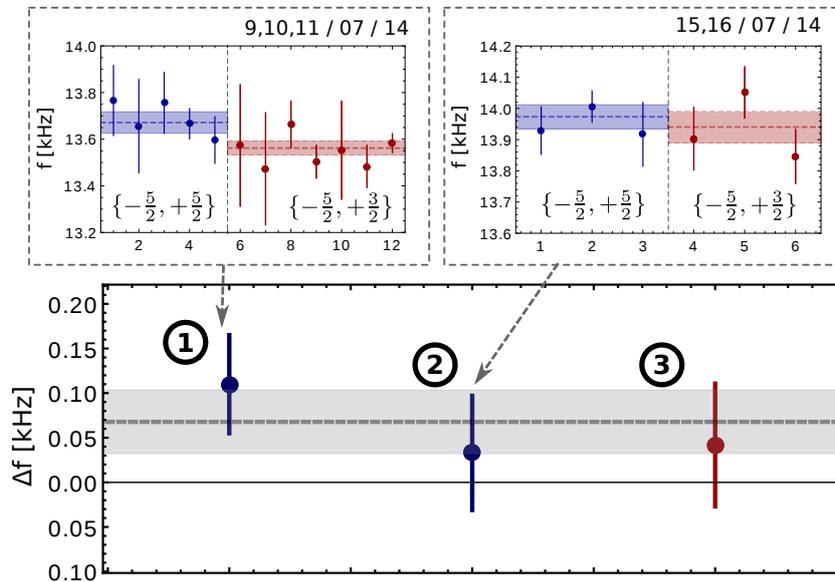


Figura 6.21: Differenza fra la frequenza delle oscillazioni di spin misurate ad una profondità di reticolo $s = 30$ per le miscele $m_F = \{+\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\}$ e $m_F = \{+\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\}$. In alto sono riportati i due set di dati, con i relativi giorni di acquisizione, con cui le medie (1) e (2) sono calcolate. Si veda il testo per maggiori dettagli.

dirsi definitive nell'evidenziare una eventuale differenza nella frequenza di oscillazione fra le due miscele. Per poter caratterizzare meglio il problema è sicuramente necessaria una migliore stabilizzazione dell'apparato sperimentale sia dal punto di vista termico, sia per quanto riguarda l'allineamento del reticolo. La correzione della componente non lineare del drift della cavità ULE consentirebbe infine di effettuare l'acquisizione delle oscillazioni per tempi più lunghi rispetto agli attuali senza che il laser perda la risonanza, riducendo in questo modo l'errore sulla frequenza misurata.

Conclusioni

Questo lavoro di tesi, il cui svolgimento si è sviluppato nell'ambito dell'esperimento dedicato alla realizzazione ed allo studio di gas degeneri di Itterbio attivo presso il dipartimento di Fisica ed Astronomia dell'Università degli Studi di Firenze, ha avuto come primo obiettivo la caratterizzazione spettroscopica della transizione d'orologio $^1S_0 \rightarrow ^3P_0$ in un campione fermionico degenere di ^{173}Yb intrappolato all'interno di un reticolo ottico tridimensionale in regime di Lamb-Dicke. L'eccitazione della transizione è stata effettuata per mezzo di un laser caratterizzato da una larghezza di riga ultra stretta ($\delta f < 50$ Hz) la cui frequenza è stabilizzata su un modo di una cavità ULE ad altissima finesse. Le misure di spettroscopia hanno riguardato sia campioni polarizzati in un unico stato di spin, sia campioni composti da una miscela di due stati di spin. In particolare, in quest'ultimo caso, è stato possibile osservare i picchi d'interazione associati alla formazione di stati a due particelle in siti reticolari doppiamente occupati.

