

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FIRENZE Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Tesi di Laurea Magistrale in Scienze Fisiche e Astrofisiche

Correlazione di Densità di una Miscela di Atomi Ultrafreddi in Reticolo Ottico

Density Correlation of a Mixture of Ultracold Atoms in an Optical Lattice

CANDIDATO: Vladislav Gavryusev Relatore: Dott. Francesco Minardi Correlatore: Prof. Massimo Inguscio

Anno Accademico 2010/2011

Indice

In	Indice								
In	trod	uzione		1					
1	Atomi Ultrafreddi in Reticoli Ottici								
	1.1	Introd	luzione BEC	5					
	1.2	Confir	amento e raffreddamento degli Atomi	7					
		1.2.1	Trappola Magnetica	8					
		1.2.2	Trappola Dipolare, Melassa Ottica e Trappola						
			Magneto-Ottica	9					
		1.2.3	Reticolo Ottico	16					
	1.3	Model	lo di Bose-Hubbard a singola specie	17					
		1.3.1	Il Modello	18					
		1.3.2	Stato Superfluido e Stato Isolante di Mott	21					
		1.3.3	Transizione di Fase Superfluido-Mott	22					
	1.4	Model	lo di Bose-Hubbard a doppia specie	24					
2	Cor	relazio	one di Rumore	27					
	2.1	Teoria	della Coerenza Spaziale	27					
	2.2	Interfe	erometria di Intensità ed Effetto Hanbury Brown e Twiss	29					
		2.2.1	Trattazione Classica	29					
		2.2.2	Esperimento di Hanbury Brown e Twiss	30					
		2.2.3	Trattazione quantistica e Funzioni di Correlazione	32					
		2.2.4	Spiegazione quantistica dell'effetto	34					
	2.3	Effette	o Hanbury Brown e Twiss per gas di Atomi Ultrafreddi	35					
	2.4	Rileva	mento Correlato di Bosoni rilasciati da Reticolo Ottico	38					
		2.4.1	Funzione di Correlazione nello stato di Isolante di Mott	39					
		2.4.2	Risultati attesi	42					
3	Descrizione dell'Apparato Sperimentale								
	3.1	I cam	pioni atomici: ⁸⁷ Rb e 41 K	46					
	3.2	L'App	parato Sperimentale	47					
		3.2.1	Sorgenti degli atomi e Apparato da Vuoto	48					

		$3.2.2 \\ 3.2.3 \\ 3.2.4$	Sorgenti Laser	$51 \\ 56 \\ 59$			
4	Seq	uenza	Sperimentale	61			
	4.1	Procee	dura di preparazione del campione atomico:	61			
		4.1.1	Trappola Magneto Ottica (MOT)	61			
		4.1.2	Compressione, Melassa Ottica e Pompaggio ottico	62			
		4.1.3	Trasferimento in Quadrupolo	63			
		4.1.4	Trappola Magnetica millimetrica e Raffreddamento Evapo-				
			rativo	63			
		4.1.5	Trappola Ottica	64			
		4.1.6	Reticolo Ottico	65			
	4.2	2 Trasferimenti di Stato					
	4.3	Tecnic	a di Rivelazione	69			
		4.3.1	Espansione in Tempo di Volo	69			
		4.3.2	Rivelazione in assorbimento	70			
	4.4	Procee	lura di Misura	73			
		4.4.1	Analisi dei requisiti sperimentali necessari per la misura	74			
		4.4.2	Sequenza dell'esperimento nel caso di singola specie	76			
		4.4.3	Sequenza dell'esperimento nel caso di doppia specie	77			
5	Stu	dio del	lla Correlazione di Rumore	79			
	5.1	Analis	i delle Immagini	79			
		5.1.1	Caricamento delle immagini	80			
		5.1.2	Selezione delle immagini	80			
		5.1.3	Normalizzazione	81			
		5.1.4	Calcolo della Funzione di Correlazione	83			
		5.1.5	Applicazione di Filtri	84			
		5.1.6	Uso delle simmetrie	86			
		5.1.7	Analisi dei picchi di correlazione	88			
	5.2	Risult	ati Sperimentali	90			
		5.2.1	Caso singola specie	90			
		5.2.2	Caso doppia specie	101			
Conclusioni 103							
Ri	Ringraziamenti						
Bibliografia							

Introduzione

In questo lavoro di tesi è stato studiato il comportamento di una miscela di atomi ultrafreddi di ⁸⁷Rb e ⁴¹K intrappolati in un reticolo creato dalla luce. Il sistema è stato analizzato con una tecnica diagnostica basata sull'effetto Hanbury Brown e Twiss che ha permesso di ricavare informazioni sulla disposizione degli atomi nel reticolo attraverso il calcolo della funzione di correlazione fra punti diversi di una serie di immagini del gas atomico.

La realizzazione nel 1995 della condensazione di Bose-Einstein (BEC) di un gas diluito di atomi ultrafreddi [1, 2] ha costituito uno dei maggiori progressi del secolo scorso nel campo della fisica atomica, aprendo la strada all'osservazione di fenomeni quantistici su scala macroscopica. Un condensato di Bose-Einstein ha la particolare proprietà di presentare una coerenza macroscopica, in quanto tutti gli atomi occupano il livello energetico fondamentale e possono essere ben descritti da un'unica funzione d'onda con ordine a lungo raggio.

I primi lavori si sono concentrati sullo studio dei fenomeni associati a questa proprietà, fra cui l'interferenza fra due condensati sovrapposti [3], ed è risultato velocemente chiaro come i condensati di Bose-Einstein possano permettere lo studio di molti fenomeni che coinvolgono contemporaneamente più campi della fisica [4], dall'ottica quantistica alla fisica dello stato solido.

L'introduzione dei reticoli ottici, costituiti da onde elettromagnetiche stazionarie generate da fasci laser contropropaganti, ha portato questi studi interdisciplinari su un nuovo livello. É noto dalla fisica dello stato solido che il moto di un elettrone attraverso un mezzo con struttura cristallina sia ben descritto dalla teoria di Bloch, secondo cui il sistema può essere ricondotto allo studio del moto di una singola particella attraverso un potenziale periodico, generato dagli ioni del reticolo. Un campione di atomi ultrafreddi in moto all'interno di una struttura periodica generata dalla luce mostra un comportamento analogo a quello degli elettroni, ma presenta anche una differenza molto importante: un reticolo puramente ottico è rigorosamente periodico, sono del tutto assenti i tipici difetti di un materiale cristallino (come impurezze, siti vacanti e dislocazioni) e non può sostenere fononi, essendo composto unicamente da fotoni, che sono bosoni non interagenti. É stato così possibile studiare molti fenomeni di particella singola previsti dalla fisica dello stato solido, ma difficili da verificare nei comuni materiali per via dei difetti: fra gli esperimenti più importanti bisogna ricordare lo studio delle oscillazioni di Bloch di gas degeneri [5], l'osservazione dell'effetto Josephson [6, 7] e l'osservazione della diffrazione di Bragg [8, 9, 10].

L'intrappolamento degli atomi nel reticolo ha permesso anche di superare un limite intrinseco dei gas fortemente diluiti, ovvero la debolezza delle correlazioni quantistiche fra le particelle, in quanto il confinamento porta all'insorgere di fenomeni che non possono essere descritti senza considerare le fluttuazioni quantistiche. Questo effetto diventa particolarmente rilevante al crescere dell'ampiezza del potenziale di confinamento reticolare: per reticoli deboli lo stato degli atomi è ancora ben descritto dalla fase superfluida propria di una BEC ed essi si possono spostare da un sito reticolare all'altro in maniera relativamente imperturbata, mentre per reticoli alti l'energia richiesta per questo spostamento diventa troppo grande e gli atomi tendono a localizzarsi nei siti reticolari. Questo stato del sistema viene definito fase Isolante di Mott, in analogia ad un effetto simile trovato per gli elettroni in un solido [38], ed è contraddistinto dalla perdita della coerenza del primo ordine propria della BEC.

Il comportamento degli atomi ultrafreddi in un reticolo ottico è ben descritto dal modello di Bose-Hubbard, costruito anch'esso ai fini della fisica dello stato solido e proposto per la prima volta in questo ambito nel lavoro di D. Jaksch [11]. Il diagramma di fase del modello è determinato da due sole scale di energia: l'accoppiamento J mediante tunneling fra due siti primi vicini e l'energia U di interazione fra due atomi che occupano lo stesso sito reticolare. Variando opportunamente l'intensità della luce laser che determina l'ampiezza del reticolo è possibile controllare finemente entrambi questi parametri: si apre così la prospettiva di poter ottenere un sistema quantistico completamente controllato, utile per effettuare simulazioni di fisica dello stato solido e non solo, anche laddove i migliori metodi di simulazione matematica non possono dare previsioni [12].

Un primo risultato legato a questa affascinante possibilità è stato lo studio della transizione fra lo stato Superfluido e lo stato Isolante di Mott svolto nel 2002 in presenza di una singola specie atomica intrappolata nel reticolo ottico [39]. In esso è stata studiata la distribuzione di densità degli atomi dopo un certo tempo di espansione libera a seguito dello spegnimento del reticolo. Nella fase superfluida la distribuzione di densità è caratterizzata dalla presenza di picchi aggiuntivi oltre a quello centrale legati alla coerenza di fase del primo ordine, da cui possono essere ricavare informazioni sulla distribuzione spaziale degli atomi nei siti reticolari, mentre nella fase isolante essi sono del tutto assenti ed il profilo di densità può permettere di ricavare solo il numero di atomi totale. L'osservazione della variazione del profilo di densità al variare dell'altezza del reticolo ha permesso di studiare la transizione fra i due stati.

Nel presente lavoro di tesi è stato usato un apparato sperimentale che permette di ottenere un doppio condensato di ⁸⁷Rb e ⁴¹K e di confinarlo in un reticolo ottico tridimensionale. In queste condizioni il campione atomico risulta essere ben descritto dal modello di Bose-Hubbard a due specie atomiche che differisce dalla duplicazione del caso precedente solo per la presenza di una scala di energia addizionale: l'energia U' di interazione fra due atomi di specie diverse che occupano lo stesso sito. Anche questa interazione può essere controllata sfruttando le risonanze di Feshbach. Il diagramma di fase in presenza di due atomi bosonici diventa molto più ricco: oltre alla permanenza di entrambe le specie in una delle due fasi già citate, sono possibili tutte le loro combinazioni, ma non solo. Molti lavori teorici [43, 44, 45, 46, 47, 48] hanno predetto l'esistenza di fasi interessanti e non ancora esplorate, come un possibile ordinamento "antiferromagnetico" delle due specie nel reticolo.

3

Per poter studiare queste nuove fasi della materia bisogna disporre di metodi diagnostici capaci di accedere alle osservabili che li discriminano, una delle quali può essere la coerenza presente ad ordini superiori al primo. La tecnica di rivelazione degli atomi sito per sito [13, 14] è molto potente, ma non è integrabile nel nostro apparato sperimentale. Durante lo svolgimento di questa tesi è stato invece possibile implementare e sfruttare la tecnica proposta da [15] basata sul calcolo della funzione di correlazione spaziale delle fluttuazioni contenute nelle immagini del profilo di densità di un campione atomico, lasciato espandere per un certo tempo dopo essere stato rilasciato dal reticolo. Questa tecnica sfrutta l'effetto Hanbury Brown e Twiss [16], originariamente applicato nell'ambito dell'astronomia per misurare il diametro angolare della stella Sirio. Secondo questo effetto la probabilità di rivelazione simultanea di due particelle identiche emesse da due sorgenti indipendenti e che arrivano a due rivelatori indipendenti non è data soltanto dal prodotto delle probabilità di rivelazione del singolo atomo nelle due posizioni, ma dipende dalla posizione relativa dei due rivelatori. Se essi sono sufficientemente vicini si può osservare una maggiore probabilità di rivelazione congiunta se le due particelle sono bosoni (bunching) o al contrario una probabilità inferiore se le due particelle sono fermioni (*antibunching*). Una descrizione teorica quantistica completa per i fotoni è stata formulata da R. Glauber [17, 18] nel 1963, aprendo la strada per l'ottica quantistica, e per questo lavoro gli è stato conferito il premio Nobel nel 2005.

L'efficacia di questa tecnica è già stata dimostrata da alcuni lavori [68, 69, 71, 72] volti a studiare le proprietà del diagramma di fase di una singola specie atomica intrappolata in un reticolo ottico. Nel presente lavoro di tesi si è voluto applicare questo metodo diagnostico per studiare il caso inesplorato di una miscela. Nel nostro caso non vengono rivelati direttamente gli atomi, ma il profilo di assorbimento da parte di essi di un fascio laser risonante con un'opportuna transizione della specie atomica in esame. L'attenuazione della luce memorizzata sui pixel di una telecamera CCD codifica la densità ottica della nuvola atomica lungo la direzione di rivelazione e le fluttuazioni di questa densità misurate in punti diversi della CCD recano traccia della disposizione degli atomi nel reticolo.

L'apparato sperimentale è stato adeguato dove necessario ai requisiti sperimentali previsti, è stata verificata la correttezza delle prime misure studiando il comportamento ben noto della fase Isolante di Mott in presenza del solo Rubidio. Poi è stato svolto un lavoro completo ed esauriente volto a determinare i valori ottimali di tutti i parametri sperimentali ritenuti importanti per massimizzare il rapporto segnale/rumore del segnale di correlazione osservato. É stato sviluppato un programma di analisi dei dati molto affidabile che ha permesso di calcolare la funzione di correlazione ed estrarre il segnale di correlazione cercato anche in presenza di notevole rumore di fondo.

L'aspetto più originale di questa tesi è però costituito dalle due misure svolte in presenza del solo Rb e dal successivo lavoro svolto sulla miscela di Rb e K per ottenere il segnale di correlazione da entrambe le specie presenti. Lo studio dell'andamento del segnale di correlazione al variare dell'ampiezza del reticolo tridimensionale ha mostrato un buon accordo con le previsioni teoriche e con i risultati sperimentali ottenuti da [71] nel caso di un sistema intrappolato in un reticolo bidimensionale. Nel secondo studio è stato osservato il comportamento del segnale di correlazione al variare del tempo di intrappolamento in un reticolo basso in presenza di una grande frazione di atomi nella fase Superfluida. Ε stato mostrato che, come atteso, questa frazione diminuisce all'aumentare del tempo per via di un processo di decoerenza e che il segnale di correlazione invece aumenta progressivamente, indicando probabilmente che parte degli atomi che hanno perso la coerenza si viene a trovare in uno stato con proprietà simili a quello di un Isolante di Mott. Infine, preparando una miscela di Rb e K nel reticolo ottico, è stato possibile osservare il segnale di correlazione del Rb, ma non del K. Questo insuccesso è stato motivato e sono state formulate delle strategie volte al superamento dei problemi sperimentali riscontrati.

Questo lavoro di tesi è organizzato come segue. Nel primo capitolo viene brevemente illustrata la teoria che predice l'insorgere della BEC e vengono discusse le tecniche fondamentali necessarie per intrappolare e raffreddare un campione atomico. Dopo di che viene introdotto il Modello di Bose-Hubbard a singola e doppia specie atomica che descrive bene la fisica della miscela di atomi intrappolati in un reticolo ottico. Nel secondo capitolo viene descritta la teoria dell'interferometria di intensità e l'esperimento svolto da Hanbury Brown e Twiss. Poi sono discussi i comportamenti attesi per un gas di atomi ultrafreddi e viene trattato dettagliatamente il caso di bosoni rilasciati da un reticolo ottico. Il terzo capitolo è dedicato alla descrizione dell'apparato sperimentale utilizzato per svolgere questo lavoro di tesi, mentre nel quarto capitolo viene illustrata la procedura sperimentale usata per preparare il campione atomico nello stato di condensato. Qui viene anche discussa la tecnica di rivelazione in assorbimento e sono analizzati i requisiti sperimentali necessari per svolgere con successo le misure. Nel quinto e ultimo capitolo viene descritta dettagliatamente l'analisi delle immagini che permette di ricavare il segnale di correlazione. Infine viene presentato il lavoro di calibrazione svolto ed i risultati delle misure effettuate in presenza sia del solo Rubidio, sia della miscela di Rb e K.

Capitolo 1 Atomi Ultrafreddi in Reticoli Ottici

In questo primo capitolo verrà spiegato che cosa sia un Condensato di Bose-Einstein (BEC) e come sia possibile ottenerlo. Nel § 1.1 verrà brevemente discussa la teoria che prevede la formazione di un condensato e poi verranno illustrati i sistemi di confinamento necessari per contenere il campione atomico mentre viene raffreddato e portato nelle condizioni che possono permettere la transizione di fase verso la BEC: verrà spiegato il funzionamento della trappola magnetica (§ 1.2.1), della melassa ottica, della trappola magneto-ottica e di quella di dipolo ottico (§ 1.2.2). Infine, verrà descritto anche il reticolo ottico (§ 1.2.3), elemento fondamentale per lo studio svolto in questo lavoro di tesi.

Dopo questa prima parte, per descrivere la fisica di un gas di atomi confinati in un reticolo, verrà introdotto nel § 1.3 il modello di Bose-Hubbard a singola specie atomica e verranno discussi i possibili stati del sistema. Infine questo modello verrà esteso al caso della presenza di una seconda specie atomica (§ 1.4).

1.1 Introduzione BEC

Come è noto dalla meccanica quantistica, ogni particella, che sia elementare o composta, può essere collocata in due classi in base al suo spin: se è semi intero $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, ...)$ essa è un fermione e obbedisce alla statistica di Fermi-Dirac, se è intero (1,2,...) essa è un bosone e obbedisce alla statistica di Bose-Einstein. Entrambe le statistiche, a temperature sufficientemente alte, sono approssimabili con la statistica di Maxwell-Boltzmann.

Il principio di esclusione di Pauli vieta alle particelle fermioniche di trovarsi nello stesso stato quantistico, ovvero esse devono avere almeno un numero quantico differente. I bosoni non sono soggetti a questa limitazione e pertanto, in linea teorica, è possibile che tutte le particelle del sistema si trovino nello stesso stato. É estremamente improbabile che questo avvenga per uno stato qualunque, ma, come predetto da Bose per i fotoni (S = 0) nel suo lavoro del 1924 [19] e poi esteso l'anno successivo da Einstein [20] per tutte le particelle con spin intero, vi è un caso in un cui questo effetto diventa molto più realistico: se un sistema composto da N particelle identiche di Bose avesse una temperatura estremamente bassa la maggior parte delle particelle che lo compongono dovrebbe occupare il livello energetico fondamentale. Formalmente si può affermare che un sistema si trova in questo stato particolare, detto condensato, se, sotto una temperatura critica T_c , il numero di particelle N_0 nello stato fondamentale è molto maggio-re del numero negli stati eccitati N_l e non più trascurabile rispetto al numero totale di particelle N. In questo stato il sistema ha la proprietà aggiuntiva di diventare coerente perché risulta descrivibile con la funzione d'onda dello stato fondamentale.

Cerchiamo di determinare nel caso semplice di un gas ideale uniforme e privo di interazioni la condizione sulla temperatura. Ogni particella è caratterizzata dalla propria lunghezza d'onda di De Broglie $\lambda_B = \left(\frac{h^2}{2\pi m k_B T}\right)^{\frac{1}{2}}$ (detta anche lunghezza d'onda termica) che rappresenta l'estensione spaziale del pacchetto d'onda associato ad essa. Quando le distanze tipiche tra le particelle sono più grandi di λ_B è possibile trascurare gli effetti quantistici, mentre quando sono dello stesso ordine o addirittura inferiori questa approssimazione non è più valida e gli effetti derivanti dalla natura quantizzata della materia possono diventare dominanti. Per un gas di atomi, ed in generale per tutti i comuni sistemi fisici a temperatura ambiente, la lunghezza d'onda di De Broglie è molto più piccola della distanza media interatomica a determinata dalla densità $n \sim a^{-3}$. Ma a temperature sufficientemente basse λ_B può diventare più grande di a ed in tal caso le funzioni d'onda dei bosoni si sovrappongono e gli effetti statistici quantistici diventano importanti.

Nella trattazione di Einstein [21] la transizione di fase dal gas al condensato avviene quando la *densità nello spazio delle fasi*, definita come il prodotto della densità numerica di particelle ρ per il cubo della lunghezza d'onda termica, è maggiore di

$$\lambda_B^3 \rho > 2.612 \tag{1.1}$$

Questa condizione equivale a:

$$T < T_c = \frac{h^2}{2\pi m k_B [2.612\rho^{-1}]^{\frac{2}{3}}}$$
(1.2)

Studiando il sistema con metodi statistici nella rappresentazione Gran Canonica, risulta che la variabile termodinamica che discrimina la transizione è il numero di occupazione dello stato fondamentale:

$$n_0 = -\frac{1}{N} \frac{\partial \Omega}{\partial \mu_0} \tag{1.3}$$

dove Ω è il Gran Potenziale termodinamico e μ il potenziale chimico. Nella trattazione di Einstein la (1.3) diventa:

$$n_0 = \begin{cases} 0 & \text{per } T \ge T_c \\ 1 - (\frac{T}{T_c})^{\frac{3}{2}} & \text{per } T \le T_c \end{cases}$$
(1.4)

Essa non presenta discontinuità né calore latente, pertanto la transizione verso la BEC risulta essere del secondo ordine [22].

Nelle normali condizioni di pressione e temperatura un gas ha una densità nello spazio delle fasi inferiore di $10^{12} \div 10^{14}$ volte rispetto al valore richiesto per ottenere un condensato e questo spiega la difficoltà riscontrata nell'osservazione sperimentale di questo stato della materia, ottenuto soltanto nel 1995 e per cui sono stati conferiti tre premi Nobel nel 2001 [23, 24]. Dalla condizione (1.1) si può vedere che per realizzare la BEC si possono sfruttare due parametri fisici: è necessario raffreddare il gas a temperature bassissime, ma si deve anche cercare di avere la più alta densità atomica possibile. Come vedremo meglio in seguito, per diminuire la temperatura di un gas atomico vengono usati la tecnica del raffreddamento laser e la tecnica del raffreddamento evaporativo, mentre per aumentare la densità del campione esso viene confinato in una trappola magnetica o una trappola di dipolo ottico.

Il potenziale di confinamento interagisce con gli atomi ed al centro della trappola esso può essere approssimato bene da un potenziale di forma armonica:

$$V_{trap} = \frac{m}{2} (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2)$$
(1.5)

La media geometrica sulle tre direzioni della frequenza di oscillazione $\bar{\omega}_{ho} = (\omega_x \omega_y \omega_z)^{\frac{1}{3}}$ determina la larghezza media della distribuzione atomica:

$$\sigma = a_{ho} = \left(\frac{\hbar}{m\omega_{ho}}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.6}$$

Questa quantità è una delle lunghezze caratteristiche importanti per la fisica del sistema.

L'intrappolamento modifica la popolazione dei livelli e si può ricavare che in questo caso la temperatura critica diventa

$$T_c = 0.94\hbar\bar{\omega}N^{\frac{1}{3}}/k_B \tag{1.7}$$

ed il numero di occupazione risulta dipendere dal cubo del rapporto fra le temperature:

$$n_0 = \begin{cases} 0 & \text{per } T \ge T_c \\ 1 - (\frac{T}{T_c})^3 & \text{per } T \le T_c \end{cases}$$
(1.8)

1.2 Confinamento e raffreddamento degli Atomi

Come evidenziato nel paragrafo precedente, per portare un campione atomico verso la condensazione dobbiamo raffreddarlo, ma anche limitarne lo spazio delle fasi mediante una qualche forma di confinamento fisico. Per raffreddare gli atomi è necessario che su di essi agisca una forza dissipativa, mentre per confinarli stabilmente in una regione dello spazio è necessario che siano sottoposti ad una forza dipendente dalla loro posizione e diretta verso il centro dell'area di intrappolamento. Così, se una particella si allontana casualmente in una qualunque direzione, essa sentirà una forza di richiamo diretta verso il centro della trappola.

Il Rubidio ed il Potassio sono entrambi atomi neutri e pertanto è impossibile intrappolarli sfruttando tecniche basate sulla carica, bisogna usare metodi che sfruttino l'interazione con momenti di multipolo superiori, ovvero momenti di dipolo e quadrupolo. Per questo motivo le forze di confinamento risulteranno più deboli e le trappole meno profonde. I metodi qui descritti saranno tre:

- 1. intrappolamento puramente magnetico in Trappola Magnetica
- 2. intrappolamento puramente ottico in Trappola Dipolare
- 3. intrappolamento e raffreddamento in Melassa Ottica e Trappola Magneto-Ottica

Infine verrà illustrata anche una trappola più complessa, che può essere usata insieme alla trappola magnetica o a quella dipolare: il Reticolo Ottico. Questo potenziale, di tipo periodico, con barriere le cui caratteristiche possono essere controllate finemente, permette di esplorare molti tipi di interazioni e di verificare le predizioni dei modelli teorici che descrivono sistemi reticolari.

1.2.1 Trappola Magnetica

La trappola magnetica è basata sull'interazione fra il momento magnetico permanente di dipolo di un atomo μ con un campo magnetico disomogeneo $B(\vec{r})$ avente un minimo locale che porta ad uno spostamento Zeeman dei livelli dipendente dalla posizione. Rispetto alle trappole che sfruttano la radiazione laser non risente di effetti di riscaldamento dovuti all'interazione atomo-fotone e quindi permette di raggiungere e mantenere temperature inferiori, però necessita di un meccanismo di raffreddamento esterno, in quanto non ha proprietà dissipative proprie.

Se le variazioni del campo sono più lente del tempo di precessione di Larmor, ovvero se

$$\frac{1}{B} \left| \frac{dB}{dt} \right| \ll \frac{\mu_B B}{\hbar} \equiv \omega_L \tag{1.9}$$

allora il momento magnetico di dipolo dell'atomo sarà sempre allineato con il campo e l'energia di interazione si potrà scrivere come

$$U(\vec{r}) = -\mu \cdot B(\vec{r}) = \mu_B m_F g_F |B(\vec{r})|$$
(1.10)

dove μ_B è il magnetone di Bohr, m_F è il numero quantico magnetico dello stato iperfine e g_F è il fattore di Landé. La forza agente sugli atomi risulta essere

$$F(\vec{r}) = \nabla(\mu \cdot B(\vec{r})) = -\mu_B m_F g_F |\nabla B(\vec{r})|$$
(1.11)

e da questa equazione si deduce che gli stati atomici per i quali il prodotto $m_F g_F$ è positivo risentiranno di una forza diretta verso il minimo del campo esterno, mentre quelli per cui $m_F g_F$ è negativo saranno richiamati verso il massimo. Poiché, per il teorema di Wing, non è possibile avere un massimo isolato del campo nello spazio libero, solo gli stati con $m_F g_F > 0$ potranno essere intrappolati nel minimo locale del campo magnetico.

La configurazione più semplice di campo magnetico capace di intrappolare gli atomi è quella di quadrupolo e può essere generata da una coppia di bobine in configurazione anti-Helmholtz. Questo schema smette di funzionare a temperature estremamente basse perché la maggior parte degli atomi comincia a trovarsi molto vicina al minimo, in cui il campo è nullo, e in questa regione essi non sono più in grado di seguirlo adiabaticamente, ovvero la condizione (1.9) non è più rispettata. Diventa molto più probabile un processo di spin-flip, descritto da E. Majorana, che cambia lo stato e porta alla continua perdita di atomi dalla trappola. Per evitare questo problema, nel nostro esperimento viene usata una trappola più complessa, costruita secondo lo schema di Ioffe-Pritchard [25, 26] (fig. 1.1): essa è fatta da due bobine parallele percorse da corrente nello stesso verso, che producono un campo a forma di bottiglia per il confinamento longitudinale, e da quattro conduttori rettilinei con correnti in direzioni alternate che producono il campo per il confinamento trasversale.



Figura 1.1: Schema della trappola magnetica in configurazione Ioffe-Pritchard e sezione del campo magnetico all'interno di essa.

1.2.2 Trappola Dipolare, Melassa Ottica e Trappola Magneto-Ottica

L'interazione della luce laser con gli atomi dà origine a due forze diverse:

• La forza di pressione di radiazione è dovuta allo scattering fra i fotoni e gli atomi durante il quale i fotoni, venendo assorbiti, trasferiscono il loro impulso agli atomi. Così questi si trovano in uno stato eccitato dal quale decadono spontaneamente nel fondamentale con emissione di nuovi fotoni. Questa forza è dissipativa ed, essendo legata alle proprietà di assorbimento, è dominante alla risonanza fra la frequenza del campo e quella di transizione fra gli orbitali atomici.

• La forza di dipolo è generata dall'assorbimento e successiva emissione stimolata dei fotoni che provoca un'interazione dispersiva fra il gradiente di intensità del campo di luce ed il momento di dipolo atomico indotto dal campo stesso. Questa forza è dominante fuori dalla risonanza.

Essendo dissipativa, la forza di pressione di radiazione permette di trasferire energia dagli atomi al campo elettromagnetico, riducendo così la temperatura dei primi. É questa la forza che sta alla base delle tecniche di raffreddamento laser degli atomi. Questo metodo pone un limite intrinseco alla minima temperatura raggiungibile detta *temperatura di rinculo*: lo scambio di energia fra particelle e radiazione elettromagnetica avviene per quantità discrete e l'indeterminazione finale sulla velocità degli atomi non può essere inferiore a quella corrispondente al rinculo per emissione di singolo fotone:

$$E_r = \frac{1}{2}k_B T_r = \frac{1}{2m} \left(\frac{h\nu_L}{c}\right)^2$$

Inoltre il processo di emissione spontanea di fotoni è casuale, non varia l'impulso medio $\langle p \rangle$, ma aumenta l'indeterminazione nei valori dell'impulso $\langle p^2 \rangle$, pertanto si può dimostrare [28] che esiste un altro limite detto temperatura Doppler:

$$k_B T_D = \frac{h\Gamma}{2}$$

dove Γ è la larghezza naturale della transizione. La maggiore fra queste due temperature determina il limite inferiore raggiungibile usando questa interazione. La temperatura Doppler è generalmente molto più alta della temperatura di rinculo (nel Rb, di circa 3 ordini di grandezza) ed è il limite inferiore raggiungibile per atomi che possono essere ben descritti da un sistema a 2 livelli. Quando ci sono dei sottolivelli magnetici si instaurano dei meccanismi di raffreddamento sub-Doppler, come il raffreddamento Sisifo o il raffreddamento a gradiente di polarizzazione [28, 29]. Questi meccanismi sub Doppler sono quelli che si usano nella Melassa Ottica.

La forza di dipolo permette invece di intrappolare un campione atomico (avente temperatura già sufficientemente bassa) senza riscaldarlo né raffreddarlo perché è conservativa. Per ridurre al minimo il contributo dissipativo della forza di pressione di radiazione è necessario porsi lontano dalla risonanza. In questo modo la presenza della trappola di dipolo può incidere in modo marginale sulla dinamica atomica che si vuole osservare.

Trappola Dipolare

Seguendo una trattazione semiclassica come in [30] si possono trovare le espressioni per forze di pressione di radiazione e di dipolo considerando il campo elettromagnetico (EM) del laser come classico e l'atomo come un oscillatore a due livelli quantizzato. Il campo elettrico $\vec{E}(\vec{r}, \omega, t)$ induce in ogni atomo un momento di dipolo $\vec{p}(\vec{r}, t)$ oscillante alla sua stessa frequenza ω e proporzionale ad esso attraverso un coefficiente complesso α detto polarizzabilità atomica:

$$\vec{p} = \alpha(\omega)\vec{E} \tag{1.12}$$

La parte reale di α , a cui corrisponde la componente di \vec{p} in fase con il campo, descrive le proprietà dispersive dell'interazione, mentre la parte immaginaria, relativa alla componente di \vec{p} in opposizione di fase ad \vec{E} , risponde delle proprietà di assorbimento.

Il potenziale di dipolo risultante dall'interazione è proporzionale all'intensità $I(\vec{r})$ del fascio laser ed alla parte reale di α :

$$V_{dip} = -\frac{1}{2} \langle \vec{p} \cdot \vec{E} \rangle = -\frac{1}{2\epsilon_0 c} Re(\alpha) I(\vec{r})$$

$$(1.13)$$

Le parentesi <> significano che si sta eseguendo una media temporale su un numero elevato di oscillazioni ottiche. Come atteso la *forza di dipolo* è conservativa e proporzionale al gradiente del campo EM che la genera:

$$F_{dip}(\vec{r}) = -\nabla V_{dip} = \frac{1}{2\epsilon_0 c} Re(\alpha) \nabla I(\vec{r})$$
(1.14)

Questa forza scompare quando il campo è uniforme e diventa sempre più intensa al crescere della disomogeneità .

La potenza assorbita dagli atomi durante l'interazione risulta essere:

$$P_{abs} = \langle \vec{p} \cdot \vec{E} \rangle = \frac{\omega}{\epsilon_0 c} Im(\alpha) I(\vec{r})$$
(1.15)

Interpretandola come risultato dello scattering con i fotoni di energia $\hbar\omega$, si può definire una quantità detta *rate di scattering medio* che rappresenta il contributo della forza di pressione di radiazione, poiché esprime il numero medio di fotoni che vengono diffusi dall'atomo per unità di tempo attraverso cicli di assorbimento ed emissione spontanea:

$$\Gamma_{sc} = \frac{P_{abs}}{\hbar\omega} = \frac{1}{\hbar\epsilon_0 c} Im(\alpha) I(\vec{r})$$
(1.16)

È possibile calcolare esplicitamente la polarizzabilità considerando l'atomo come un sistema quantistico a due livelli separati da una energia $\hbar\omega_0$. L'elettrone è inizialmente nel livello energetico fondamentale e l'interazione con il campo EM lo può eccitare provocando la transizione al livello eccitato. Da qui decadrà spontaneamente al fondamentale con probabilità determinata dall'elemento di matrice fra i due stati dell'operatore di dipolo elettrico $\hat{\mu} = -e\vec{r}$:

$$\Gamma = \frac{\omega_0^3}{3\pi\epsilon_0 \hbar c^3} |\langle e|\hat{\mu}|g\rangle|^2 \tag{1.17}$$

Affinchè il livello eccitato non sia molto popolato deve essere $\Gamma \gg \Gamma_{sc}$. Per avere una buona trappola dipolare è stato già anticipato che è necessario che la forza di dipolo sia dominante rispetto alla forza di pressione di radiazione, pertanto si dovrà scegliere la frequenza ω del campo molto lontana dalla frequenza di transizione elettronica ω_0 propria della specie atomica usata. Questa situazione si chiama di "far detuning" perché il detuning $\Delta = \omega - \omega_0$ è molto maggiore della larghezza della riga Γ e della frequenza di Rabi $\Omega = E(\vec{r}, \omega, t) \langle e | \hat{d} \cdot \hat{\mu} | g \rangle / \hbar$. In queste condizioni α risulta essere:

$$\alpha = 6\pi\epsilon_0 c^3 \frac{\Gamma/\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i(\omega^3/\omega_0^2)\Gamma}$$
(1.18)

Sostituendo la (1.18) nella (1.13) e nella (1.16) e trascurando il contributo del termine contro-rotante che provoca la risonanza per $\omega = -\omega_0$ si trovano il potenziale di dipolo ed il rate di scattering cercati:

$$V_{dip} = \frac{3\pi c^2}{2\omega_0^3} \left(\frac{\Gamma}{\Delta}\right) I(\vec{r}) \tag{1.19}$$

$$\Gamma_{sc} = \frac{3\pi c^2}{2\hbar\omega_0^3} \left(\frac{\Gamma}{\Delta}\right)^2 I(\vec{r}) \tag{1.20}$$

Nel Rubidio e nel Potassio la struttura delle transizioni elettroniche è molto più complessa del modello a due livelli e l'elemento di matrice di dipolo Γ dipende dagli stati iniziali e finali considerati, pertanto la polarizzabilità atomica è dipendente dallo stato. Alternativamente, come in [31], si può considerare che sia il potenziale dello stato fondamentale a dipendere dai livelli considerati. In questo caso, come in [30], si può trattare l'interazione della luce laser con gli atomi come una perturbazione del secondo ordine in E indipendente dal tempo. L'Hamiltoniana della perturbazione è $H_1 = -\hat{\mu} \cdot \vec{E}$ e sposta il livello i-esimo di energia imperturbata ε_i :

$$\Delta E_i = \sum_{j \neq i} \frac{|\langle j | H_1 | i \rangle|^2}{\varepsilon_i - \varepsilon_j} \tag{1.21}$$

Nello stato fondamentale l'atomo si considera avere energia interna nulla, mentre quella del campo EM è $n\hbar\omega$ con n numero di fotoni. Eccitandosi l'atomo assorbe un fotone e acquista un'energia pari a $\hbar\omega_0$, mentre il campo perde un fotone. Segue immediatamente che $\varepsilon_i - \varepsilon_j = \hbar\Delta_{ij}$. L'operatore $\hat{\mu}$ si può separare in un coefficiente di transizione reale dipendente dagli stati ed in un elemento di matrice ridotto $\mu_{ij} = \langle e_j | \hat{\mu} | g_i \rangle = c_{ij} \| \mu \|$. Sostituendo la (1.17) ed $|E|^2 = I/(2 \epsilon_0 c)$ nella (1.21) si ottiene:

$$\Delta E_i = \frac{3\pi c^2 \Gamma}{2\omega_0^3} I(\vec{r}) \times \sum_j \frac{c_{ij}^2}{\Delta_{ij}}$$
(1.22)

Questo vuol dire che lo spostamento del livello fondamentale a causa dell'interazione è pari al potenziale di dipolo V_{dip} calcolato sommando il contributo di tutti i livelli eccitati.

Per gli atomi alcalini si può trovare un risultato generale per il potenziale dello stato fondamentale con momento angolare totale F e numero quantico magnetico m_F valido sia per polarizzazioni lineari che circolari. Nell'approssimazione che il detuning Δ sia grande rispetto allo splitting iperfine degli stati eccitati Δ'_{HFS} , ma non rispetto allo splitting iperfine del fondamentale Δ_{HFS} , né allo splitting fine dovuto all'interazione spin-orbita degli stati eccitati Δ'_{FS} , si ottiene che il potenziale è:

$$V_{alc}(\vec{r}) = \frac{\pi c^2 \Gamma}{2} \left(\frac{2 + \rho g_F m_F}{\Delta_{2,F} \omega_2^3} + \frac{1 - \rho g_F m_F}{\Delta_{1,F} \omega_1^3} \right) I(\vec{r})$$
(1.23)

mentre il rate di scattering di fotoni diventa:

$$\Gamma_{sc}(\vec{r}) = \frac{\pi c^2 \Gamma}{2\hbar} \left(\frac{2 + \rho g_F m_F}{\Delta_{2,F}^2 \omega_2^3} + \frac{1 - \rho g_F m_F}{\Delta_{1,F}^2 \omega_1^3} \right) I(\vec{r})$$
(1.24)

Qui g_F è il fattore di Landé e $\rho = -1, 0, 1$ quando la polarizzazione del laser è rispettivamente σ^-, π, σ^+ , mentre i due Δ sono i detuning rispetto alle righe D_1 e D_2 degli alcalini $({}^2S_{\frac{1}{2}} \rightarrow {}^2P_{\frac{1}{2}}, {}^2P_{\frac{3}{2}})$. Per motivi di simmetria la polarizzazione lineare sposta tutti gli stati m_F della stessa quantità e questo è vantaggioso dal punto di vista sperimentale. La polarizzazione ellittica invece agisce differentemente su ogni stato poiché lo spostamento dipende da m_F .

Dall'equazione (1.23) si vede che il segno del detuning discrimina se le interazioni siano attrattive o repulsive: per un detuning verso il rosso ($\Delta < 0$) ad un massimo di intensità corrisponde un minimo di potenziale e gli atomi saranno attratti verso il centro del profilo di intensità, mentre per un detuning verso il blu ($\Delta > 0$) si ha la situazione inversa e gli atomi verranno respinti dal massimo del fascio laser. Le equazioni (1.23) e (1.24) mostrano inoltre come, allontanandosi dalla risonanza, il contributo dissipativo diventi trascurabile perché decresce con $1/\Delta^2$, mentre il potenziale di dipolo diminuisce più lentamente, come $1/\Delta$. Pertanto il rapporto di queste due quantità suggerisce che la configurazione ottimale per avere una buona trappola di dipolo, dove sia dominante la forza di dipolo e sia soppresso il più possibile lo scattering spontaneo di fotoni, sia quella ottenuta usando un detuning sufficientemente grande verso il rosso ed un'intensità della radiazione laser tali da avere $\Delta \gg \Gamma, \Omega$ e da mantenere contemporaneamente costante il rapporto I/Δ .

Se l'intensità del fascio laser ha forma gaussiana (come in fig. 1.2a) è facile vedere che esso produce una trappola di dipolo con simmetria cilindrica. Al centro di essa gli atomi saranno soggetti ad un potenziale armonico con frequenza angolare longitudinale $\omega_l = \sqrt{2V_{alc}(0)/mR^2}$ e frequenza angolare trasversa $\omega_r = \sqrt{4V_{alc}(0)/mw_0^2}$ dove w_0 è il waist del fascio ed $R = \pi w_0^2/\lambda$ la lunghezza di Rayleigh.



Figura 1.2: Immagine a): schema della trappola dipolare a singolo fascio; Immagine b): trappola dipolare a due fasci ortogonali; Immagine c): reticolo ottico. Immagini adattate da [32].

Melassa Ottica e Trappola Magneto-Ottica

Nel paragrafo precedente si è trovato che un fascio laser, se ha un detuning ed una potenza opportuni, può esercitare una forza dissipativa sugli atomi. Se ne venisse usato uno solo si otterrebbe solo di spingerli nel suo verso, mentre usando una coppia di fasci laser contropropaganti si può raffreddare e contemporaneamente confinare un gas di atomi. Infatti, se un atomo si muove verso destra, a causa dell'effetto Doppler, vede la frequenza del fascio di destra più vicina alla risonanza di quella del fascio proveniente da sinistra e viceversa. Pertanto assorbirà fotoni preferenzialmente dal fascio che ha verso opposto a quello del suo moto e subirà un rallentamento, per via del rinculo dovuto al trasferimento di impulso. La forza risultante è di tipo viscoso e questo ha suggerito di chiamare questo schema *Melassa Ottica*.

L'intrappolamento in una Melassa Ottica non è efficiente, in quanto la forza è dipendente dalla velocità, ma non dalla posizione, pertanto gli atomi hanno sempre una via di fuga. Questo avviene perché per le trappole ottiche vi è un requisito fondamentale necessario per ottenere l'intrappolamento degli atomi: Il teorema ottico di Earnshaw [27] dimostra che per avere una forza di richiamo verso un punto si deve avere che la divergenza della forza in quel punto sia diversa da zero. Per questo motivo una trappola puramente ottica generata sola dalla forza di pressione di radiazione (che dipende linearmente dall'intensità del laser) per funzionare necessità dell'aggiunta di un campo magnetico disomogeneo che rompa l'invarianza per traslazione. Questa configurazione viene chiamata trappola Magneto-Ottica (MOT). La trappola dipolare invece, basandosi sulla forza dipolare dipendente dal gradiente dell'intensità della radiazione, soddisfa automaticamente a questo requisito.



Figura 1.3: Schema di una trappola magneto-ottica unidimensionale.