Nella seconda parte del lavoro, le misure di spettroscopia sono state utilizzate come punto di partenza per la realizzazione di uno stato coerente a due particelle dato dalla sovrapposizione quantistica degli stati di singoletto e di tripletto di spin in cui uno dei due atomi si trova nello stato fondamentale 1S_0 e l'altro nello stato metastabile 3P_0 . Dall'evoluzione temporale di questo stato di sovrapposizione, misurando la popolazione del livello elettronico fondamentale per ciascuna delle due componenti di spin, è stata osservata per la prima volta la natura coerente delle oscillazioni di spin indotte dall'evoluzione temporale stessa.

Dalla misura della frequenza delle oscillazioni di spin al variare della profondità di reticolo e del campo magnetico in corrispondenza degli atomi è stato possibile determinare la lunghezza di scattering a_{eg^-} associata all'interazione fra due atomi nello stato di singoletto di spin e che è risultata essere $a_{eg^-} = (3.3 \pm 0.3) \times 10^3 a_0$, dove a_0 è il raggio di Bohr. Dal momento che l'interazione fra atomi nello stato di singoletto di spin è fortemente repulsiva, regime questo in cui il modello a singola banda di Fermi-Hubbard perde di validità, per ricavare il valore di a_{eg^-} è stato necessario elaborare un modello

a più bande per due particelle interagenti all'interno di un sito reticolare.

La misura diretta della frequenza di oscillazione ha consentito di verificare direttamente alcuni principi di base della meccanica quantistica associati alla simmetria di scambio di particelle identiche. Dal momento che l'interazione di scambio costituisce il meccanismo alla base di numerosi fenomeni caratteristici del magnetismo, questa misura rappresenta un passo avanti nella realizzazione di simulatori quantistici basati su atomi ultrafreddi interagenti all'interno di un reticolo ottico.

Bibliografia

- [1] M. Lewenstein, A. Sanpera, V. Ahufinger. *Ultracold Atoms in Optical Lattices*. Oxford University Press, 2012.
- [2] N. Poli *et al.* Optical atomic clocks. *arXiv:1401.2378v2*, 2014.
- [3] M. Greiner *et al.* Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms. *Nature*, **415**, 39–44, 2002.
- [4] A.V. Gorshkov *et al.* Two-orbital SU(N) magnetism with ultracold alkaline-earth atoms. *Nature Physics*, **6**, 289–295, 2009.
- [5] X. Zhang *et al.* Spectroscopic observation of SU(N)-symmetric interactions in Sr orbital magnetism. *Science*, **345**, 6203, 2014.
- [6] Z. Barber. *Ytterbium Optical Lattice Clock*. PhD Thesis, 2003.
- [7] A. J. Daley *et al.* Quantum Computing with Alkaline-Earth-Metal Atoms. *Phys. Rev. Lett.*, **101**, 170504, 2008.
- [8] S. Porsev *et al.* Possibility of an optical clock using the 3P_0 transition in Yb atoms held in an optical lattice. *Phys. Rev. A*, **69**, 021403, 2004.
- [9] V.A. Dzuba *et al.* Dynamic polarizabilities and related properties of clock states of the ytterbium atom. *Journal of Physics B*, **43**, 2010.
- [10] B.G. Wybourn and L. Smentek. *Optical Spectroscopies of Lanthanides*. CRC press, 2007.
- [11] M. Weissbluth. *Atoms and Molecules*. Academic Press, 1978.
- [12] S.G. Porsev *et al.* Hyperfine quenching of the metastable $^3P_{0,2}$ states in divalent atoms. *Phys. Rev. A*, **69**, 042506.
- [13] R. Santra *et al.* Properties of metastable alkaline-earth-metal atoms calculated using an accurate effective core potential. *Phys. Rev. A*, **69**, 042510, 2004.