Una MOT, mostrata in fig. 1.3, è realizzata da una o più coppie di fasci laser contropropaganti con polarizzazioni circolari opposte e da due bobine in configurazione anti-Helmholtz che generano un campo nullo al centro e crescente allontanandosi. Questo campo magnetico induce uno spostamento Zeeman dell'energia dei livelli (consideriamo per semplicità un atomo a soli due livelli con F = 0 ed F' = 1):

$$\Delta E_{Zeeman}(z) = \mu_B m_F g_F B(z) \tag{1.25}$$

Vicino al centro della trappola il campo magnetico di quadrupolo è lineare B = bze provoca una separazione dei sottolivelli magnetici $m_F = -1, 0, 1$: per z > 0 $E(|F' = 1, m_F = 1\rangle) > E(|F' = 1, m_F = -1\rangle)$ e viceversa per z < 0. Usando fasci laser con detuning verso il rosso rispetto alla frequenza di risonanza della transizione per B = 0 si ha che un atomo che si trova a destra del centro della trappola, a causa dell'effetto Zeeman, avrà come favorita la transizione $|F = 0, m_F = 0\rangle \rightarrow |F' = 1, m_F = -1\rangle$ e quindi interagirà di più con i fotoni provenienti dal fascio polarizzato σ^- , se si trova a sinistra accadrà la situazione opposta. In entrambi i casi la forza di pressione di radiazione spingerà l'atomo verso il centro della trappola.

Questo processo ha un effetto confinante perché la variazione del campo magnetico rompe l'invarianza per traslazione lungo la direzione dei fasci laser, esercitando così una forza di richiamo, ed ha un effetto di raffreddamento perché i fasci laser si comportano da Melassa Ottica ed esercitano una forza approssimativamente di tipo viscoso. A differenza della Melassa, bisogna includere nel detuning non solo lo spostamento Doppler dovuto al moto degli atomi, ma anche lo spostamento Zeeman dei livelli indotto dal campo magnetico.

1.2.3 Reticolo Ottico

Ad una trappola magnetica o di dipolo si può sovrapporre un altro potenziale confinante caratterizzato da una struttura periodica e stazionaria che per queste proprietà viene chiamato *reticolo ottico*. Esso è prodotto da un'onda EM stazionaria di periodo $\lambda/2$ creata dall'interferenza di due fasci laser contropropaganti di ugual frequenza e lunghezza d'onda λ ed con fase relativa fissata (vedi fig. 1.2c).

Intrappolare un campione atomico in un reticolo ottico è molto interessante perché permette di instaurare un collegamento diretto fra la fisica atomica e la fisica dello stato solido, in quanto, se in un reticolo cristallino sono gli ioni del cristallo a generare il potenziale ed è un gas di elettroni a muoversi al suo interno, qui è la luce coerente a produrre il potenziale entro il quale si possono muovere gli atomi. Risulta così possibile costruire un modello del comportamento atomico basato sui risultati della teoria di Bloch [33] e verificarne alcune predizioni come la teoria delle bande e le oscillazioni di Bloch [34]. É interessante notare che è risultato impossibile osservare quest'ultimo fenomeno in un reticolo cristallino per via delle imperfezioni (dislocazioni, impurezze, ecc...) che vi sono sempre presenti, mentre un reticolo ottico ne è privo.

Per ricavare l'espressione di questo potenziale consideriamo due onde piane di ugual frequenza ω , viaggianti in verso opposto lungo la direzione \vec{k} ed aventi entrambe polarizzazione lineare lungo \hat{d} :

$$\vec{E}_1(\vec{r},t) = \hat{d}E_1\cos(\vec{k}\cdot\vec{r}+\omega t+\delta) \tag{1.26}$$

$$\vec{E}_2(\vec{r},t) = \hat{d}E_2\cos(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t-\delta)$$
(1.27)

L'intensità istantanea è data dal modulo quadro del campo complessivo:

$$I(\vec{r},t) = \epsilon_0 c |\vec{E_1}(\vec{r},t) + \vec{E_2}(\vec{r},t)|^2$$
(1.28)

Segue che l'intensità media è:

$$I(\vec{r}) = \epsilon_0 c_{\frac{1}{2}} [(E_1 - E_2)^2 + 4E_1 E_2 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r})]$$
(1.29)

che per $E_1 = E_2 = E_0$ è pari a $I(\vec{r}) = I_0 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r})$ con $I_0 = 2\epsilon_0 c E_0^2$ massimo dell'intensità. Sostituendo questo risultato nell'equazione (1.23) e considerando di usare una radiazione con detuning verso il rosso, si ottiene la seguente forma per il potenziale di dipolo:

$$V_{latt}(\vec{r}) = sE_r \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r}) \tag{1.30}$$

16

espressa in funzione dell'energia di rinculo $E_r = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m}$ e del parametro adimensionale s che definisce l'altezza del potenziale:

$$s = \frac{\pi c^2 \Gamma}{2E_r} \left(\frac{2 + \rho g_F m_F}{\Delta_{2,F} \omega_2^3} + \frac{1 - \rho g_F m_F}{\Delta_{1,F} \omega_1^3} \right) I_0$$
(1.31)

Il modo più comune per creare un reticolo unidimensionale è di retroriflettere un fascio gaussiano. Se w_0 è il minimo del waist, allora il potenziale complessivo che agisce sugli atomi è dato dal prodotto del potenziale periodico e di un termine di confinamento radiale dovuto al profilo Gaussiano dei fasci:

$$V_{latt} = sE_r e^{-\frac{2r^2}{w_0^2}} \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r}) \simeq sE_r (1 - 2r^2/w_0^2) \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r})$$
(1.32)

La frequenza di confinamento radiale è $\propto \sqrt{sE_r}/w_0$, mentre la frequenza di confinamento assiale è $\propto \sqrt{sE_r} \cdot k$, quindi se $kw_0 \gg 1$ allora la frequenza assiale è molto maggiore della frequenza radiale e questo permette di approssimare il potenziale di confinamento assiale degli atomi in un singolo sito reticolare con un potenziale armonico. In tal caso risulta semplice esprimere la frequenza di intrappolamento nel singolo sito in funzione dei parametri del reticolo:

$$\omega_{latt} \approx 2 \frac{E_r}{\hbar} \sqrt{s} \tag{1.33}$$

Per creare un reticolo cubico in tre dimensioni bisogna impiegare tre fasci laser retroriflessi ed ortogonali fra loro. Per evitare il più possibile effetti di interferenza, i tre fasci devono avere polarizzazioni mutualmente ortogonali ed avere una piccola differenza in frequenza. Usando l'equazione (1.32) del caso unidimensionale, il potenziale reticolare assume la forma:

$$V_R(\vec{r}) = \sum_{\alpha=1}^3 s_\alpha E_{r\alpha} e^{-\frac{2r_\alpha^2}{w_{0\alpha}^2}} \cos^2(k_\alpha r_\alpha) \text{ con } k_\alpha = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_\alpha} = \frac{\pi}{a_\alpha}$$
(1.34)

dove a_{α} è il vettore reticolare che determina la spaziatura della struttura nella direzione α , detto anche passo reticolare.

1.3 Modello di Bose-Hubbard a singola specie

Nel paragrafo precedente è stata evidenziata la connessione che esiste fra un reticolo ottico ed un reticolo cristallino e questa analogia permette la trattazione del moto degli atomi nel potenziale generato dal laser con lo stesso formalismo usato per descrivere il moto degli elettroni in un cristallo, ovvero mediante la teoria di Bloch. Nell'ambito di questa teoria è stato sviluppato un modello approssimato detto *Modello di Hubbard* [35] molto utile per descrivere le interazioni fra gli elettroni immersi nel potenziale ionico. Questo modello è stato successivamente esteso per descrivere anche particelle bosoniche ed ha assunto il nome di *Modello di Bose-Hubbard* [36] e può essere applicato con successo per la descrizione di un gas di atomi ultrafreddi intrappolati in un reticolo ottico. Come mai risulta interessante lo studio di questa situazione fisica, proposta per la prima volta in [11]? La ragione principale è che sperimentalmente si può regolare l'intensità dei fasci laser che generano il reticolo, modificandone quindi l'ampiezza e quest'ultima ha un ruolo importante nel determinare le costanti di accoppiamento che appaiono nel modello di Bose-Hubbard. Pertanto diventa facile studiare il sistema al variare dei suoi parametri e verificare le predizioni teoriche.

1.3.1 Il Modello

Una derivazione completa della teoria può essere trovata in [22], mentre qui saranno illustrati i passaggi fondamentali. Il punto di partenza è l'Hamiltoniana che descrive il comportamento di una singola specie atomica intrappolata nel reticolo ottico, a sua volta immerso in un potenziale di confinamento. Essa deve includere un termine cinetico, un termine dovuto alla presenza del potenziale reticolare e del potenziale di trappola e di un termine che tenga conto dell'interazione fra gli atomi. Pertanto, nell'ambito del formalismo della seconda quantizzazione, l'Hamiltoniana del sistema avrà la seguente forma canonica:

$$\hat{H} = \int \hat{\Psi}(\vec{r})^{\dagger} (\frac{\vec{p}^2}{2m} + V_{latt}(\vec{r}) + V_{trap}(\vec{r})) \hat{\Psi}(\vec{r}) d\vec{r} + \frac{1}{2} \int \hat{\Psi}^{\dagger}(\vec{r}) \hat{\Psi}^{\dagger}(\vec{r}') U(\vec{r} - \vec{r}') \hat{\Psi}(\vec{r}') \hat{\Psi}(\vec{r}') d\vec{r} d\vec{r} d\vec{r}$$
(1.35)

dove $U(\vec{r} - \vec{r'})$ è il potenziale di interazione fra due atomi vicini e per un gas diluito, ovvero quando il raggio d'interazione è molto piccolo rispetto alla distanza interatomica media, può essere approssimato con un potenziale di interazione locale:

$$U(\vec{r} - \vec{r'}) = U_0 \delta(\vec{r} - \vec{r'}) = \frac{4\pi a_s \hbar^2}{m} \delta(\vec{r} - \vec{r'})$$
(1.36)

L'interazione collisionale fra gli atomi risulta così essere espressa in maniera approssimata attraverso uno pseudopotenziale a corto raggio, dove a_s è la *lunghezza* di scattering in onda s ed m è la massa dell'atomo. L'isotropia di questo pseudopotenziale di contatto è dovuta alla bassa temperatura, che consente di trascurare i termini di scattering in onda superiore (p, d,..).

A questo punto possiamo sfruttare la teoria di Bloch per descrivere il sistema: limitando il quasimomento \vec{k} alla prima zona di Brillouin ($\mathfrak{B} : -\frac{\pi}{a_{\alpha}} \leq k_{\alpha} \leq \frac{\pi}{a_{\alpha}}$) possiamo sviluppare la Ψ o sulla base delle funzioni di Bloch:

$$\phi_{n,k}(\vec{r}) = u_{n,k}(\vec{r})e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \text{ con } u_{n,k}(\vec{r}+\vec{a}) = u_{n,k}(\vec{r})$$
(1.37)

o sulla base delle funzioni di Wannier che sono collegate a quelle di Bloch mediante una trasformata di Fourier:

$$w_{n,j}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{N_{latt}}} \sum_{k} \phi_{n,k}(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{a}_{j}}$$
(1.38)

dove N_{latt} è il numero di siti reticolari. Le funzioni di Wannier sono definite a meno di un fattore di fase che può essere sempre scelto opportunamente per renderle reali e ben localizzate. Proprio per la proprietà di poter essere ben localizzate quest'ultime si adattano meglio a descrivere la situazione degli atomi in un reticolo sufficientemente profondo, pertanto l'operatore di campo viene espanso sulla base delle funzioni di Wannier:

$$\hat{\Psi}(r) = \sum_{n,j} \hat{c}_{nj} w_n (\vec{r} - \vec{a}_j)$$
(1.39)

Sostituendo nell'Hamiltoniana la (1.39) si ottengono i seguenti elementi di matrice:

• il termine di interazione sul singolo sito dovuto al potenziale esterno di intrappolamento:

$$\epsilon_i^{mn} \equiv \int w_m^*(\vec{r} - \vec{a}_i) V_{trap}(\vec{r}) w_n(\vec{r} - \vec{a}_i) d\vec{r} \quad \text{con} \quad i = j \tag{1.40}$$

• il termine di tunneling, che descrive la probabilità di passaggio di un atomo da un sito all'altro:

$$J_{ij}^{mn} \equiv -\int w_m^*(\vec{r} - \vec{a}_i) \left(\frac{\vec{p}^2}{2m} + V_{latt}(\vec{r})\right) w_n(\vec{r} - \vec{a}_j) d\vec{r} \quad \text{con} \quad i \neq j \quad (1.41)$$

• il termine di interazione fra gli atomi:

$$U_{j_1,j_2,j_3,j_4}^{n_1,n_2,n_3,n_4} \equiv U_0 \int w_{n_1}^* (\vec{r} - \vec{a}_{j_1}) w_{n_2}^* (\vec{r} - \vec{a}_{j_2}) w_{n_3} (\vec{r} - \vec{a}_{j_3}) w_{n_4} (\vec{r} - \vec{a}_{j_4}) d\vec{r} \quad (1.42)$$

Supponendo di trovarsi a temperature tali che il contributo maggiore venga dalla banda energetica fondamentale, si può usare l'approssimazione di banda singola e quindi gli indici di banda verranno omessi. Inoltre, considerando le funzioni di Wannier ben localizzate sui singoli siti, per il termine di tunneling si può eseguire la somma solo sui siti vicini, mentre per il termine in U, poiché si hanno interazioni a corto raggio, si può calcolare solo il contributo dell'interazione sul sito. Queste assunzioni, insieme alla regolarità del reticolo, fanno diventare questi due elementi di matrice delle costanti indipendenti dal sito, mentre il termine in ϵ , dipendendo dal potenziale esterno lentamente variabile sulla scala di un sito reticolare, rimane dipendente dal sito e non permette una completa simmetria traslazionale. Usando tutte queste approssimazioni si ottiene l'Hamiltoniana del modello di Bose-Hubbard per un sistema disomogeneo:

$$\hat{H} = -J \sum_{\langle ij \rangle} \hat{c}_i^{\dagger} \hat{c}_j + \sum_j \epsilon_j \hat{c}_j^{\dagger} \hat{c}_j + \frac{U}{2} \sum_j \hat{c}_j^{\dagger} \hat{c}_j^{\dagger} \hat{c}_j \hat{c}_j \hat{c}_j$$
(1.43)

che può essere riscritta in una forma più chiara usando l'operatore numero $\hat{n}_i = \hat{c}_i^{\dagger} \hat{c}_i$, il cui autostato dà il numero di particelle nel sito i-esimo:

$$\hat{H} = -J \sum_{\langle ij \rangle} \hat{c}_i^{\dagger} \hat{c}_j + \sum_j \epsilon_j \hat{n}_j + \frac{U}{2} \sum_j \hat{n}_j (\hat{n}_j - 1)$$
(1.44)

É utile riscrivere gli elementi di matrice poiché dopo le approssimazioni fatte hanno una forma più semplice:

• il termine ϵ_i rappresenta lo spostamento di energia nel sito i-esimo indotto dal potenziale di trappola:

$$\epsilon_i = \int |w(\vec{r} - \vec{a}_i)|^2 V_{trap}(\vec{r}) d\vec{r} \quad \text{con} \quad i = j \tag{1.45}$$

• il termine di tunneling descrive la probabilità di passaggio di un atomo da un sito ad un suo primo vicino:

$$J = -\int w^*(\vec{r} - \vec{a}_i) \left(\frac{\vec{p}^2}{2m} + V_{latt}(\vec{r})\right) w(\vec{r} - \vec{a}_j) d\vec{r} \quad \text{con} \quad i = j \pm 1 \quad (1.46)$$

• il termine di interazione sul sito è legato alle interazioni intraspecie che per il ⁸⁷Rb sono repulsive, quindi si ha $a_s > 0$ e di conseguenza U > 0:

$$U = \frac{4\pi a_s \hbar^2}{m} \int |w(\vec{r} - \vec{a}_i)|^4 d\vec{r}$$
 (1.47)

La figura 1.4 permette di comprendere intuitivamente l'effetto del termine di tunneling e di quello di interazione ed è utile evidenziare la loro dipendenza dai parametri sperimentali del reticolo ottico. Approssimando la funzione di Wannier con una funzione d'onda gaussiana centrata su un singolo sito reticolare (situazione valida per $s \gg 1$), nel caso di reticolo tridimensionale si ottiene [37]:

$$J \simeq \frac{4}{\sqrt{\pi}} E_r s^{3/4} e^{-2\sqrt{s}}$$
(1.48)

$$U \simeq 4 \frac{\sqrt{2\pi}}{\lambda_{latt}} a E_r s^{3/4} \tag{1.49}$$



Figura 1.4: Esempio del comportamento degli atomi in un reticolo ottico. Sono indicati gli effetti del termine di tunneling e del termine di interazione.

1.3.2 Stato Superfluido e Stato Isolante di Mott

Lo stato fondamentale dell'Hamiltoniana (1.44) ammette due stati fondamentali distinti in quanto dipende dal rapporto fra le scale di energia del sistema, ovvero da U/J, e pertanto presenta due fasi diverse fra loro.

Quanto l'energia di interazione è molto più piccola dell'energia di tunneling $U \ll J$ le particelle sono libere di muoversi fra i siti reticolari e si comportano in modo superfluido, ben descritto dalle funzioni d'onda di Bloch che sono de-localizzate. La funzione d'onda che descrive lo *Stato Superfluido* di N particelle distribuite su N_{latt} siti è:

$$|\Psi_{SF}\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{N_{latt}}} \sum_{j}^{N_{latt}} \hat{c}_{j}^{\dagger}\right)^{N} |0\rangle \qquad (1.50)$$

Questo stato è caratterizzato da molte proprietà: è coerente su distanze macroscopiche in quanto ogni particella è molto delocalizzata, la fase è costante su tutto il reticolo e, pertanto, il numero di atomi che occupano un singolo sito reticolare risulta essere massimamente indeterminato per via della relazione $\Delta n \Delta \phi \geq 1$ ed, infine, segue una distribuzione Poissoniana. Questi effetti portano all'insorgere di picchi di interferenza (vedi fig. 1.5a) durante l'espansione per un tempo t di un condensato rilasciato dal reticolo, posti ad una distanza legata al passo reticolare $x = \frac{ht}{ma}$.

Quando l'energia di interazione U cresce o, alternativamente, l'energia di tunneling decresce, il sistema tende a confinare sempre più gli atomi in ogni sito reticolare, in quanto il passaggio da un sito ad un altro già popolato richiede sempre più energia. Il sistema inizia a comportarsi come un isolante, piuttosto che un superfluido, e nel limite $U \gg J$ si raggiunge lo *Stato Isolante di Mott*, chiamato così per analogia con un effetto simile che si verifica nella fisica dei conduttori [38]. In questo stato tutte le funzioni d'onda sono localizzate sui siti reticolari, in modo da minimizzare l'energia di interazione, così la popolazione di ogni sito è esattamente determinata, mentre la fase è completamente indefinita. Si ha una completa perdita della coerenza di fase ed i picchi di interferenza scompaiono (vedi fig. 1.5b). La funzione d'onda dello stato fondamentale è data dal prodotto di stati di Fock locali con $\bar{n} = N/N_{latt}$ atomi per sito:

$$|\Psi_{MI}\rangle \propto \prod_{j} \left(\hat{c}_{j}^{\dagger}\right)^{\bar{n}} |0\rangle_{j}$$
 (1.51)

Altre due importanti proprietà di questo stato sono che è presente un gap di larghezza pari ad U nello spettro di eccitazione e che la compressibilità del sistema $\partial \bar{n}/\partial \mu$ è nulla, al contrario di quello che avviene nello stato superfluido.



Figura 1.5: Differenza nella distribuzione di impulso fra stato Superfluido (a) e stato Isolante di Mott (b). Immagine adattata da [39].

1.3.3 Transizione di Fase Superfluido-Mott

Come evidenziato nel paragrafo precedente, il modello di Bose-Hubbard predice una transizione di fase dallo stato Superfluido allo stato Isolante di Mott quando il valore di U/J aumenta. Questa transizione avviene quando $U \simeq J$ e, sfruttando le espressioni approssimate di J (1.48) e di U (1.49), è possibile stimare in quali condizioni questo si verifichi:

$$\frac{U}{J} \simeq \frac{\sqrt{2\pi}}{\lambda_{latt}} a e^{2\sqrt{s}} \quad \to \quad 1 \simeq \left(\frac{U}{J}\right)_c \simeq \frac{\sqrt{2\pi}}{\lambda_{latt}} a e^{2\sqrt{s_c}} \tag{1.52}$$

Da questa relazione è evidente come si possa controllare la fisica del sistema ed indagare questa transizione, poiché è sufficiente controllare l'ampiezza s del reticolo ottico per cambiare il rapporto U/J. Questa formula approssimata dà

come valori critici $s_c = 3.6$ per il ⁸⁷Rb e s = 4.7 per il ⁴¹K se si usa un laser a $\lambda = 1064$ nm per generare un reticolo tridimensionale. Un calcolo più accurato in una teoria di campo medio [40, 41] dà $(U/J)_c = 5.8z$ (con z numero di siti primi vicini) se $\bar{n} = 1$ e $(U/J)_c = 4.2z$ se $\bar{n} \gg 1$.

Questa transizione è stata per la prima volta osservata sperimentalmente nel 2002 dal gruppo di Greiner et al. [39] ed in fig. 1.6 è mostrata come cambia la distribuzione di impulso di una BEC dopo l'espansione da un reticolo ottico al variare di s. La tecnica con cui è stato svolto questo studio sarà illustrata nel § 4.3.



Figura 1.6: Transizione Superfluido-Isolante di Mott. É mostrato come cambia la distribuzione di impulso di una BEC dopo l'espansione da un reticolo ottico al variare di s. Per s > 12.5 si perde la coerenza a lungo raggio ed i picchi d'interferenza si allargano fino a scomparire, al raggiungimento di uno stato isolante di Mott profondo (s = 22.5). Immagini ottenute al LENS di Firenze (2005).

In fig. 1.7 è mostrato un diagramma di fase del modello di Bose-Hubbard, dove la densità del campione μ/U è espressa in funzione del rapporto U/J. Come possiamo vedere vi sono lobi differenti, corrispondenti ognuno ad un dato numero di atomi per sito \bar{n} . Se $\langle \hat{n} \rangle$ è intero e viene variato s il sistema si evolve seguendo le linee orizzontali tratteggiate, se $\langle \hat{n} \rangle$ non è esattamente intero allora una parte degli atomi segue le linee curve e porta alla presenza di una frazione superfluida per qualunque s.

Nel caso di un sistema reale in cui è presente, oltre al reticolo ottico, un potenziale di trappola, non vi è più una distribuzione uniforme di atomi su tutto il reticolo, ma vi sarà una densità maggiore al centro per via del termine ϵ_j che incrementa l'energia richiesta per trovarsi alle estremità. Il potenziale chimico sarà pertanto dipendente dalla posizione ($\mu \rightarrow \mu(\vec{r}) - \epsilon_j$), avrà il valore massimo al centro e decrescerà allontanandosene. Se il potenziale di intrappolamento varia lentamente sulla scala della distanza reticolare, è possibile applicare l'approssimazione di densità locale: in ogni sito si può considerare che il sistema si comporti come nel caso omogeneo, ma con un potenziale chimico dipendente dalla posizione. La conseguenza fisica più importante della disomogeneità è che il campione atomico intrappolato nel reticolo non presenterà più una fase sola, ma sarà diviso in domini concentrici di fasi di Isolante di Mott con \bar{n} via via decrescente, alternati a fasi Superfluide. Questa situazione corrisponde nel diagramma di fase ad una sezione verticale ad *s* fissato ed una possibile successione di stati è mostrata sulla destra della fig. 1.7. Una variazione di *s* porterebbe ad un aumento o ad una riduzione dell'estensione dei domini superfluidi.



Figura 1.7: Diagramma di Fase del Modello di Bose-Hubbard omogeneo. Immagine adattata da [42].

1.4 Modello di Bose-Hubbard a doppia specie

Il modello presentato nel § 1.3 per una singola specie atomica intrappolata in un reticolo può essere facilmente esteso al caso di un sistema in cui sono presenti due specie atomiche. Nel formalismo matematico questo semplicemente comporta l'introduzione di una somma su un indice aggiuntivo $\vartheta = (1, 2)$, ma a livello fisico il quadro si complica poiché compare una forza di interazione a corto raggio U'fra le due specie che per il ⁸⁷Rb ed il ⁴¹K è repulsiva, quindi si ha $a'_s > 0$ e di conseguenza U' > 0. Usando gli operatori bosonici di creazione e distruzione $\hat{c}_{i\vartheta}$ definiti nello spazio di Fock, l'Hamiltoniana del modello di Bose-Hubbard (1.44) diventa:

$$\hat{H} = \left[\sum_{\langle ij \rangle,\vartheta} (-J_{\vartheta}\hat{c}_{i\vartheta}^{\dagger}\hat{c}_{j\vartheta} + h.c.) - \sum_{i,\vartheta} (\mu(\vec{r}) - \epsilon_{i\vartheta})\hat{n}_{i\vartheta}\right] + \frac{U}{2}\sum_{i,\vartheta} \hat{n}_{i\vartheta}(\hat{n}_{i\vartheta} - 1) + U'\sum_{i} \hat{n}_{i1}\hat{n}_{i2}$$
(1.53)

 $\operatorname{con}\,\hat{n}_{i\vartheta}=\hat{c}_{i\vartheta}^{\dagger}\hat{c}_{i\vartheta}.$

Anche in questo caso il modello ammette uno stato Superfluido ed uno stato di Isolante di Mott, ma gli stati fondamentali possibili non sono più solo due. Il diagramma di fase diventa molto più complicato perché si possono avere molte combinazioni di questi due stati: entrambe le specie superfluide, entrambe isolanti, una delle due superfluida e l'altra isolante. Inoltre all'interno dello stato Isolante di Mott si possono formare degli ordinamenti complessi dovuti al fatto che le due specie sono distinguibili: è stata prevista la possibilità di un ordinamento delle particelle analogo a quello che avviene nel magnetismo, ovvero una disposizione di tipo ferromagnetico o antiferromagnetico. Infine non è neanche detto che i due gas atomici siano mischiati fra loro, se l'interazione interspecie è repulsiva, essi possono cercare di disporsi in parti opposte del reticolo per minimizzare o eliminare l'area di contatto, portando così all'insorgere di una separazione di fase. Nell'analogia con il magnetismo la separazione di fase corrisponde allo stato ferromagnetico. Ulteriori dettagli possono essere trovati nei seguenti lavori teorici: [43, 44, 45, 46, 47, 48].

Lo studio di un sistema con due specie atomiche intrappolate in un reticolo ottico diventa pertanto molto interessante, sia per cercare di esplorare tutti i nuovi stati predetti da questo ricco diagramma di fase, sia per studiare come vengono modificati i risultati già noti del modello di Bose-Hubbard a singola specie dalla presenza della seconda specie, sia per tante altre applicazioni. In particolare, sfruttando l'apparato sperimentale usato per svolgere questo lavoro di tesi, è stata studiata la transizione di fase Superfluido-Isolante di Mott in presenza di Rb e K con interazioni interspecie fissate [49] e controllate [50], è stata esplorata la formazione di molecole [51] e sono state sondate le risonanze di Efimov [52].

Capitolo 2 Correlazione di Rumore

In questo capitolo verrà illustrata la fisica che sta alla base della tecnica usata per svolgere le misure illustrate in questo lavoro di tesi. La prima parte sarà dedicata alla comprensione dell'effetto Hanbury Brown e Twiss che oggi trova applicazione in molti campi della fisica, dall'astronomia alla fisica delle particelle, proprio perché è legato alle proprietà statistico-quantistiche che caratterizzano una qualsiasi particella. Verrà trattato esplicitamente il caso dei fotoni perché i primi esperimenti sono stati svolti impiegando la luce. Nella seconda parte sarà invece illustrato come sia possibile sfruttare questo effetto per studiare le proprietà di un gas di atomi ultrafreddi intrappolato in un reticolo ottico.

Per prima verrà introdotta la teoria della Coerenza Spaziale (§ 2.1) e successivamente sarà trattata la teoria dell'Interferometria di Intensità (§ 2.2), discutendo sia la trattazione classica che quella quantistica ed analizzando gli affascinanti risultati dell'esperimento di Hanbury Brown e Twiss. Successivamente saranno discussi i comportamenti attesi per gas di bosoni o fermioni incoerenti e coerenti e verranno brevemente esaminati i risultati già presenti in letteratura (§ 2.3). Infine nel § 2.4 verrà illustrata la tecnica diagnostica basata sull'effetto Hanbury Brown e Twiss, che ha permesso di studiare la disposizione del campione di atomi ultrafreddi atomi in un reticolo ottico tridimensionale, e verranno formulate delle previsioni sui risultati attesi.

2.1 Teoria della Coerenza Spaziale

La coerenza è una proprietà di tutti i fenomeni ondulatori e si manifesta molto spesso attraverso il fenomeno dell'interferenza. Due onde sono dette coerenti se hanno una fase relativa costante e questo permette di conoscere le caratteristiche della seconda, note quelle della prima. Come esempio consideriamo due onde perfettamente correlate per tutti i tempi, ciò vuol dire che se ad un certo istante una delle proprietà della prima cambia, allora la stessa proprietà della seconda cambierà nello stesso modo. Se le due onde così fatte venissero sovrapposte esse produrrebbero un effetto di interferenza costruttiva a tutti i tempi ed in tutte le posizioni dello spazio. Se, invece, la loro fase relativa variasse per un qualche motivo, allora la coerenza verrebbe gradualmente persa. Il grado di coerenza fra due onde (o anche di un onda con sé stessa) può essere misurato calcolando la loro funzione di correlazione.

La coerenza temporale è la misura della correlazione media fra il valore di un onda ad un tempo t e quello di essa stessa o di un'altra ad un tempo $t + \tau$. La differenza di tempo τ_c massima entro la quale si osserva una correlazione è detta tempo di coerenza ed è determinata dalla deviazione dalla monocromaticità della sorgente di onde. La coerenza spaziale è la misura della correlazione che si ha fra due punti della stessa onda o di onde diverse, mediata nel tempo. La distanza massima l_c per cui si ha una correlazione è detta lunghezza di correlazione ed è determinata dalla deviazione delle dimensioni della sorgente dal caso puntiforme. Questa è il tipo di coerenza importante per l'esperimento di Young della doppia fenditura ed è anche quella rilevante ai nostri fini.

Consideriamo una sorgente puntiforme di luce quasi monocromatica ad lunghezza d'onda λ che illumina uno schermo con due fenditure poste a distanza a, oltre al quale vi è un rivelatore a distanza L. Se una fenditura viene chiusa si osserverà la figura di diffrazione causata dal passaggio della luce attraverso la seconda fenditura. Se entrambe sono aperte la figura di diffrazione sarà modulata da una sinusoide con frequenza spaziale $L^{\frac{\lambda}{a}}$ e ciò sarà causato all'interferenza risultante dall'indeterminazione fra i due percorsi che i fotoni possono seguire.

Se ora viene aggiunta un'altra sorgente puntiforme ad una certa distanza dalla prima, anch'essa produrrà un profilo di diffrazione ed interferenza uguale a quello della prima sorgente, ma leggermente spostato. Se le due sorgenti non sono coerenti fra loro l'intensità misurata in ciascun punto del rivelatore sarà data dalla somma dei due profili e ciò ridurrà il contrasto delle frange. Se queste due sorgenti fossero invece un'unica sorgente estesa, vista dalle fenditure con un certo diametro angolare θ , allora la misura del contrasto delle frange permetterebbe di misurare il diametro angolare della sorgente. Vediamo meglio come questo sia possibile.

Nella descrizione classica della luce, l'ampiezza del campo elettromagnetico in un punto dello spazio \vec{x} è espressa dalla parte reale di un ampiezza A(t):

$$A_{\vec{x}}(t) = t_1 A_1(t) + t_2 A_2(t+\tau)$$
(2.1)

dove t_1 e t_2 sono i coefficienti complessi di trasmissione dell'ampiezza attraverso le due fenditure ed A_1 e A_2 sono le ampiezze dei due fasci di luce. Il tempo τ è la differenza di tempo necessaria a raggiungere il punto \vec{x} fra i due fasci.

L'intensità della luce in \vec{x} è data dalla media temporale del modulo quadro della parte reale dell'ampiezza:

$$I(\vec{x}) = \langle A_{\vec{x}}^*(t)A_{\vec{x}}(t)\rangle_t = |t_1|^2 A_1^*(t)A_1(t) + |t_2|^2 A_2^*(t)A_2(t) + 2\Re(t_1 t_2 \Gamma_{12}(\tau))$$
(2.2)

2.2 Interferometria di Intensità ed Effetto Hanbury Brown e Twiss 29

dove $\Gamma_{12}(\tau)$ è la funzione di correlazione dell'ampiezza alle due fenditure:

$$\Gamma_{12}(\tau) = \langle A_1^*(t)A_2(t+\tau) \rangle_t \tag{2.3}$$

Si può dimostrare [53] che questa funzione a $\tau = 0$ descrive la coerenza spaziale della sorgente delle onde. La larghezza dell'area dove $\Gamma_{12}(0) \neq 0$ risulta inversamente proporzionale alla larghezza angolare θ della sorgente e, pertanto, la misura della lunghezza di correlazione può permettere di ricavare quest'ultima. La lunghezza di correlazione è:

$$l_c = \lambda/\theta \tag{2.4}$$

Se la sorgente in esame non è neanche monocromatica, ma ha una larghezza spettrale $\Delta \nu$, allora si avrà un vincolo ulteriore costituito dal tempo di coerenza:

$$t_c = 1/\Delta\nu \tag{2.5}$$

Per eseguire con successo una misura è necessario avere un apparato dotato di due fenditure tali che che la loro distanza temporale dalla sorgente sia inferiore a t_c e che la loro distanza spaziale dal punto di rivelazione sia inferiore ad l_c . Questo schema costituisce una variante dell'interferometro d'ampiezza di Michelson [54].

Hanbury Brown inizialmente voleva misurare la dimensione angolare di due radio sorgenti, Cygnus A e Cassiopea A. Si accorse ben presto, da considerazioni teoriche e sperimentali, che la tecnica dell'interferometria d'ampiezza non gli avrebbe permesso di effettuare questa misura sfruttando la tecnologia esistente all'epoca. Allora, insieme a R. Twiss, pensò di usare l'Interferometria di Intensità [55, 56].

2.2 Interferometria di Intensità ed Effetto Hanbury Brown e Twiss

2.2.1 Trattazione Classica

Un interferometro di intensità è essenzialmente un apparato che misura due intensità in due punti differenti usando due rivelatori indipendenti e poi calcola la funzione di correlazione fra le due serie di segnali ottenuti nel tempo. In questo modo viene studiata la correlazione spaziale dell'intensità fra due punti. Questo metodo può essere facilmente esteso allo studio della correlazione di intensità di una intera area usando una matrice di rivelatori, come può essere una telecamera CCD o un fotomoltiplicatore Micro Channel Plate (MCP).

Le intensità misurate in ciascun punto sono date da:

$$I_i(t) = A_i^*(t)A_i(t)$$
 (2.6)

La funzione di correlazione dell'intensità fra due punti 1 e 2 si ottiene calcolando:

$$\langle I_1(t)I_2(t+\tau)\rangle_t = \langle A_1^*(t)A_1(t)A_2^*(t+\tau)A_2(t+\tau)\rangle_t$$
(2.7)

Se le ampiezze sono delle variabili casuali con distribuzione gaussiana, come nel caso di una sorgente di luce classica, l'espressione (2.7) si può sviluppare in:

$$\langle I_1(t)I_2(t+\tau)\rangle_t = \langle A_1^*(t)A_1(t)\rangle_t \langle A_2^*(t+\tau)A_2(t+\tau)\rangle_t + \langle A_1^*(t)A_2(t+\tau)\rangle_t \langle A_2^*(t+\tau)A_1(t)\rangle_t$$
(2.8)

Questa equazione può essere semplificata ulteriormente:

$$\langle I_1(t)I_2(t+\tau)\rangle_t = I_1I_2 + \Gamma_{12}^2(\tau) = I_1I_2\left(1 + \frac{\Gamma_{12}^2(\tau)}{I_1I_2}\right)$$
(2.9)

Il vantaggio della tecnica di correlazione di intensità rispetto a quella di ampiezza è uno solo, ma è molto rilevante sperimentalmente: il metodo è insensibile a piccole variazioni di fase relative fra i due segnali perché esse vengono eliminate dalla misura dell'intensità. Questo rimane valido fintanto che la differenza di cammino è inferiore alla lunghezza di correlazione.

Poiché le fluttuazioni di fase non hanno più effetto, non è più necessaria una grande stabilità meccanica del sistema di ottiche ed è possibile integrare il segnale per tempi molto più lunghi. Si può anche decidere di usare dei filtri più stretti in frequenza per limitare la larghezza spettrale della sorgente o di ridurre la banda passante del rivelatore, allungando in entrambi i casi il tempo di correlazione. Se la banda passante è entro valori acquisibili dall'elettronica i segnali possono essere elaborati a posteriori, come avviene nel presente lavoro.

2.2.2 Esperimento di Hanbury Brown e Twiss

Il primo esperimento effettuato da Hanbury Brown, Jennison e Das Gupta [55], usando la tecnica dell'interferometria di Intensità, fu la misura delle dimensioni angolari delle stelle Cygnus A e Cassiopea A. Essi impiegarono due radiotelescopi (vedi fig. 2.1) ed analizzarono la correlazione fra le due serie di segnali ottenuti, trovando una certa distanza di correlazione, da cui ricavarono la dimensione angolare delle due sorgenti.

I risultati di questo primo lavoro furono velocemente accettati, dimostrando la validità della nuova tecnica. Si cercò subito di applicare questo nuovo metodo nello spettro ottico, ma in questo ambito la spiegazione teorica del fenomeno trovò molti oppositori perché era prevalente la visione particellare della luce, rispetto a quella ondulatoria, ed era difficile capire intuitivamente come mai la probabilità di misurare un secondo fotone dopo un primo con rivelatori vicini fosse doppia rispetto a quella con rivelatori lontani. Così R. Hanbury Brown e R. Twiss portarono a termine un altro esperimento [16] che dimostrò la validità della loro teoria.

Lo schema dell'apparato sperimentale è mostrato in fig. 2.2a. Come sorgente usarono una lampada ai vapori di mercurio, prelevando mediante un filtro solo una stretta banda di frequenza per renderla il più possibile monocromatica. Il fascio veniva fatto passare attraverso una lente ed una stretta fenditura per rendere



Figura 2.1: Schema del primo interferometro di intensità. Due radiotelescopi acquisiscono due segnali centrati a 150 MHz e con larghezza di 2 kHz, determinata da un successivo filtro. I due segnali vengono poi inviati ad un correlatore elettronico.

la sorgente il più possibile puntiforme e poi veniva diviso in due fasci uguali da un cubo. L'intensità dei due fasci veniva misurata da due fotomoltiplicatori indipendenti, uno dei due era posto su una base mobile per poter variare la lunghezza del percorso ottico, e poi veniva analizzata la correlazione temporale fra le due serie di misure variando la differenza di tempo di arrivo del fasci sui rivelatori.



Figura 2.2: Schema dell'apparato sperimentale e risultati dell'esperimento grazie ai quali cui fu dimostrato l'effetto Hanbury Brown e Twiss. Immagini adattate da [16].

In figura 2.2b sono mostrati i risultati dell'esperimento: per una piccola differenza di percorso ottico fra i due rivelatori la probabilità di misurare due fotoni contemporaneamente è doppia rispetto alla probabilità che si ha quando il ritardo è grande. Questo comportamento costituisce l'effetto Hanbury Brown e Twiss ed è legato alla natura delle particelle in esame. Secondo questo effetto, la probabilità di rivelazione simultanea di due particelle dello stesso tipo emesse da due sorgenti indipendenti (o da una sorgente estesa) e che arrivano a due rivelatori indipendenti non è data soltanto dal prodotto delle probabilità di rivelazione della singola particella nelle due posizioni, ma dipende dalla distanza relativa fra i due rivelatori. Se essi sono posizionati entro la lunghezza di correlazione della sorgente si può osservare una maggiore probabilità di rivelazione congiunta se le due particelle sono bosoni (*bunching*) o al contrario una probabilità inferiore se le due particelle sono fermioni (*antibunching*).

Questo effetto può essere spiegato classicamente per le particelle bosoniche (come i fotoni), ma richiede necessariamente una descrizione quantistica per comprendere come la statistica dei fermioni causi l'*antibunching*.

2.2.3 Trattazione quantistica e Funzioni di Correlazione

Una descrizione teorica quantistica completa dell'effetto Hanbury Brown e Twiss per i fotoni è stata formulata da R. Glauber [17, 18] nel 1963 e ciò ha posto le fondamenta dell'ottica quantistica moderna. Per questo importante lavoro gli è stato conferito il premio Nobel nel 2005. Qui verranno illustrati i punti chiave del suo lavoro, necessari per comprendere l'effetto Hanbury Brown e Twiss.

Fra una descrizione classica e quantistica vi è una differenza fondamentale nella trattazione del processo di misura. Se classicamente è possibile misurare istantaneamente l'ampiezza al quadrato di un onda, nella teoria quantistica la misura distrugge un fotone. Il campo elettromagnetico risulta così modificato da ogni misura e non si possono eseguire più misure di quanti non siano i fotoni del campo.

Nel formalismo della seconda quantizzazione $\hat{\Psi}(\vec{r}, t)$ viene definito come l'operatore di annichilazione di una particella del campo, responsabile della rivelazione nella posizione \vec{r} al tempo t, e sia $\hat{\Psi}^{\dagger}(\vec{r}, t)$ il suo operatore coniugato di creazione di una particella del campo. Questi operatori possono essere sviluppati su una base completa di funzioni $\{\phi_n(\vec{r}, t)\}$:

$$\hat{\Psi}(\vec{r},t) = \sum_{n} \phi_{n}(\vec{r},t)\hat{a}_{n} \qquad \hat{\Psi}^{\dagger}(\vec{r},t) = \sum_{n} \phi_{n}^{*}(\vec{r},t)\hat{a}_{n}^{\dagger}$$
(2.10)

dove $\hat{a}_n \in \hat{a}_n^{\dagger}$ sono i comuni operatori di annichilazione e creazione nella data base.