- [14] M. M. Boyd *et al.* Nuclear spin effects in optical lattice clocks. *Phys. Rev. A*, **76**, 022510, 2007.
- [15] C. Cohen-Tannoudji, D. Guéry-Odelin. *Advances in atomic physics*. World Scientific, 2011.
- [16] R. Grimm *et al.* Optical Dipole Traps for Neutral Atoms. *Advances In Atomic, Molecular, and Optical Physics*.
- [17] S. Kokkelmans J. Mentink. Two interacting atoms in an optical lattice site with anharmonic terms. *Phys. Rev. A*, **79**, 032709, 2009.
- [18] M. Pini. *Atomi Ultrafreddi in Reticoli Ottici: Soluzioni Numeriche e Applicazioni in Computazione Quantistica*. Tesi triennale, 2014.
- [19] I. Bloch *et al.* Many-body physics with ultracold gases. *Rev. Mod. Phys.*, **80**, 885–964, 2008.
- [20] K. Huang, C.N. Yang. Quantum mechanical many-body problem with hard-sphere interaction. *Phys. Rev*, **105**, 767.
- [21] K. Huang. *Statistical Mechanics*. Wiley, 1967.
- [22] A. Widera *et al.* Precision measurement of spin-dependent interaction strengths for spin-1 and spin-2 ^{87}Rb . *New J. Phys.*, **8**, 152, 2006.
- [23] Tin-Lun Ho. Spinor Bose Condensates in Optical Traps. *Phys. Rev. Lett.*, **81**, 742, 1998.
- [24] T. Busch *et al.* Two Cold Atoms in a Harmonic Trap. *Found. Phys.*, **28**, 549, 1998.
- [25] M. Pizzocaro *et al.* Realization of an ultrastable 578-nm laser for an Yb lattice clock. *IEEE T. Ultrason. Ferr.*, **59**, 3, 426–431, 2012.
- [26] G. Cappellini. *Sviluppo di un sistema laser per la codifica di qubit su atomi degeneri di Itterbio*. Tesi magistrale, 2012.
- [27] W. Nagourney. *Quantum Electronics for Atomic Physics*. Oxford University Press, 2010.
- [28] *et al.* K. Pandey. Isotope shifts and hyperfine structure in the 555.8-nm $^1S_0 \rightarrow ^3P_1$ line of Yb. *Phys. Rev. A*, **80**, 022518, 2009.
- [29] M. Inguscio and L. Fallani. *Atomic Physics*. Oxford University Press, 2013.

-
- [30] G. Pagano. *Raffreddamento e Intrappolamento di atomi di Itterbio*. Tesi magistrale, 2011.
- [31] M. Mancini. *Realizzazione sperimentale di un gas quantistico degenero di atomi di Itterbio*. Tesi magistrale, 2012.
- [32] L. Livi. *Trasporto ottico di atomi ultrafreddi a lunga distanza*. Tesi triennale, 2012.
- [33] Bhundt. *Momentum-Resolved Optical Lattice Modulation Spectroscopy on Bose-Fermi Mixtures*. Diploma Thesis, 2011.
- [34] C. J. Foot. *Atomic Physics*. Oxford University Press, 2012.
- [35] M. Kitagawa *et al.* Two-color photoassociation spectroscopy of Ytterbium atoms and the precise determinations of s-wave scattering lengths. *Phys. Rev. A*, **77**, 012719, 2008.
- [36] F. Scazza *et al.* Observation of two-orbital spin-exchange interactions with ultracold $SU(N)$ -symmetric fermions. *Nature Physics*, **10**, 779–784, 2014.
- [37] G. Cappellini *et al.* Direct observation of coherent inter-orbital spin-exchange dynamics. *Phys. Rev. Lett.*, **113**, 120402, 2014.
- [38] J. S. Krauser *et al.* Coherent multi-flavour spin dynamics in a fermionic quantum gas. *Nature Physics*, **8**, 813–818, 2012.
- [39] A. Widera *et al.* Coherent Collisional Spin Dynamics in Optical Lattices. *Phys. Rev. Lett.*, **95**, 190405, 2005.
- [40] M. Anderlini *et al.* Controlled exchange interaction between pairs of neutral atoms in an optical lattice. *Nature*, **448**, 452–456, 2007.
- [41] G. Pagano. *One dimensional quantum liquids of ultracold fermions*. PhD Thesis, 2014.
- [42] B.H. Bransden and C.J. Joachain. *Physics of atoms and molecules*. Addison-Wesley, 2003.