La misura è un processo che porta il campo quantizzato da uno stato iniziale $|i\rangle$ in uno stato finale $|f\rangle$ e l'ampiezza di probabilità di questo processo è espressa da:

$$\langle f | \hat{\Psi}(\vec{r}, t) | i \rangle$$
 (2.11)

La probabilità di rivelare la particella nello stato del campo $|i\rangle$ è data dalla somma delle probabilità su tutti i campi finali:

$$\sum_{f} |\langle f | \hat{\Psi}(\vec{r},t) | i \rangle|^2 = \sum_{f} \langle i | \hat{\Psi}^{\dagger}(\vec{r},t) | f \rangle \langle f | \hat{\Psi}(\vec{r},t) | i \rangle = \langle i | \hat{\Psi}^{\dagger}(\vec{r},t) \hat{\Psi}(\vec{r},t) | i \rangle \quad (2.12)$$
2.2 Interferometria di Intensità ed Effetto Hanbury Brown e Twiss 33

É importante notare che $\hat{\Psi}(\vec{r},t)$ e $\hat{\Psi}^{\dagger}(\vec{r},t)$ non commutano, infatti se si considera lo stato di vuoto $|0\rangle$ del sistema si trova che non si possono rivelare particelle, ma se ne possono creare:

$$\langle 0|\hat{\Psi}^{\dagger}(\vec{r},t)\hat{\Psi}(\vec{r},t)|0\rangle = 0 \neq \langle 0|\hat{\Psi}(\vec{r},t)\hat{\Psi}^{\dagger}(\vec{r},t)|0\rangle$$
(2.13)

Nell'interferometria di intensità vengono rivelate due particelle indipendenti in due posizioni ed a due tempi diversi con ampiezza di probabilità:

$$\langle f | \hat{\Psi}(\vec{r}_1, t_1) \hat{\Psi}(\vec{r}_2, t_2) | i \rangle \tag{2.14}$$

Usando la (2.12) risulta che la probabilità associata alla doppia rivelazione è proporzionale a:

$$\langle i | \hat{\Psi}^{\dagger}(\vec{r}_2, t_2) \hat{\Psi}^{\dagger}(\vec{r}_1, t_1) \hat{\Psi}(\vec{r}_1, t_1) \hat{\Psi}(\vec{r}_2, t_2) | i \rangle$$
(2.15)

Per avere una descrizione statistica realistica del processo di rivelazione bisogna mediare su tutti i possibili stati iniziali.

Definita una matrice densità ρ , la probabilità di trovare il sistema in uno stato $|i\rangle$ è pari a $\rho_{ii} = \langle i|\hat{\rho}|i\rangle$. Il valore di aspettazione di un'osservabile \hat{O} del sistema è data da:

$$\langle \hat{O} \rangle = tr(\hat{\rho}\hat{O})$$
 (2.16)

dove tr() è la traccia della matrice.

La probabilità di misurare una singola particella nella posizione \vec{r} al tempo t è espressa da:

$$tr(\hat{\rho}\Psi^{\dagger}(\vec{r},t)\Psi(\vec{r},t)) = \varrho(\vec{r},t)$$
(2.17)

dove $\rho(\vec{r}, t)$ è la densità media di particelle.

Considerando che i campi possono essere misurati in punti e tempi diversi e che poi ne viene calcolata la funzione di correlazione, dobbiamo definire la funzione di correlazione del primo ordine:

$$G^{(1)}(\vec{r_1}, t_1, \vec{r_2}, t_2) = tr(\hat{\rho}\hat{\Psi}^{\dagger}(\vec{r_1}, t_1)\hat{\Psi}(\vec{r_2}, t_2))$$
(2.18)

e la funzione di correlazione del secondo ordine:

$$G^{(2)}(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2, \vec{r}_3, t_3, \vec{r}_4, t_4) = tr(\hat{\rho}\hat{\Psi}^{\dagger}(\vec{r}_1, t_1)\hat{\Psi}^{\dagger}(\vec{r}_2, t_2)\hat{\Psi}(\vec{r}_3, t_3)\hat{\Psi}(\vec{r}_4, t_4)) \quad (2.19)$$

Nell'esperimento di Hanbury Brown e Twiss è stata misurata la seguente quantità:

$$G^{(2)}(\vec{r_1}, t_1, \vec{r_2}, t_2) = tr(\hat{\rho}\hat{\Psi}^{\dagger}(\vec{r_1}, t_1)\hat{\Psi}^{\dagger}(\vec{r_2}, t_2)\hat{\Psi}(\vec{r_2}, t_2)\hat{\Psi}(\vec{r_1}, t_1))$$
(2.20)

É conveniente definire le funzioni di correlazione normalizzate:

$$g^{(1)}(\vec{r_1}, t_1, \vec{r_2}, t_2) = \frac{G^{(1)}(\vec{r_1}, t_1, \vec{r_2}, t_2)}{\sqrt{\varrho(\vec{r_1}, t_1)\varrho(\vec{r_2}, t_2)}}$$
(2.21)

$$g^{(2)}(\vec{r_1}, t_1, \vec{r_2}, t_2) = \frac{G^{(2)}(\vec{r_1}, t_1, \vec{r_2}, t_2)}{\varrho(\vec{r_1}, t_1)\varrho(\vec{r_2}, t_2)}$$
(2.22)

perché così risulta $g^{(1)}(\vec{r}, t, \vec{r}, t) = 1$. É interessante notare che entrambe le funzioni di correlazione sono reali e definite positive e che $|g^{(1)}(\vec{r_1}, t_1, \vec{r_2}, t_2)| \leq 1$.

2.2.4 Spiegazione quantistica dell'effetto

Grazie al formalismo introdotto nel precedente paragrafo è possibile comprendere i risultati dell'esperimento di Hanbury Brown e Twiss. Verranno considerate le tre possibili situazioni determinate dalla statistica delle particelle.

Caso di Bosoni Incoerenti

Si consideri una sorgente di particelle con spin intero che non hanno una coerenza di fase. Sostituendo le definizioni degli operatori di campo (2.10) nella (2.20) e considerando la sola dipendenza spaziale, si ottiene:

$$G^{(2)}(\vec{r_1}, t_1, \vec{r_2}, t_2) = \sum_{klmn} (\phi_k^*(\vec{r_1})\phi_l^*(\vec{r_2})\phi_m(\vec{r_2})\phi_n(\vec{r_1})) \langle \hat{a}_k^{\dagger} \hat{a}_l^{\dagger} \hat{a}_m \hat{a}_n \rangle$$
(2.23)

Sfruttando le relazioni di commutazione degli operatori bosonici di creazione e distruzione $([\hat{a}_m, \hat{a}_n] = [\hat{a}_m^{\dagger}, \hat{a}_n^{\dagger}] = 0, [\hat{a}_m, \hat{a}_n^{\dagger}] = \delta_{mn})$ si ottiene [53]:

$$G^{(2)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \rho(\vec{r}_1)\rho(\vec{r}_2) + |G^{(1)}(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2)|^2 + \sum_n |\phi_n(\vec{r}_1))|^2 |\phi_n(\vec{r}_2))|^2 \left(\langle \hat{a}_n^{\dagger} \hat{a}_n^{\dagger} \hat{a}_n \hat{a}_n \rangle - 2 \langle \hat{a}_n^{\dagger} \hat{a}_n \rangle^2 \right)$$
(2.24)

Ad alte temperature l'ultimo termine dipende linearmente dal numero totale di particelle, mentre i primi due in modo quadratico, pertanto per un grande numero di particelle l'equazione (2.24) si può semplificare:

$$g^{(2)}(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2) = 1 + |g^{(1)}(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2)|^2$$
(2.25)

Da quest'ultima equazione risulta evidente come la probabilità di rivelare insieme due particelle di natura bosonica sia ≥ 1 se i due rivelatori si trovano entro la lunghezza di correlazione del sistema.

Caso di Bosoni Coerenti

Si consideri una sorgente di particelle bosoniche che hanno una completa coerenza di fase, come può essere un laser che emette un fascio coerente di fotoni. Tutte le particelle si trovano nello stesso stato $\phi_n(\vec{r})$ e la funzione di correlazione del secondo ordine diventa:

$$G^{(2)}(\vec{r_1}, \vec{r_2}) = |\phi_n(\vec{r_1})|^2 |\phi_n(\vec{r_2})|^2 \langle \hat{a}_n^{\dagger} \hat{a}_n^{\dagger} \hat{a}_n \hat{a}_n \rangle$$
(2.26)

che può essere facilmente normalizzata:

$$g^{(2)}(\vec{r_1}, t_1, \vec{r_2}, t_2) = 1 \tag{2.27}$$

Risulta che un sistema di bosoni coerenti non mostrerà una correlazione > 1 per nessuna distanza intercorrente fra i due rivelatori.

Caso di Fermioni Incoerenti

Si consideri una sorgente di particelle fermioniche. Anche in questo caso vale l'equazione (2.23) che può essere semplificata mediante l'uso delle anticommutazione ($\{\hat{a}_m, \hat{a}_n\} = \{\hat{a}_m^{\dagger}, \hat{a}_n^{\dagger}\} = 0, \{\hat{a}_m, \hat{a}_n^{\dagger}\} = \delta_{mn}$). Nell'approssimazione di alte temperature si ottiene:

$$g^{(2)}(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2) = 1 - |g^{(1)}(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2)|^2$$
(2.28)

Un sistema di fermioni mostra una correlazione ≤ 1 e come atteso non è possibile rivelare due particelle identiche nella stessa posizione.

In figura 2.3 è riassunto l'andamento teorico delle funzioni di correlazione del secondo ordine normalizzate al variare della distanza fra i rivelatori nei tre casi qui discussi.



Figura 2.3: Andamento teorico delle funzioni di correlazione del secondo ordine normalizzate al variare della distanza fra i rivelatori nei casi di una sorgente di bosoni termici, di bosoni coerenti e di fermioni termici. La linea verticale tratteggiata indica la distanza pari alla lunghezza di correlazione l_c . Immagine adattata da [53].

2.3 Effetto Hanbury Brown e Twiss per gas di Atomi Ultrafreddi

Dalla discussione svolta nel precedente paragrafo risulta chiaro che l'effetto Hanbury Brown e Twiss non è legato alla natura elettromagnetica dei fotoni, ma alla simmetria delle funzioni d'onda con cui essi vengono descritti. Pertanto ha una validità ben più generale e può essere osservato per qualsiasi particella, sia di natura fermionica che bosonica, come elettroni [57, 58, 59], neutroni [60] o interi atomi.

Gli atomi sono dei buoni candidati per esperimenti il cui scopo sia quello di misurare l'effetto Hanbury Brown e Twiss perché possono essere sia dei bosoni che dei fermioni. Ogni particella è caratterizzata dalla propria lunghezza d'onda di De Broglie $\lambda_B = \left(\frac{\hbar^2}{2\pi m k_B T}\right)^{\frac{1}{2}}$, perciò se si vuole osservare gli effetti del comportamento ondulatorio bisogna ridurre molto la temperatura per aumentare la distanza a cui questi effetti si manifestano. Gli atomi, come visto nel § 1.2, possono essere facilmente manipolati e raffreddati fino a temperature delle decine di nK. Come sarà illustrato nel § 2.4, l'interesse per l'effetto Hanbury Brown e Twiss non si esaurisce con la sua osservazione, ma può essere un valido strumento per ottenere ulteriori informazioni sul campione atomico in esame.

Una trattazione teorica delle funzioni di correlazione previste per una BEC in una trappola armonica è stata sviluppata da [61], mentre le prime previsioni per un gas di atomi intrappolato in un reticolo ottico sono state formulate da [62].

Gli esperimenti con gli atomi ultrafreddi possono essere divisi in due categorie in base alla tecnica di rivelazione usata: conteggio diretto dei singoli atomi o misura indiretta attraverso tecniche di rivelazione in assorbimento. Può essere interessante discutere le differenze fra i due metodi.



(a) Schema di rivelazione con conteggio a singolo (b) Schema di rivelazione con tecnica di assorbimento

Figura 2.4: Sono mostrate le due tecniche di rivelazione degli atomi sfruttate per il calcolo della funzione di correlazione fra le quantità misurate in punti diversi del rivelatore. Immagini adattate rispettivamente da [65] e da [88].

Nella tecnica di conteggio diretto dei singoli atomi (fig. 2.4a) il campione atomico è confinato in una trappola, tipicamente armonica, da cui viene gradualmente rilasciato. Gli atomi sfuggiti dalla trappola espandono per un certo tempo, fino ad arrivare su un rivelatore costituito da un fotomoltiplicatore a Micro Channel Plate che può risolvere sia spazialmente che temporalmente gli eventi di arrivo di un atomo. Il primo esperimento di questo tipo è stato svolto nel 1996 da M. Yasuda e F. Shimizu [63] con l'²⁰Ne metastabile e mostrò l'effetto del *bunching* dei bosoni. Successivamente sono stati svolti studi con altre specie atomiche, come da Öttl et al. [64] sul ⁸⁷Rb e da Schellekens et al. prima sull'⁴He (isotopo bosonico) [65] e poi sull'³He (isotopo fermionico) [66]. Il confronto fra i risultati ottenuti da questi ultimi due studi è mostrato in figura 2.5, dove si può vedere chiaramente l'effetto di *bunching* dei bosoni e di *antibunching* dei fermioni. In un lavoro più recente [67] sono state studiate anche le correlazioni del terzo ordine.



Figura 2.5: Funzioni di correlazione del secondo ordine normalizzate per un gas di ⁴He (bosonico, dati celesti) e di ³He (fermionico, dati blu) in funzione della separazione fra i punti di rivelazione. Immagine adattata da [66].

Nella tecnica di rivelazione in assorbimento (fig. 2.4b), metodo usato anche nel presente lavoro di tesi e descritto più in dettaglio nel § 4.3.2, il campione atomico viene rilasciato da una trappola armonica o da un reticolo ottico, espande per un certo tempo e viene illuminato da un fascio laser risonante con un'opportuna transizione atomica. Parte del fascio viene assorbita dalla nuvola atomica, mentre il resto prosegue il suo percorso e viene registrato su una telecamera CCD. Dividendo l'immagine contenente l'ombra degli atomi per una in cui non vi è stato nessun assorbimento si ricava la densità della nuvola atomica integrata lungo la direzione di rivelazione. Generalmente la risoluzione offerta da questa tecnica non permette di misurare singoli atomi.

E. Altman et al. [15] proposero un metodo basato sull'effetto Hanbury Brown e Twiss che avrebbe permesso di ricavare informazioni sull'ordinamento degli atomi in un reticolo ottico. Se gli atomi prima dello spegnimento del reticolo si fossero trovati nella fase Isolante di Mott, allora nelle fluttuazioni di densità presenti fra un punto e l'altro dell'immagine sarebbero state contenute informazioni sulla loro disposizione. Il calcolo della funzione di correlazione del secondo ordine su numerose immagini, repliche dello stesso esperimento, avrebbe permesso di ottenere queste informazioni, ma solo se lo shot noise atomico fosse stato dominante sul rumore fotonico ed elettronico. A seguito di questa proposta numerosi gruppi hanno dimostrato la validità di questo metodo: in [69] è stato studiato il comportamento di un gas bosonico di ⁸⁷Rb in un reticolo tridimensionale, poi in [70] è stato esplorato il caso fermionico del ⁴⁰K, in [71] è stato analizzato il ⁸⁷Rb in un reticolo bidimensionale ed, infine, in [72] è stata caratterizzata la rottura dell'ordine della fase Isolante di Mott del ⁸⁷Rb in presenza di un reticolo bidimensionale edi mott del ⁸⁷Rb in presenza di un reticolo bidimensionale edi mott del ⁸⁷Rb in presenza di un reticolo bidimensionale edi mott del ⁸⁷Rb in presenza di un reticolo bidimensionale edi mott del ⁸⁷Rb in presenza di un reticolo bidimensionale edi mott del ⁸⁷Rb in presenza di un reticolo bidimensionale edi mott del ⁸⁷Rb in presenza di un reticolo bidimensionale edi mott del ⁸⁷Rb in presenza di un reticolo bidimensionale edi mott del ⁸⁷Rb in presenza di un reticolo bidimensionale edi motto del ⁸⁷Rb in presenza di un reticolo bidimensionale edi motto del ⁸⁷Rb in presenza di un reticolo bidimensionale edi motto del ⁸⁷Rb in presenza di un reticolo bidimensionale edi motto del ⁸⁷Rb in presenza di un reticolo bidimensionale edi motto del ⁸⁷Rb in presenza di un reticolo bidimensionale edi motto del ⁸⁷Rb in presenza di un reticolo bidimensionale edi motto del ⁸⁷

È interessante notare che la possibile correlazione presente nelle fluttuazioni di densità atomica è stata usata in [68] per studiare la dinamica di molecole formate da due atomi fermionici.

2.4 Rilevamento Correlato di Bosoni rilasciati da Reticolo Ottico

Nel presente lavoro di tesi la distribuzione degli atomi viene misurata con la tecnica della rivelazione in assorbimento in tempo di volo, ovvero dopo che essi si sono espansi liberamente per un certo tempo a seguito dello spegnimento contemporaneo dei potenziali confinanti della trappola di dipolo e del reticolo ottico.

La rivelazione in tempo di volo è molto interessante perché nel caso di un condensato permette di ricavare la distribuzione d'impulso degli atomi che essi avevano allo spegnimento della trappola. Questa importante proprietà, che sarà dimostrata nel § 4.3.1, implica che se è presente una coerenza di fase fra i siti del reticolo, ovvero una correlazione del primo ordine, allora essa si manifesterà sotto forma di una struttura spaziale nella distribuzione di densità dopo il tempo di volo. Questo è proprio quello che si osserva lasciando espandere un campione di atomi che nel reticolo si trovava nella fase Superfluida. Nella fase Isolante di Mott la coerenza viene persa e gli atomi risultano ben localizzati nei siti reticolari, pertanto la loro distribuzione dopo un certo tempo di volo sarà determinata esclusivamente dalla dinamica di ciascun sito, permettendo così di trattare il reticolo come una matrice di sorgenti indipendenti. Quindi dalle immagini della densità degli atomi nello stato Isolante è possibile ottenere meno informazioni rispetto al caso Superfluido.

Come già accennato nel paragrafo precedente, E. Altman et al. [15] nel 2003 proposero una tecnica diagnostica (che da ora in poi sarà chiamata *Correlazione di Rumore*) complementare alla rivelazione in assorbimento che permette di ottenere informazioni sulla disposizione degli atomi provenienti dalla fase Isolante di Mott, superando così il limite appena illustrato e aprendo la strada ad ulteriori ricerche. In questo lavoro di tesi è stato deciso di integrare la già esistente tecnica di rivelazione in assorbimento con questo nuovo strumento diagnostico per poter accedere in futuro alle osservabili delle fasi "ferromagnetica" ed "antiferromagnetica" previste per una miscela di due specie atomiche confinate in un reticolo ottico (vedi § 1.4).

É importante notare che la Correlazione di Rumore, essendo basata sull'effetto Hanbury Brown e Twiss e quindi unicamente sulle proprietà statistiche delle particelle in esame, non deve mostrare alcun segnale di correlazione del secondo ordine dall'analisi delle fluttuazioni di densità atomica fra punti diversi di immagini ottenute a seguito dell'espansione di un gas Superfluido perché questo gas è costituito da bosoni coerenti. Nella fase di Isolante gli atomi hanno perso la coerenza e quindi è possibile misurare una correlazione del secondo ordine ≥ 1 , fintanto che la separazione fra i rivelatori (in questo caso punti della CCD) è inferiore alla lunghezza di correlazione del sistema.

2.4.1 Funzione di Correlazione nello stato di Isolante di Mott

Per ricavare le informazioni sulla disposizione degli atomi nello stato Isolante di Mott si deve calcolare la correlazione fra le intensità misurate in punti diversi delle immagini. Una trattazione teorica completa può essere trovata in [15, 69, 88]. Come sarà illustrato nel § 4.3.2, dalle intensità si può trovare la densità di atomi presente in quel punto, per cui la correlazione del secondo ordine (2.20), misurata in un esperimento di Hanbury Brown e Twiss, si riconduce al calcolo della funzione di correlazione del secondo ordine normalizzata dell'operatore densità $\hat{n}(\vec{r})$ fra due punti diversi:

$$g^{2}(\vec{r}_{1}, t, \vec{r}_{2}, t) = \frac{\langle \hat{n}(\vec{r}_{1}, t)\hat{n}(\vec{r}_{2}, t)\rangle}{\langle \hat{n}(\vec{r}_{1}, t)\rangle\langle \hat{n}(\vec{r}_{2}, t)\rangle}$$
(2.29)

Questa funzione di correlazione deve essere calcolata al tempo t in cui avviene la rivelazione degli atomi e pertanto questo tempo è pari al tempo di volo $t = t_{TOF}$ degli atomi. Per trovare la disposizione degli atomi nel reticolo prima del suo spegnimento, bisogna esprimere il valore di aspettazione dell'operatore densità al tempo t in funzione del suo valore di aspettazione al tempo t = 0. Questa relazione è stata calcolata in [88]:

$$\hat{n}(\vec{r},t) = \sum_{jk} w^* (\vec{r} - \vec{r}_j, t) w(\vec{r} - \vec{r}_k, t) e^{\frac{i\hbar t}{2m\sigma_0^2 \sigma^2(t)} (2\vec{r}(\vec{r}_j - \vec{r}_k) + \vec{r}_k^2 - \vec{r}_j^2)} \hat{a}_j^{\dagger} \hat{a}_k \qquad (2.30)$$

dove $w(\vec{r}, t)$ indica la funzioni d'onda di Wannier, inizialmente centrata su un sito reticolare, al tempo t durante la propagazione libera. Poiché si sta considerando il caso di un Isolante di Mott, l'ampiezza del reticolo prima dello spegnimento era alta e quindi w può essere approssimata bene con una gaussiana di larghezza iniziale σ_0 e larghezza $\sigma(t)$ dopo il tempo di espansione.

La (2.30) è già sufficiente per calcolare il termine a denominatore della (2.29), mentre per il numeratore si può trovare un'espressione più semplice del prodotto dei due operatori, grazie ad alcune approssimazioni. Se il tempo di espansione è abbastanza lungo da poter considerare la larghezza della funzione di Wannier $\sigma(t)$ molto più grande sia di σ_0 che della dimensione complessiva della distribuzione quando era nel reticolo, allora $\sigma(t) \gg |\vec{r_j}|$. Poiché $w(\vec{r}, t)$ è lentamente variabile sulla scala di $\sigma(t)$, allora si può fare la sostituzione $w(\vec{r} - \vec{r_j}) = w(\vec{r})$. Inoltre $\sigma(t)$ può essere approssimato dalla larghezza iniziale opportunamente riscalata dal tempo di espansione $\hbar t/(\sigma_0 m)$. Così si ottiene:

$$\hat{n}(\vec{r}_{1},t)\hat{n}(\vec{r}_{2},t) = \sum_{jklm} |w(\vec{r}_{1})|^{2} |w(\vec{r}_{2})|^{2} e^{\frac{im}{2\hbar t}(2\vec{r}_{1}(\vec{r}_{j}-\vec{r}_{k})+\vec{r}_{k}^{2}-\vec{r}_{j}^{2}+2\vec{r}_{2}(\vec{r}_{l}-\vec{r}_{m})+\vec{r}_{m}^{2}-\vec{r}_{l}^{2})} \hat{a}_{j}^{\dagger} \hat{a}_{k} \hat{a}_{l}^{\dagger} \hat{a}_{m}$$

$$(2.31)$$

Le proprietà dello stato quantistico nel reticolo sono determinate dal termine $\hat{a}_{j}^{\dagger}\hat{a}_{k}\hat{a}_{l}^{\dagger}\hat{a}_{m}$ che può essere espresso mediante l'ordinamento normale: $\hat{a}_{j}^{\dagger}(\hat{a}_{l}^{\dagger}\hat{a}_{k} + \delta_{kl})\hat{a}_{m}$. Il termine che contiene la δ porta ad un picco per $\vec{d} = 0$ che non è interessante ai fini di questo lavoro e verrà trascurato.

Prima di procedere con lo studio del comportamento di un Isolante di Mott, è interessante mostrare come si possa facilmente verificare, nell'ambito di questa teoria, la previsione dovuta all'effetto Hanbury Brown e Twiss. Secondo tale previsione la funzione di correlazione del secondo ordine di un gas di atomi bosonici, che si trovavano nella fase superfluida prima dello spegnimento del reticolo ottico, deve essere nulla. In questo caso si ha $\hat{a}_j |\Psi\rangle = \alpha_j |\Psi\rangle$ con $|\alpha_j| = \sqrt{\langle \hat{n}_j \rangle}$ ed una fase comune a tutti gli stati che può essere scelta pari a 1. Il valore di aspettazione dell'operatore al numeratore della (2.29) diventa:

$$\langle \hat{a}_{j}^{\dagger} \hat{a}_{l}^{\dagger} \hat{a}_{k} \hat{a}_{m} \rangle = \sqrt{n_{j} n_{l} n_{k} n_{m}} = \langle \hat{a}_{j}^{\dagger} \hat{a}_{k} \rangle \langle \hat{a}_{l}^{\dagger} \hat{a}_{m} \rangle \tag{2.32}$$

Pertanto risulta che:

$$\langle \hat{n}(\vec{r_1})\hat{n}(\vec{r_2})\rangle = \langle \hat{n}(\vec{r_1})\rangle\langle \hat{n}(\vec{r_2})\rangle \to g^{(2)}(\vec{r_1},\vec{r_2}) = 1$$
(2.33)

Quindi qualsiasi struttura spaziale dovuta alla correlazione del primo ordine presente nelle immagini viene rimossa dalla normalizzazione e la funzione di correlazione del secondo ordine di un Superfluido è pari ad 1, come atteso. Ciò rimane vero fintanto che la posizione e l'ampiezza di questi picchi dovuti alla coerenza non fluttua da immagine a immagine, come invece avviene negli esperimenti, e quando questo accade la normalizzazione non può più essere altrettanto efficiente, portando alla comparsa di un contributo nella $g^{(2)}$ per distanze pari alla periodicità del reticolo reciproco. Questo problema sarà affrontato meglio nel § 5.1.3.

Per un Isolante di Mott con riempimento n_j nel sito j, si ha $\langle \hat{a}_l^{\dagger} \hat{a}_k \rangle = \delta_{jk} n_j$ e quindi il valore di aspettazione dell'operatore complessivo diventa:

$$\langle \hat{a}_j^{\dagger} \hat{a}_l^{\dagger} \hat{a}_k \hat{a}_m \rangle = \delta_{jk} \delta_{lm} n_j n_l + \delta_{jm} \delta_{lk} n_j n_l + \delta_{jk} \delta_{jl} \delta_{jm} (n_j (n_j - 1) - 2n_j^2) \qquad (2.34)$$

Il terzo termine di questa somma verrà trascurato in quanto comporta solo un offset che non contiene informazioni di tipo spaziale.

Il contributo del primo termine nell'equazione (2.31) è il seguente:

$$\sum_{jl} |w(\vec{r}_1)|^2 |w(\vec{r}_2)|^2 e^{\frac{im}{2\hbar t}(2\vec{r}_1(\vec{r}_j - \vec{r}_j) + \vec{r}_j^2 - \vec{r}_j^2 + 2\vec{r}_2(\vec{r}_l - \vec{r}_l) + \vec{r}_l^2 - \vec{r}_l^2)} n_j n_l =$$

$$= \sum_j |w(\vec{r}_1)|^2 n_j \cdot \sum_l |w(\vec{r}_2)|^2 n_l = |w(\vec{r}_1)|^2 |w(\vec{r}_2)|^2 N_{totale}^2$$
(2.35)

2.4 Rilevamento Correlato di Bosoni rilasciati da Reticolo Ottico 41

dove N_{totale} è il numero di atomi complessivo nella fase Isolante di Mott. Risulta quindi che questo primo termine ha una forma gaussiana ed è identico al denominatore perché deriva da $\langle \hat{n}(\vec{r_1},t) \rangle \langle \hat{n}(\vec{r_2},t) \rangle$.

Le informazioni sulla disposizione spaziale degli atomi nel reticolo sono contenute nel contributo del secondo termine:

$$\sum_{jl} |w(\vec{r}_{1})|^{2} |w(\vec{r}_{2})|^{2} e^{\frac{im}{2\hbar t} (2\vec{r}_{1}(\vec{r}_{j}-\vec{r}_{l})+\vec{r}_{l}^{2}-\vec{r}_{j}^{2}+2\vec{r}_{2}(\vec{r}_{l}-\vec{r}_{j})+\vec{r}_{l}^{2}-\vec{r}_{l}^{2})} n_{j} n_{l} =$$

$$= \sum_{jl} |w(\vec{r}_{1})|^{2} n_{j} |w(\vec{r}_{2})|^{2} e^{\frac{im}{\hbar t} (\vec{r}_{2}-\vec{r}_{1})(\vec{r}_{l}-\vec{r}_{j})} n_{j} n_{l} =$$

$$= \sum_{jl} |w(\vec{r}-\vec{d}/2)|^{2} |w(\vec{r}+\vec{d}/2)|^{2} e^{\frac{im}{\hbar t} (\vec{r}_{l}-\vec{r}_{j})\cdot\vec{d}} n_{j} n_{l} \qquad (2.36)$$

dove $\vec{d} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ è la distanza relativa fra due punti e $\bar{r} = (\vec{r}_1 + \vec{r}_2)/2$ è la coordinata del centro della coppia.

Per come è stata formulata questa trattazione, i vettori considerati nella equazione (2.29) possono essere bidimensionali o tridimensionali, pertanto la $g^{(2)}(\vec{r_1}, \vec{r_2})$ risulta essere una funzione a quattro o sei dimensioni. Sperimentalmente si misura una densità di atomi integrata lungo una delle tre possibili direzioni, quindi bisogna definire una nuova osservabile proiettata sull'opportuno sottospazio di \vec{d} , mediante un'integrazione su \bar{r} . Questo sottospazio avrà così la stessa dimensione dei dati. Definiamo la funzione di correlazione ridotta:

$$C(\vec{d}) = \frac{\int \langle \hat{n}(\vec{x} - \vec{d/2}) \cdot \hat{n}(\vec{x} + \vec{d/2}) \rangle d\vec{x}}{\int \langle \hat{n}(\vec{x} - \vec{d/2}) \rangle \cdot \langle \hat{n}(\vec{x} + \vec{d/2}) \rangle d\vec{x}} - 1$$
(2.37)

Il significato di questa osservabile è abbastanza intuitivo: per trovare il numeratore bisogna calcolare l'autocorrelazione di ciascuna immagine considerando tutte le coppie di punti distanti \vec{d} e mediarla su tutto il set di immagini, ottenute da diverse realizzazioni sperimentali. Il denominatore è dato invece dall'autocorrelazione della media di tutte le immagini. Calcolando la (2.37) per tutti i possibili valori della distanza \vec{d} si può ottenere un'*immagine della correlazione del secondo* ordine.

Inserendo la (2.36) al numeratore della (2.37) e la (2.35) sia al numeratore che al denominatore, si ottiene per un Isolante di Mott la seguente funzione di correlazione ridotta:

$$C(\vec{d}) = \frac{\int |w(\bar{r} - \vec{d}/2)|^2 |w(\bar{r} + \vec{d}/2)|^2 (N_{totale}^2 + \sum_{jl} e^{\frac{im}{\hbar t} (\vec{r}_l - \vec{r}_j) \cdot \vec{d}} n_j n_l) d\bar{x}}{\int |w(\bar{r} - \vec{d}/2)|^2 |w(\bar{r} + \vec{d}/2)|^2 N_{totale}^2 d\bar{x}} - 1 = \frac{1}{N_{totale}^2} \sum_{jl} e^{\frac{im}{\hbar t} (\vec{r}_l - \vec{r}_j) \cdot \vec{d}} n_j n_l$$

$$(2.38)$$

Per capire facilmente quale sia il contributo dell'effetto di Hanbury Brown e Twiss nella (2.38) è utile studiare il modello semplice di due atomi localizzati in due buche di potenziale. Per uno stato iniziale di Fock $|\Psi\rangle = \hat{a}_1^{\dagger} \hat{a}_2^{\dagger} |0\rangle$ si ottiene [15]:

$$G^{(2)}(\vec{r_1}, \vec{r_2}) = \frac{2}{(\hbar t/m\sigma_0)^{2d}} \eta \cos(\frac{m}{\hbar t}(\vec{r_1} - \vec{r_2}))$$
(2.39)

dove d è la dimensionalità del sistema ed $\eta = 1$ per i bosoni e -1 per i fermioni. Questo termine oscilla in funzione della distanza fra i due punti a causa dell'interferenza fra due particelle. Dalla figura 2.6 si può vedere come la larghezza delle oscillazioni decresca all'aumentare del numero di siti e che il verso del picco è determinato dal segno di η , ovvero dalla statistica quantistica delle particelle misurate e non dalle fluttuazioni di numero dello stato Isolante di Mott.



Figura 2.6: Funzioni di correlazione del secondo ordine normalizzate per una catena di 2,4,40 siti nella fase Isolante di Mott. Immagine adattata da [15].

2.4.2 Risultati attesi

Cerchiamo ora di determinare quali siano i segnali attesi nelle immagini di correlazione per un gas di atomi ultrafreddi che, prima del rilascio dal reticolo ottico, si trovava nella fase Isolante di Mott. In un reticolo ottico le posizioni dei siti $\vec{r_j}$ sono disposte secondo una matrice regolare e discreta. Assumendo che gli assi del reticolo siano mutualmente ortogonali, l'equazione (2.37) può essere immediatamente interpretata come il modulo quadro di una somma di Fourier:

$$C(\vec{d}) = \frac{1}{N_{totale}^2} \sum_{l} e^{\frac{im}{\hbar t} \vec{r_l} \cdot \vec{d}} n_l \sum_{l} e^{-\frac{im}{\hbar t} \vec{r_j} \cdot \vec{d}} n_j = \frac{1}{N_{totale}^2} |\sum_{q_1, q_2, q_3} e^{-\frac{ima_{latt}}{\hbar t} (q_1 d_1 + q_2 d_2 + q_3 d_3)} n_{q_1, q_2, q_3}|^2$$

$$(2.40)$$

dove d_i sono le componenti del vettore \vec{d} , n_{q_1,q_2,q_3} è l'occupazione del sito reticolare nella posizione $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3) = a_{latt} \cdot (q_1, q_2, q_3)$. I coefficienti di Fourier sono i numeri di occupazione n_{q_1,q_2,q_3} dei siti. La periodicità l della somma di Fourier per ciascuna direzione, che nel seguito chiameremo *lunghezza caratteristica*, può essere calcolata dal prefattore all'esponente:

$$l = \frac{ht_{TOF}}{m_{specie}a_{latt}} \tag{2.41}$$

dove m_{specie} è la massa della specie atomica in esame. Nel limite di tempi di espansione t_{TOF} lunghi, la distribuzione di densità misurata in funzione della distanza \vec{r} è equivalente alla distribuzione di momento (vedi § 4.3.1) $\vec{p} = m_{specie}\vec{r}/t_{TOF}$. In questo caso alla lunghezza caratteristica *l* corrisponde il momento $2\hbar k_{latt}$, dove k_{latt} è il vettore d'onda di un fascio laser del reticolo. In questo limite risulta che la periodicità della funzione di correlazione ha la stessa struttura del reticolo inverso del potenziale di intrappolamento.

Nell'immagine di correlazione ci si attende quindi la comparsa di picchi di correlazione a distanze multiple di l, disposti secondo la struttura del reticolo inverso del reticolo ottico. Per un numero di siti reticolari molto grande l'ampiezza teorica di ogni picco tende a 1 e la sua larghezza si stringe sempre più secondo la formula [15]:

$$\sigma_{picchi} = \frac{ht_{TOF}}{m_{specie}L_{sorgente}} \tag{2.42}$$

dove $L_{sorgente}$ è l'estensione in una direzione dell'area che agisce da sorgente per gli atomi, ovvero dell'area del reticolo occupata da atomi nella fase Isolante di Mott.

Sperimentalmente non si osserva il comportamento predetto dalla teoria perché non si misura direttamente la distribuzione di densità degli atomi, bensì la sua convoluzione con la funzione di risposta del sistema di rivelazione, detta anche *Point Spread Function (PSF)*. La PSF ha un raggio R che caratterizza la risoluzione del sistema. La convoluzione della densità atomica con questa funzione è:

$$n_{CCD}(\vec{r}) = \int PSF(\vec{r}' - \vec{r})n(\vec{r}')d\vec{r}' \qquad (2.43)$$

Il volume costituito dall'estensione lineare del campione L (vedi fig. 2.4b), per valori tipici del campione atomico, è molto più grande del volume dei picchi di correlazione della $g^{(2)}$. Questo causa una grande diminuzione dell'ampiezza dei picchi ed un significativo aumento della loro larghezza. In [69] è stata fatta una stima di questo effetto. La densità atomica misurata è data dall'integrazione lungo la direzione di rivelazione del numero di atomi presenti in un'area determinata dalla dimensione dei pixel della telecamera CCD: $n = N_{bin}/A_{px}$. Questo valore deve essere convoluto con la PSF che può essere approssimata da una gaussiana di larghezza σ_{PSF} . Tipicamente essa è più grande di ciascun bin e quindi ne determina l'area efficace. La funzione di correlazione ridotta, considerando la (2.43), per un numero di occupazione dei siti pari ad 1 diventa:

$$C(\vec{d}) = \frac{1}{4\pi N_{totale}} \left(\frac{l}{\sigma_{PSF}}\right)^2 \sum_{j} e^{-\left(\vec{d} - \frac{\vec{p}_j t_{TOF}}{m_{specie}}\right)^2 / 4\sigma_{PSF}^2}$$
(2.44)

Se le fluttuazioni del numero di atomi seguono una statistica di Poisson, le fluttuazioni misurate in ciascun bin scalano con $1/\sqrt{N_{bin}}$ per $N_{bin} \gg 1$. Questo segnale è distribuito su un certo numero di picchi di correlazione $N_{picchi} = 4\pi (w/l)^2$. Il numero di atomi medio per bin è ben approssimato da $N_{bin} = N_{totale} (\sigma_{PSF}/w)^2$. Sfruttando queste considerazioni si può stimare l'ampiezza del segnale di correlazione di ciascun picco:

$$C(\vec{d}_{picco}) \approx \frac{1}{N_{picchi}N_{bin}} \approx \frac{1}{4\pi N_{totale}} \left(\frac{l}{\sigma_{PSF}}\right)^2$$
 (2.45)

Da questa equazione ci si può attendere che l'ampiezza del segnale cresca $\propto t_{TOF}^2$ e, per valori sperimentali tipici, ci si aspetta che sia dell'ordine di 10⁻⁴ [69].

La larghezza dei picchi di correlazione può essere stimata in modo analogo e sarà sicuramente maggiore rispetto a quella teorica ma, comunque, verrà preservata la proporzionalità inversa rispetto alla dimensione lineare della sorgente $L_{sorgente}$. Questa è a sua volta $L_{sorgente} \propto N_{sorgenti}^{\frac{1}{3}}$ dove $N_{sorgenti}$ è il numero di sorgenti, ovvero di siti reticolari occupati da almeno un atomo nello stato Isolante di Mott.

A seguito di questa discussione, si prevede che per avere una buona visibilità dei picchi di correlazione sia vantaggioso usare un tempo di volo il più grande possibile, compatibilmente con una densità degli atomi sufficientemente grande. Inoltre sarà necessario acquisire in ciascuna condizione sperimentale un set di molte immagini per avere un campione statistico significativo ai fini del calcolo della media nella (2.37).

Capitolo 3

Descrizione dell'Apparato Sperimentale

In questo capitolo verrà descritto brevemente l'apparato sperimentale utilizzato per svolgere il lavoro descritto nei successivi capitoli 4 e 5. Questo apparato è stato progettato per lavorare sia con una singola specie atomica (87 Rb) sia con due contemporaneamente (87 Rb e 41 K) e permette di raffreddare tali campioni fino a temperature dell'ordine di 100 nK. Questa flessibilità è chiaramente controbilanciata da una maggiore complessità e dal maggior numero di elementi costruttivi richiesti.

Per prima cosa verranno discusse le proprietà delle due specie atomiche usate (§ 3.1), illustrando quali richieste sperimentali pongono per il loro efficace raffreddamento ed intrappolamento. In seguito saranno descritte le sorgenti degli atomi e l'apparato da vuoto (§ 3.2.1) e verranno illustrate tutte le sorgenti laser usate nell'esperimento (§ 3.2.2): per prime le tre responsabili del raffreddamento ed intrappolamento degli atomi, poi le due necessarie per la trappola di dipolo ottico e per il reticolo ottico, infine quella usata per il trasferimento di stato del potassio. Dopodiché sarà illustrato il sistema di generazione e controllo dei campi magnetici (§ 3.2.3) ed il sistema di rivelazione degli atomi (§ 3.2.4).

Per capire meglio l'uso di tutti questi elementi è opportuno illustrare brevemente la tipica procedura sperimentale usata per portare gli atomi alla temperatura di condensazione (questa procedura sarà illustrata in dettaglio nel § 4.1): i gas a temperatura ambiente di ⁸⁷Rb e ⁴¹K sono raccolti in due camere da vuoto separate dove sono preraffreddati con uno schema a Trappola Magneto-Ottica (MOT) 2D, poi sono spinti dentro la camera da vuoto principale nella quale vengono intrappolati insieme in una MOT 3D. Qui sono raffreddati ulteriormente fino ad una temperatura di centinaia di μ K, in seguito vengono pompati otticamente nello stato $|2,2\rangle$ e trasferiti in una trappola magnetica di dimensioni millimetriche (detta anche Millitrappola). Qui viene eseguito il raffreddare anche gli atomi di K per via di una redistribuzione termodinamica di energia fra le due specie (tale fenomeno viene chiamato raffreddamento simpatetico). Quando la miscela delle due specie raggiunge una temperatura di ~ 1 μ K l'evaporazione viene interrotta ed i due gas possono raggiungere la degenerazione quantistica, ovvero possono formarsi due Condensati di Bose-Einstein. A questo punto, a seconda dell'esperimento da svolgere, gli atomi possono essere mantenuti nella trappola magnetica oppure spostati in una trappola di dipolo ed, eventualmente, essere contemporaneamente confinati in un reticolo ottico. Una volta svolto l'esperimento il campione atomico sarà rivelato su una CCD usando la tecnica della rivelazione in assorbimento che sarà illustrata nel § 4.3.

3.1 I campioni atomici: ⁸⁷Rb e ⁴¹K

Il Rubidio ed il Potassio sono entrambi elementi appartenenti al gruppo degli alcalini, pertanto il loro stato elettronico fondamentale è caratterizzato dall'avere le shell interne completamente piene ed un unico elettrone di valenza nella shell più esterna. La struttura iperfine dei livelli (fig. 3.1) è descritta bene dal numero quantico "momento angolare totale" $\vec{F} = \vec{J} + \vec{I}$ dato dalla somma del momento angolare elettronico J e dallo spin nucleare I. Per le proprietà appenda descritte, al momento angolare elettronico contribuisce solo lo spin elettronico e, avendo entrambi gli atomi spin nucleare I = 3/2, risulta che le due specie hanno la stessa struttura iperfine dei livelli. Ciò significa che i due elementi obbediscono alle medesime regole di selezione e quindi hanno le stesse transizioni permesse.

Per raffreddare questi campioni atomici viene usata la tecnica del Raffreddamento Doppler basata sull'interazione dispersiva degli atomi con la luce laser e questo metodo nella configurazione tipica richiede la presenza di una serie chiusa di transizioni fra livelli atomici. Per gli atomi alcalini è necessario l'uso di due sole frequenze laser per ottenere questo schema e quindi generalmente si usano due sorgenti laser distinte. La prima viene convenzionalmente chiamata *principale* o di *raffreddamento* perché è vicina ad una frequenza di transizione abbastanza isolata e quindi chiusa, tenendo conto delle regole di selezione. La seconda sorgente è detta di *ripompaggio* perché serve per reimmettere nel ciclo di assorbimento/emissione della frequenza principale quegli atomi che sono stati pompati otticamente in livelli diversi dai due usati per la transizione di raffreddamento e che quindi andrebbero persi.

La transizione di raffreddamento è la $|{}^{2}S_{1/2}, F = 2\rangle \rightarrow |{}^{2}P_{3/2}, F' = 3\rangle$, mentre quella di ripompaggio è la $|{}^{2}S_{1/2}, F = 1\rangle \rightarrow |{}^{2}P_{3/2}, F' = 2\rangle$. La frequenza del fascio di raffreddamento è abbastanza vicina alla transizione $|{}^{2}S_{1/2}, F = 2\rangle \rightarrow$ $|{}^{2}P_{3/2}, F' = 2\rangle$ da indurre una probabilità di transizione fuori risonanza non trascurabile, portando ad ogni ciclo di assorbimento/emissione ad una perdita di atomi su questo livello ed alla conseguente riduzione dell'efficenza del processo di raffreddamento. Il fascio di ripompaggio serve a compensare questo pompaggio ottico, chiudendo così la transizione. Il rapporto fra la probabilità di transizione di raffreddamento e quella fuori risonanza determina il bilanciamento della potenza necessaria in ognuno dei due fasci.

Per il ⁸⁷Rb (ed in generale per gli atomi alcalini) il fascio di raffreddamento deve essere di qualche ordine di grandezza più potente di quello di ripompaggio perché i livelli iperfini sono abbastanza separati in frequenza rispetto alla larghezza di riga di emissione della sorgente laser. Per il ⁴¹K questo non è più vero perché la spaziatura dei livelli eccitati è confrontabile con la larghezza di riga e pertanto la transizione prescelta non può più essere considerata chiusa. Inoltre la dinamica dei gradi di libertà interni coinvolge tutte le componenti iperfini dello stato eccitato, pertanto la forza di raffreddamento deriva da entrambi i fasci, rendendo non più adeguata la loro nomenclatura (che comunque useremo chiamando di raffreddamento la sorgente del fascio a frequenza più alta). É stato dimostrato in [73] che è necessaria un'attenta calibrazione delle potenze per raggiungere la temperatura Doppler per il potassio, richiedendo anche potenze confrontabili fra i due fasci impiegati.



Figura 3.1: Struttura iperfine dei livelli della riga D_2 del ⁸⁷Rb (a destra) e del ⁴¹K (a sinistra). Con ω_1 ed ω_2 sono indicate le frequenze dei fasci di ripompaggio e raffreddamento con i rispettivi spostamenti δ rispetto alla risonanza.

3.2 L'Apparato Sperimentale

L'apparato sperimentale è suddiviso in due tavoli ottici: sul primo sono collocate le sorgenti laser ed i circuiti ottici necessari per generare i fasci di raffreddamento, intrappolamento, trasferimento e rivelazione dei gas atomici; sul secondo sono disposti l'apparato da vuoto, le sorgenti atomiche, le bobine necessarie per generare i campi magnetici ed i due laser con i relativi circuiti ottici che creano la trappola di dipolo ottico ed il reticolo. I fasci laser creati sul primo tavolo vengono inviati nel secondo usando delle fibre ottiche e questo permette di disaccoppiare gli allineamenti dei circuiti ottici dei due banchi, presentando così un vantaggio per la stabilità e flessibilità del sistema.

3.2.1 Sorgenti degli atomi e Apparato da Vuoto



Figura 3.2: Schema dell'apparato da vuoto costituito da due camere esterne (ai lati) e da quella principale (al centro). In arancione è mostrata la direzione dei fasci che spingono gli atomi dalle camere esterne a quella interna, in rosso dei fasci della 3D-MOT ed in blu dei fasci della trappola di dipolo, del reticolo e di rivelazione. Nell'inserto è mostrata anche la distanza fra il centro della 3D-MOT e quello della trappola millimetrica.

Per poter raffreddare un campione atomico a temperature molto basse esso deve essere necessariamente isolato dall'ambiente in modo da ridurre al minimo le collisioni con altri atomi che causerebbero solo riscaldamento e quindi perdite nel campione stesso. L'unico modo pratico per ottenere ciò è collocare le sorgenti in un apparato da vuoto che possa mantenere una condizione di vuoto spinto.

L'apparato da vuoto è mostrato in fig. 3.2 ed è costituito da tre differenti camere: due camere esterne usate per il preraffreddamento di ognuna delle specie ed una camera centrale dove viene raggiunto lo stato di condensato e dove viene svolto il successivo esperimento. I dispenser dei campioni (SAES Getters) si trovano all'estremo destro (⁴¹K) e sinistro (⁸⁷Rb) dell'apparato e, quando sono percorsi da corrente, rilasciano nelle camere esterne il corrispondente vapore atomico a temperatura ambiente. Regolando la corrente è possibile regolare la quantità di vapore rilasciata. Di fronte a ciascun dispenser si trova una pompa ionica (Varian Diode Cell 20 l/s) che serve a mantenere la pressione all'interno delle camere esterne al valore di 10^{-9} mbar.

Le due camere esterne sono identiche e costituiscono il primo stadio di raffreddamento degli atomi in quanto sono due trappole magneto-ottiche bidimensionali. La loro struttura è mostrata in fig. 3.3: ognuna ha una struttura cava a forma di parallelepipedo (80x35x35 mm) ricavata da un singolo blocco di titanio, sulle cui aperture laterali sono incollate quattro finestre ottiche di vetro BK7 con trattamento antiriflesso. I fasci laser utilizzati per la 2D-MOT sono quattro: per ognuna delle due direzioni trasverse (siano x e y) vi è un fascio di raffreddamento ed uno di ripompaggio polarizzati circolarmente in modo opportuno e retroriflessi, le loro dimensioni sono accordate con la forma allungata della camera mediante delle lenti cilindriche confocali, conferendo così una forma ellittica alla trappola.

Il campo magnetico è generato da una coppia di bobine rettangolari poste in configurazione anti-Helmholtz che sono avvolte attorno alla cella all'altezza delle facce superiore ed inferiore. Ognuna di esse è alimentata indipendentemente da un generatore di corrente lineare (CEP 03LD15B) in modo da ottimizzare l'allineamento verticale con la successiva 3D-MOT. Il gradiente magnetico è dell'ordine di 17 G/cm per il Rb e 14 G/cm per il K lungo x e y ed è trascurabile lungo z.



Figura 3.3: Schema delle due camere esterne con la corrispondente trappola magneto-ottica bidimensionale (2D-MOT).

La 2D-MOT permette di raffreddare gli atomi mediante un processo di interazione radiazione/materia lungo le direzioni trasverse perché l'intrappolamento causa un vero e proprio rallentamento del campione, mentre lungo l'asse z svolge solo il ruolo di selettore di velocità. Solo gli atomi con una velocità iniziale bassa transitano nella 2D-MOT per un tempo sufficiente da subire molti cicli di assorbimento/emissione, riducendo la loro velocità trasversa fino ad un valore che permetta il passaggio attraverso l'apertura di 1 mm verso la camera principale.

Per migliorare il flusso di atomi viene usato un quinto fascio diretto lungo z che spinge gli atomi raffreddati dalla cella della 2D-MOT alla camera principale, nel caso del Rb esso è ricavato dalla sorgente di raffreddamento, mentre per il K proviene da quella di ripompaggio.

Le camere di preraffreddamento sono collegate alla camera principale attraverso dei tubi di grafite di 10 cm con diametro interno di ~ 1 cm, montati dentro dei soffietti flessibili per evitare degli stress meccanici fra le due sezioni. Questa soluzione è necessaria per mantenere il maggior rapporto possibile del grado di vuoto fra le camere esterne e quella interna, in modo da ottimizzare le condizioni per il successivo raffreddamento evaporativo (un vuoto maggiore riduce ulteriormente le collisioni e permette di raggiungere temperature più basse).

La camera principale è fatta di acciaio, ha un'altezza di 9 cm ed un diametro esterno di 18 cm. Vi è collegata una pompa ionica (Varian Vac Ion Plus 55 1/s), per mantenere all'interno una pressione di 10^{-11} mbar, ed una pompa a sublimazione di titanio, necessaria per eliminare le sostanze rilasciate dal graduale degassamento dell'acciaio costituente la camera. Essa ha 8 finestre laterali in vetro antiriflesso e due finestre verticali molto grandi (diametro 13 cm), tali da permettere l'accesso ottico sia al centro esatto della camera dove viene creata la 3D-MOT, sia al centro della millitrappola che si trova ad una distanza di 27 mm dal centro. Anche la trappola di dipolo ed il reticolo ottico sono centrati su questa seconda posizione.

I fasci di spinta convogliano le due specie atomiche al centro dell'apparato dove vengono intrappolate, mischiandosi, in una 3D-MOT mostrata in fig. 3.4. Questa trappola tridimensionale è realizzata dall'intersezione di dodici fasci laser contropropaganti, due di raffreddamento e due di ripompaggio per ogni direzione, e dall'applicazione di un campo magnetico di quadrupolo (con lo zero al centro), generato da due bobine circolari poste in configurazione anti-Helmholtz di diametro esterno di 13 cm ed interno di 4 cm. Come si può vedere dalla figura esse sono avvolte su un supporto di alluminio raffreddato ad acqua il quale è a sua volta posto su uno stadio di traslazione meccanica, necessario per spostare gli atomi, mentre sono intrappolati nel campo di quadrupolo, dal centro della 3D-MOT a quello della trappola magnetica millimetrica (chiamata anche *millitrappola*). Con 4 A di corrente le bobine generano un gradiente di 16 Gauss/cm nella direzione assiale e sono alimentate da un generatore Agilent 6692A (60 V, 110 A).

Per compensare l'effetto di campi magnetici spuri, come quello terrestre intorno alla camera principale sono poste, per ogni direzione, una coppia di bobine di compensazione, chiamate *shim*, alimentate indipendentemente.

In questo apparato sperimentale la trappola magnetica è realizzata direttamente dentro la camera da vuoto (vedi inserto fig. 3.2) ed ha il vantaggio di avere una frequenza di trappola superiore a quella ottenibile usando lo schema classico con trappola magnetica esterna, a parità di potenza impegnata. Pertanto è possi-



Figura 3.4: Schema della trappola magneto-ottica tridimensionale (3D-MOT) con indicata la distanza del suo centro da quello della millitrappola. É mostrato anche il sistema mobile che permette di spostare gli atomi da una trappola all'altra.

bile ottenere un forte confinamento degli atomi ed un processo di raffreddamento evaporativo più veloce, senza peggiorare significativamente l'accesso ottico e con una minor potenza richiesta dal generatore di corrente (a parità di frequenza di intrappolamento). La trappola magnetica millimetrica verrà descritta più in dettaglio nel successivo § 3.2.3.

Seguendo l'orientamento della trappola magnetica introduciamo qui i nomi convenzionali usati per indicare le direzioni del piano orizzontale dell'apparato: la direzione *assiale* è quella che unisce il centro della camera principale con il centro della millitrappola, mentre quella *radiale* è ortogonale ad essa. Maggiori dettagli sull'apparato da vuoto e le soluzioni tecniche adottate si possono trovare in [75].

3.2.2 Sorgenti Laser

Laser per raffreddamento/intrappolamento:

\mathbf{Rb}

Come si può vedere dalla struttura dei livelli del Rubidio (fig. 3.1) la differenza di frequenza fra il fascio di raffreddamento e di ripompaggio è di circa 6.8 GHz e pertanto è conveniente usare due diodi laser distinti come sorgenti dei due fasci.

Per il raffreddamento usiamo un diodo laser Sharp GH0781JA2C, con potenza di emissione massima di 120 mW, montato in una cavità estesa in configurazione Littrow. Questa potenza non è sufficiente per lo scopo prefissato e pertanto il fascio viene iniettato in un amplificatore ottico Toptica DL-100 che riemette ~ 600 mW.

Il fascio di ripompaggio, per il motivo illustrato nel § 3.1, deve essere molto meno intenso e quindi sono sufficienti i 70 mW forniti da un diodo laser Sanyo DL7140-201 montato anch'esso in un cavità estesa in configurazione Littrow.

L'aggancio in frequenza viene fatto sfruttando uno schema di spettroscopia di saturazione in assorbimento con modulazione di frequenza ([74]). Parte dell'emissione di ciascun diodo viene prelevata con un cubo polarizzatore, viene opportunamente modulata e spostata di frequenza da un modulatore acusto-ottico (AOM) e poi viene inviata in una cella contenente vapori atomici di rubidio. Il segnale di assorbimento viene rilevato da un fotodiodo e le due sorgenti vengono agganciate su due diverse righe di riferimento dello spettro del Rb.

\mathbf{K}

I fasci di raffreddamento e ripompaggio del Potassio, come già illustrato, devono avere una potenza confrontabile e ben controllata. Per questo è stato scelto di usare un unico laser come sorgente, un Toptica DLX-110 a $\lambda = 767$ nm con potenza massima di 500 mW. La sua emissione inietta in un amplificatore ottico (chip EagleYard EYT-TPA-0765 da 3 A) che eroga ~ 900 mW, di cui il 90% viene usato il fascio di ripompaggio, mentre il resto viene inviato ad un AOM in doppio passaggio che sposta la frequenza di 548 MHz e poi viene iniettato in un altro amplificatore ottico identico al precedente per raggiungere la potenza richiesta. Grazie alla possibilità di usare un solo laser lo schema di aggancio deve essere uno solo e sfrutta la stessa tecnica impiegata per il rubidio. Vi è una differenza per quanto riguarda il punto di aggancio in frequenza: le transizioni del ⁴¹K sono molto meno intense di quelle del ³⁹K (è l'isotopo più abbondante in natura) e, pertanto, è stato scelto di riferirsi ad una transizione del ³⁹K.

Divisione dei fasci

L'uscita di ogni sorgente, come vedremo più avanti, non verrà usata solo per il raffreddamento ed il ripompaggio dei campioni atomici, ma anche per altri scopi. Pertanto la distinzione introdotta fra le sorgenti, chiamandole di raffreddamento o ripompaggio, verrà usata più in generale per indicare la differente origine dei fasci anche quando non sono usati per lo scopo letterale.

Sia per il potassio che per il rubidio l'uscita di ogni sorgente viene divisa in quattro diversi fasci usati rispettivamente nella 2D-MOT, nella 3D-MOT, nel pompaggio ottico necessario per ottimizzare l'intrappolamento magnetico ed infine nella rivelazione degli atomi. La divisione viene eseguita mediante una sequenza di lamine $\lambda/2$ e cubi polarizzatori alternati e tale soluzione risulta essere vantaggiosa perché permette di redistribuire velocemente la potenza totale senza ulteriori interventi sul tavolo ottico. Come vedremo nel capitolo successivo la procedura sperimentale per ottenere un condensato è composta da più fasi, ognuna delle quali può richiedere una specifica frequenza e potenza da ciascun fascio di raffreddamento e/o ripompaggio. Per ottenere ciò ognuno di essi viene fatto passare attraverso un AOM dedicato posizionato in configurazione di doppio passaggio, dal quale viene spostato in frequenza e controllato in ampiezza. Questa configurazione è molto conveniente rispetto ad un singolo passaggio poiché, a fronte di una maggiore perdita di potenza, l'allineamento è molto meno sensibile alle variazioni di frequenza e pertanto permette di lavorare in un ampio range senza intervenire sulle ottiche. Dopo il doppio passaggio i fasci vengono opportunamente combinati in base alla loro funzione e vengono iniettati in 7 fibre ottiche che mantengono la polarizzazione e la cui uscita è posta sul secondo tavolo dell'esperimento.

Una descrizione più dettagliata dello schema ottico può essere trovata in [75] e [76].

Laser per trappola di dipolo e laser per il reticolo ottico:

Trappola di dipolo

La trappola di dipolo impiegata nell'esperimento sfrutta lo schema a fasci incrociati, che permette un buon controllo dei suoi parametri sperimentali (come la profondità della trappola ed il rapporto fra le frequenze di intrappolamento nelle due direzioni). Secondo questo schema, due fasci laser polarizzati ortogonalmente vengono focalizzati sugli atomi da direzioni ortogonali. Se l'ampiezza dei due fasci nel fuoco è scelta uguale viene creato un volume di intrappolamento circa isotropo e con un forte confinamento in ogni direzione, altrimenti è possibile rendere una direzione più confinante delle altre.

La sorgente dei due fasci è la stessa ed è costituita da un laser commerciale (IPG YLR-20-1064-LP-SF), il cui mezzo attivo è una fibra drogata con Yb in grado di emettere fino a 20 W di potenza in continua. La sua emissione è a singolo modo con centro a $\lambda = 1064$ nm e larghezza di riga di circa 100 kHz. Questa lunghezza d'onda è scelta in modo tale da essere molto lontani dalla risonanza con le transizioni D_1 e D_2 sia del ⁸⁷Rb che del ⁴¹K, così risultano valide le approssimazioni fatte nel § 1.2 e dalle equazioni (1.23) e (1.24) si ricava che il rate di scattering degli atomi con i fotoni della luce di intrappolamento è trascurabile, permettendo così un tempo di intrappolamento lungo.

L'uscita della cavità ottica del laser è direttamente accoppiata con una fibra ottica la cui seconda estremità è posta sul tavolo dell'esperimento. Qui è collocato lo schema ottico (fig. 3.5) necessario per controllare indipendentemente la potenza e la frequenza di ciascuno dei due fasci di trappola: il fascio in ingresso, con waist di 2.75 mm e polarizzazione lineare, viene ruotato da una lamina $\lambda/2$ per essere suddiviso da un cubo polarizzatore in due fasci ognuno dei quali passa attraverso un AOM che ne modifica la frequenza di 110 MHz. La differenza di frequenza fra i due risulta essere di 220 MHz ed questo, congiuntamente alla polarizzazione ortogonale, permette di evitare interferenze quando i due fasci saranno incrociati

per formare la trappola. La luce laser passa attraverso un telescopio che ne regola il waist e viene iniettata in una fibra ottica a cristalli fotonici ad alta potenza e conservante la polarizzazione (Crystal Fibre LMA-PM-15). Le uscite delle due fibre sono poste nelle immediate vicinanze delle finestre radiali ed assiali del piano orizzontale della cella principale dell'apparato da vuoto ed i due fasci vengono incrociati nella regione della trappola magnetica millimetrica con un waist di $\sim 80 \ \mu m$ e potenza massima di 1.5 W. La profondità della risultante trappola è di $\simeq 200E_R$ con frequenze per il rubidio di ≈ 70 Hz.

La potenza che investe effettivamente gli atomi viene monitorata, per ognuno dei due fasci, prelevando parte di quella in uscita dalla camera con un beamsampler ed inviandola su un fotodiodo. Esso forma, insieme al driver dell'AOM e ad un controller PID, un circuito di feedback per stabilizzare la potenza dei fasci con tempi di risposta dell'ordine del ms.



Figura 3.5: Schema ottico usato per il controllo dei due fasci che costituiscono la trappola di dipolo.

Reticolo Ottico

Nel nostro apparato sperimentale è prevista la possibilità di applicare al campione atomico, una volta che questo ha raggiunto lo stato di condensato, un potenziale periodico stazionario di ampiezza variabile in tutte le direzioni spaziali o solo alcune di queste. In ragione di queste proprietà questo potenziale creato con la luce viene detto reticolo ottico. Esso viene creato usando tre fasci laser ortogonali che vengono retroriflessi per formare tre coppie di onde stazionarie.

La sorgente dei fasci è un laser commerciale (Innolight Mephisto Mopa) con emissione a $\lambda = 1064$ nm fino a 18 W di potenza. L'uscita del laser viene divisa mediante una serie di tre lamine $\lambda/2$ intervallate da cubi polarizzatori in tre fasci (ognuno dei quali costituirà una delle tre direzioni del reticolo) che vengono fatti passare per un AOM dedicato. Questi tre modulatori acusto-ottici svolgono tre ruoli: determinano i tempi i tempi di accensione e spegnimento dei singoli fasci, in quanto sono caratterizzati da un tempo di accensione/spegnimento molto breve (~ 1 μ s), regolano la potenza di ciascun fascio che li attraversa mediante la variazione dell'intensità del segnale a radiofrequenza che li pilota, infine variano la frequenza dei tre fasci in modo da ridurre le possibili interferenze che possono avere luogo per una non perfetta ortogonalità dell'allineamento e/o della polarizzazione. Dopo gli AOM la luce viene fatta entrare nella cella principale in direzione radiale ed assiale attraverso le stesse finestre usate dalla trappola di dipolo, mentre il fascio verticale accede dalla finestra superiore, tutti e tre vengono focalizzati con un waist di ~ 170 μ m sul minimo della trappola magnetica millimetrica ed infine, dopo essere usciti dalla cella, vengono retroriflessi con degli specchi dicroici. Questi specchi sono altamente riflettenti a $\lambda = 1064$ nm, mentre hanno una buona trasmissione a $\lambda = 780$ nm e sono necessari perché durante la fase di preparazione del condensato e durante la rivelazione altri fasci devono passare lungo queste tre direzioni.

Il potenziale reticolare che viene creato ha un periodo spaziale di $\lambda/2 = 532$ nm, mentre la profondità in ciascuna direzione dipende dall'intensità di ogni fascio, con una potenza di $\simeq 700$ mW è $\approx 50E_R$. In realtà, per determinare sperimentalmente il valore della profondità del reticolo non è sufficiente sfruttare l'equazione (1.34) che permette di ricavare il potenziale di dipolo V_{dip} nota l'intensità dei fasci laser e la distanza in frequenza dalla risonanza poiché ci sono molti fattori (come disturbi dovuti alle finestre ottiche di accesso alla camera, allineamenti non perfetti o polarizzazioni leggermente diverse, ecc...) che possono rendere l'intensità letta da un fotodiodo fuori dall'apparato da vuoto sensibilmente diversa da quella che investe gli atomi. Pertanto la calibrazione dell'ampiezza del reticolo, ovvero la determinazione del parametro s viene fatta usando la tecnica della diffrazione Raman-Nath [77]: si illuminano gli atomi per pochi μs con i fasci del reticolo e si ricava s studiando nell'immagine del gas in espansione la distribuzione degli atomi tra i vari ordini di Bragg in cui sono stati eccitati dal precedente impulso.

Laser per il trasferimento di stato:

Nel sistema utilizzato per svolgere questo lavoro di tesi è presente un'ulteriore sorgente laser che, se richiesto dall'esperimento, può essere utilizzata per portare gli atomi di potassio dallo stato $|2,2\rangle$ allo stato $|1,1\rangle$ o viceversa. Questo trasferimento avviene sfruttando una transizione Raman a due fotoni la quale verrà discussa più in dettaglio nel § 4.2. Sperimentalmente esso richiede due fasci che abbiano due diverse frequenze, tali che la loro differenza sia pari alla frequenza della transizione a singolo fotone fra i due livelli d'interesse e che il loro detuning rispetto a questa frequenza sia molto grande. Inoltre è importante che il detuning sia molto maggiore della larghezza di questa transizione ($\Delta \gg \Gamma$) per avere un processo molto veloce.

La sorgente dei due fasci è un laser commerciale a Ti : Zaffiro della Coherent, pompato otticamente da un laser a stato solido (Coherent Verdi V18, potenza

massima 18 W) a $\lambda = 532$ nm. Il Ti : Zaffiro ha una cavità regolabile che permette l'emissione in un ampio range di lunghezze d'onda (760 nm $< \lambda < 840$ nm) e per questa applicazione è stato allineato per emettere a $\lambda = 770.40$ nm con una potenza massima di 3 W. Come mostrato in fig. 3.6, la sua emissione viene fatta arrivare su un primo AOM che ne regola la potenza ed agisce anche da interruttore, poi viene deviata da un cubo polarizzatore su un secondo AOM posto in configurazione di doppio passaggio ed operante a frequenza pari alla metà della separazione in energia degli stati $|1,1\rangle \in |2,2\rangle$. Diversamente da quello che avviene per gli altri AOM, qui viene riflesso indietro non solo l'ordine -1, ma anche l'ordine 0, così si ottengono contemporaneamente i due fasci richiesti sia con la giusta separazione in frequenza che con un buon detuning. I due fasci tornano indietro insieme, attraversano il cubo e vengono iniettati in fibra per essere poi inviati al momento opportuno sugli atomi lungo la direzione assiale. Hanno entrambi una potenza di 80 mW ed una larghezza di 500 μ m, la loro polarizzazione è un'opportuna combinazione di π, σ^+ e σ^- (rispetto al campo magnetico diretto verticalmente).



Figura 3.6: Schema ottico usato per la generazione dei due fasci laser usati per il trasferimento di stato del potassio.

3.2.3 Generazione e Controllo dei Campi Magnetici

Millitrappola

La trappola magnetica impiegata in questo apparato sperimentale è del tipo "Ioffe-Pritchard": essa è formata da due bobine cilindriche in cui scorre la stessa corrente e da quattro fili conduttori disposti parallelamente all'asse delle bobine percorsi da correnti a due a due opposti. Questo sistema genera un campo di tipo armonico nelle vicinanze del minimo (diverso da zero) che diventa quadrupolare allontanandosi da esso. Lo schema più diffuso per realizzare questa trappola prevede la costruzione delle bobine al di fuori dell'apparato da vuoto, mentre una seconda possibilità è data dall'uso di piccoli chip con piste elettriche inseriti direttamente nella camera principale. Nel nostro esperimento si è cercato di sfruttare parte dei vantaggi di ciascun tipo scegliendo una soluzione intermedia: è stata utilizzata una trappola magnetica di dimensioni millimetriche (detta anche *millitrappola*) inserita direttamente all'interno della camera da vuoto principale (vedi inserto fig. 3.2). La sua struttura è mostrata in fig. 3.7 ed è costituita da un tubo di rame lungo 17 mm con diametro esterno di 9 mm ed interno di 5 mm, con due tagli longitudinali, fissato su un chip ceramico sul quale sono saldate due tracce circolari di rame connesse esternamente al circuito del generatore di corrente Agilent 6671 (0-8 V, 0-220 A). All'esterno dell'apparato da vuoto, a 4 cm dal centro, è collocata una coppia di bobine concentriche usate per controllare il valore del fondo del campo aggiungendo un bias.



Figura 3.7: A sinistra: schema della millitrappola disassemblata. Al centro e a destra: corrispondenza tra le correnti nella millitrappola con quelle in una trappola di Ioffe-Pritchard e particolari del circuito inserito nel vuoto.

Attraverso uno sviluppo in multipoli al secondo ordine vicino al minimo possiamo trovare che il modulo del campo ha un profilo armonico in coordinate cilindriche:

$$|B(z,\rho)| \simeq (b_0 + b'_0) + \left(\frac{b_2}{2}\right) z^2 + \left(\frac{b_1^2}{2(b_0 + b'_0)}\right) \rho^2 \tag{3.1}$$

dove $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, b_1 e b_2 sono i termini di primo e secondo ordine dell'espansione in multipoli, b_0 è il campo di bias della trappola e b'_0 è il campo di bias dovuto alle bobine esterne. Data la simmetria cilindrica del sistema le frequenze armoniche di trappola con cui oscillano gli atomi sono due: una per la direzione longitudinale

$$\omega_z^2 = \mu_B m_F g_F \frac{b_2}{m} \tag{3.2}$$

e l'altra per le due direzioni trasverse

$$\omega_{\perp}^2 = \mu_B m_F g_F \frac{b_1^2}{m(b_0 + b_0')} \tag{3.3}$$

Come si può vedere dall'equazione (3.2) la frequenza assiale dipende solo dalla geometria della millitrappola e dalla corrente, mentre dall'equazione (3.3) si ricava che la frequenza radiale può essere modificata cambiando il campo di bias. Con una corrente di 70 A si hanno le seguenti frequenze armoniche per il ⁸⁷Rb: $\omega_z = 2\pi \cdot 16.5$ Hz e $\omega_\perp = 2\pi \cdot 204$ Hz. Le frequenze per il ⁴¹K sono più grandi di un fattore $\sqrt{m_{Rb}/m_K}$ per la differente massa delle due specie: $\omega_z = 2\pi \cdot 24$ Hz e $\omega_\perp = 2\pi \cdot 297$ Hz.

Campo Feshbach

Il sistema di bobine in configurazione anti-Helmholtz che genera il campo usato per formare la 3D-MOT è già stato descritto nel § 3.2.1, ma svolge anche una seconda funzione quando viene commutato, mediante un set di due relais elettromeccanici, nella configurazione Helmholtz. In questo stato genera un campo magnetico uniforme che può essere usato per controllare l'interazione fra gli atomi di Rb e K sfruttando le risonanze di Feshbach.

La risonanza di Feshbach è una risonanza nello scattering a 2 corpi. Si ha quando l'energia dei due atomi nel canale di entrata coincide con l'energia di uno stato legato degli atomi in un diverso canale. Per "canale" si intende il set di numeri quantici iperfini quando gli atomi sono lontani tra loro. La coincidenza in energia si può indurre mediante l'applicazione di un campo magnetico esterno, quando i due canali hanno momenti magnetici diversi. In prossimità della risonanza di Feshbach, la lunghezza di scattering *a* mostra un comportamento divergente di tipo "dispersivo" ed assume tutti i valori reali. Di conseguenza l'energia d'interazione può diventare attrattiva, repulsiva o anche nulla. Per a = 0, si annulla la sezione d'urto a 2 corpi, ma non quella delle collisioni a 3 corpi.

Per controllare l'interazione in modo preciso e stabile è necessario che il campo magnetico fluttui molto poco e ciò richiede una grande stabilità in corrente dal generatore. L'Agilent 6692A rispetta questo requisito, ma sfortunatamente ha un tempo di variazione della corrente di ~ 1 ms che rende impossibile, quando necessario, variare il campo in maniera rapida. Pertanto, in parallelo all'Agilent, è inserito un alimentatore Kepco BOP 20-10M (± 20 V, ± 10 A) che ha tempi di salita/discesa di pochi μ s (i rami dei due strumenti sono isolati con dei diodi ad alta potenza). La corrente erogata da questo generatore deve essere stabilizzata e questo viene fatto usando un circuito di feedback: un controller PID confronta il valore di voltaggio generato dalla scheda di controllo dell'esperimento con quello misurato ai capi di un resistore di precisione (Isabellenhütten RUG-Z da 0.5 Ω) e pilota il generatore per correggere la differenza. Il voltaggio effettivamente applicato viene monitorato con un trasduttore di corrente (LEM IT-150-S). Con questo sistema è possibile eseguire rampe di campo magnetico fino a 1.44 G/ms.

Una descrizione più completa del circuito e di come viene eseguita la calibrazione del campo magnetico può essere trovata in [78].

3.2.4 Sistema di rivelazione

Come già accennato nell'introduzione di questo capitolo la tecnica usata per indagare il campione di atomi ultrafreddi è quella della rivelazione in assorbimento. Gli atomi vengono illuminati per poche decine di microsecondi da un fascio laser risonante ad una transizione atomica, assorbendone parte dell'intensità, e la rimanente luce viene inviata su una telecamera a tecnologia CCD posta fuori dall'apparato da vuoto attraverso un sistema di specchi e lenti. Dall'assorbimento misurato è possibile ricavare la densità della nube atomica. Questa tecnica di rivelazione è distruttiva in quanto gli atomi subiscono un forte riscaldamento e successivamente si disperdono nell'apparato da vuoto, richiedendo la ripetizione di tutta la procedura sperimentale su un nuovo campione per eseguire un'altra misura.

Gli atomi possono essere rivelati sia mentre si trovano dentro una trappola (rivelazione *in situ*), caso utile per studiare la loro distribuzione spaziale, sia spegnendo velocemente i potenziali di confinamento e illuminandoli dopo un tempo t_{exp} mentre espandono liberamente (cadendo anche verticalmente per effetto della forza di gravità). Questa seconda procedura è detta rivelazione *in tempo di volo* o *in Time of Flight (TOF)* e, se t_{exp} è sufficientemente lungo, permette di ricavare la distribuzione di impulso degli atomi prima dello spegnimento del potenziale confinante (vedi § 4.3.1).

Nel nostro schema di rivelazione la nube atomica può essere illuminata contemporaneamente dalla direzione assiale e da quella verticale, permettendo così di risalire alla distribuzione di densità tridimensionale del campione. I fasci laser di rivelazione del Rubidio e del Potassio sono entrambi risonanti con la transizione chiusa $|2,2\rangle \rightarrow |3,3\rangle$ ed hanno una potenza di ~ 15 μ W per direzione, inferiore ad un quarto dell'intensità di saturazione della transizione. Il sistema di lenti all'uscita dell'apparato da vuoto costituisce un telescopio che aumenta la dimensione dei fasci prima del loro arrivo sulla CCD, aumentando la risoluzione del sistema che così risulta essere limitata dalla diffrazione sulle lenti stesse. Le lenti impiegate sulle due direzioni differiscono fra loro e portano ad una risoluzione di 15 μ m lungo la direzione assiale con un fattore di ingrandimento di 1.99 ± 0.05, mentre lungo la direzione verticale si ha una risoluzione di 8 μ m ed un ingrandimento di 2.5 ± 0.1.

Per definire l'asse di quantizzazione durante la rivelazione viene applicato un piccolo campo magnetico rispetto al quale ciascun fascio laser deve essere polarizzato σ^+ : dato che è impossibile rispettare questa condizione contemporaneamente per la luce verticale ed orizzontale, solo una direzione alla volta godrà di una rivelazione ottimale.

La telecamera usata per l'acquisizione delle immagini è una Theta System SIS1-s285 con sensore CCD Sony ICX285AL da 1392x1040 pixel (con pixel quadrati di lato 6.45 μ m) ed efficenza quantica > 65% a 780 nm. Questa telecamera è dotata di un sistema interlinea, ovvero accanto ad ogni riga di pixel del sensore esposti alla luce si trova una riga di pixel oscurati, che presenta il vantaggio di permettere l'acquisizione di due immagini ad una distanza temporale estremamente ravvicinata ($\simeq 1 \ \mu$ s), trasferendo i dati della prima immagine contenuti in ciascuna riga illuminata nella riga adiacente mascherata ed iniziando subito l'acquisizione della seconda. Sfortunatamente questa modalità permette di regolare solo il tempo di esposizione della prima immagine, mentre la seconda è esposta per tutto il tempo necessario per trasferire la prima al computer di acquisizione ($\sim 300 \ ms$), ciò porta anche alla necessità di attendere un tempo non inferiore a 550 ms fra l'acquisizione di una coppia di immagini e l'altra. Per limitare il primo inconveniente è posto immediatamente di fronte alla telecamera un otturatore meccanico molto veloce con tempi di apertura/chiusura di $\sim 2 \ ms$.

La procedura di acquisizione delle immagini ed il fondamento teorico della tecnica di rivelazione saranno illustrati più in dettaglio nel \S 4.3.

Capitolo 4 Sequenza Sperimentale

In questo capitolo sarà illustrata nel primo paragrafo la procedura sperimentale che permette di ottenere un doppio condensato di Bose-Einstein a partire da un gas a temperatura ambiente di atomi di ⁸⁷Rb e di ⁴¹K. Nel § 4.2 verrà descritta la nuova tecnica impiegata per trasferire gli atomi dal livello $|2, 2\rangle$ al $|1, 1\rangle$ o viceversa. Successivamente nel § 4.3.1 sarà illustrata la teoria che sta alla base della tecnica di rivelazione in assorbimento e la sua realizzazione pratica (§ 4.3.2). Infine nel § 4.4 sarà discussa la procedura di misura usata per svolgere l'esperimento descritto in questo lavoro di tesi, evidenziando i requisiti sperimentali e le differenze presenti nella sequenza fra il caso dello studio di una singola specie o di entrambe.

4.1 Procedura di preparazione del campione atomico:

4.1.1 Trappola Magneto Ottica (MOT)

Gli atomi di Rubidio e di Potassio vengono rilasciati sotto forma gassosa dai dispenser collocati alle estremità delle due camere da vuoto laterali. Essi si trovano circa alla temperatura ambiente ed hanno una densità ρ dell'ordine di 10⁸ cm⁻³, pertanto la loro densità nello spazio delle fasi (PSD) è $\lambda_B^3 \rho \sim 10^{-19}$. Per arrivare alla transizione di fase verso la BEC è tipicamente necessario raggiungere una PSD ~ 1. Il primo passo verso questo obiettivo viene svolto dalle trappole Magneto-Ottiche bidimensionali.

Gli atomi che entrano nelle camere da vuoto laterali vengono raffreddati dallo schema 2D-MOT nella direzione trasversale alla cella e vengono selezionati in velocità lungo quella longitudinale, permettendo il passaggio verso la camera centrale solo della frazione di atomi con velocità iniziale più bassa. Usando un fascio di spinta, descritto nel § 3.2.1, si ottiene un flusso di ~ 10^9 atomi/s verso la camera principale dove le due specie atomiche vengono intrappolate e raffreddate in tutte le direzioni da una 3D-MOT, raggiungendo una temperatura di 100 μ K per il Rb e 1 mK per il K ed una PSD di 10⁻⁸. Una volta raggiunto il numero di atomi desiderato (tipicamente in 20 s), monitorato attraverso la fluorescenza, il caricamento viene interrotto spegnendo i fasci della 2D-MOT.

4.1.2 Compressione, Melassa Ottica e Pompaggio ottico

Per raggiungere temperature inferiori ed aumentare la PSD non possono più essere usate trappole magneto-ottiche per via del loro limite inferiore di temperatura legato al processo di interazione con i fotoni (vedi § 1.2.2), pertanto una soluzione possibile è trasferire gli atomi in una trappola puramente magnetica. Prima di fare ciò vengono eseguiti tre diversi passaggi: una compressione, una fase di Melassa Ottica e un pompaggio ottico verso un livello opportuno.

Per prima viene la fase di MOT compressa (CMOT) che serve ad aumentare la densità del campione senza influenzare significativamente la sua temperatura [79]. Mantenendo i fasci di 3D-MOT accesi viene alzata la corrente nelle bobine di quadrupolo da 4 A a 10 A, aumentando così di un fattore 2.5 il gradiente magnetico, poi dopo 85 ms i fasci di raffreddamento vengono spostati in frequenza ancora più lontano dalla risonanza per sopprimere l'assorbimento di fotoni. Questa situazione dura per altri 10 ms.

Per compensare il riscaldamento avvenuto nella CMOT viene effettuato uno stadio di raffreddamento in Melassa Ottica: la corrente nelle bobine viene spenta ed i fasci vengono portati più vicino alla risonanza. Questa fase dura per soli 4 ms per evitare una significativa espansione della nuvola atomica dovuta all'assenza di confinamento (il potassio tende ad espandersi più rapidamente perché ha massa minore ed è raffreddato con minore efficenza), ed è seguita da un 1 ms aggiuntivo in cui solo i fasci di ripompaggio sono accesi per portare tutti gli atomi nello stato iperfine F = 2, necessario per il passaggio successivo.

Per ottenere un trasferimento efficiente in trappola magnetica tutti gli atomi devono trovarsi in un opportuno stato iperfine tale da rimanervi intrappolato. Come visto nel § 1.2.1 in una trappola magnetica possono essere intrappolati gli stati che hanno prodotto $m_F g_F > 0$ e per il ⁸⁷Rb ed il ⁴¹K, avendo essi la stessa struttura Zeeman iperfine, questi stati sono: $|F = 2, m_F = 2\rangle$, $|F = 2, m_F = 1\rangle$ ed $|F = 1, m_F = -1\rangle$. Fra questi è stato scelto di usare il $|F = 2, m_F = 2\rangle$ perché ha la maggior dipendenza dal campo $(m_F g_F \mu_B / h = 1.4 \text{ MHz/G})$ e perché è più stabile rispetto alle interazioni interspecie. Il trasferimento viene eseguito accendendo un campo magnetico uniforme di 0.5 G, per definire un asse di quantizzazione, ed inviando in direzione verticale per ~ 320 μ s quattro fasci polarizzati σ^+ detti di *pompaggio ottico*, uno di raffreddamento vicino alla risonanza con la transizione $|^2S_{1/2}, F = 2\rangle \rightarrow |^2P_{3/2}, F' = 2\rangle$ ed uno di ripompaggio vicino a $|^2S_{1/2}, F = 1\rangle \rightarrow |^2P_{3/2}, F' = 2\rangle$ per ognuna delle due specie.

Dopo che il pompaggio ottico nello stato iperfine scelto è terminato, è necessario eliminare gli atomi di rubidio che sono andati ad occupare erroneamente lo stato $|F = 2, m_F = 1\rangle$ poiché causano collisioni inelastiche con gli atomi in $|F = 2, m_F = 2\rangle$, portando a perdite e riscaldamento nella successiva fase di evaporazione in trappola magnetica. Questo viene fatto semplicemente riducendo il campo quadrupolare per ~ 200 ms in quanto questo stato è confinato in modo più debole rispetto a quello desiderato e tale tempo è sufficiente ad espellere questa classe di atomi dal campo di quadrupolare con un effetto marginale su quelli in $|F = 2, m_F = 2\rangle$.

4.1.3 Trasferimento in Quadrupolo

Per essere trasferiti nella millitrappola gli atomi devono essere spostati al suo centro percorrendo una distanza di 27 mm in direzione assiale dal centro della 3D-MOT (che a sua volta è al centro della camera da vuoto principale). La corrente nelle bobine di quadrupolo viene aumentata fino a 65 A in 50 ms, così gli atomi subiscono un forte confinamento magnetico sufficiente per indurli a seguire il campo anche quando questo è in movimento ed ad avere un'estensione spaziale più piccola possibile per entrare nel foro della millitrappola. A questo punto il supporto su cui sono fissate le bobine (fig. 3.4) viene traslato meccanicamente in 600 ms da un attuatore collegato ad un motore brushless fino a far coincidere il centro del campo di quadrupolo con quello della millitrappola. Le correnti nelle bobine vengono spente adiabaticamente in ~ 350 ms, in contemporanea all'aumento di quelle della millitrappola fino ad un valore stabile di 70 A. Maggiori dettagli sul sistema di traslazione e sul controllo dei campi magnetici possono essere trovati in [75].

4.1.4 Trappola Magnetica millimetrica e Raffreddamento Evaporativo

Ora che gli atomi si trovano in una trappola magnetica si può cercare di raffreddarli ulteriormente. Come già notato nel § 1.2.1, le trappole magnetiche sono prive in un meccanismo di raffreddamento proprio. La tecnica che si può applicare è detta *raffreddamento evaporativo* [80] e consiste nella rimozione selettiva degli atomi più energetici dalla trappola e nella successiva ritermalizzazione del campione rimasto, che causa una riduzione della temperatura media.

Il meccanismo di funzionamento è il seguente: gli atomi più veloci sono anche i più energetici ed, essendo distribuiti secondo la statistica di Maxwell-Boltzmann, mediamente si trovano nelle aree più esterne della trappola dove i sottolivelli Zeeman sono più spostati per via del differente campo magnetico secondo l'equazione:

$$\Delta E(\vec{r}) = m_F g_f \mu_B \left(B_0 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B}{\partial \vec{r}^2} \vec{r}^2 + \frac{1}{2B_0} \left(\frac{\partial B}{\partial \vec{r}} \right)^2 \vec{r}^2 \right)$$
(4.1)

Pertanto una classe atomica con un determinata energia cinetica è direttamente collegata ad una posizione spaziale ed ha un'energia magnetica ben precisa. Questo permette di trovare frequenze risonanti solo con gli atomi più energetici che si ha intenzione di eliminare, portandoli a compiere una transizione verso stati non intrappolati. La loro rimozione equivale a tagliare le code della distribuzione di Maxwell-Boltzmann e, se si permette al sistema di ritermalizzare mediante urti elastici, si trova una nuova distribuzione classica centrata su una temperatura media più bassa e con una larghezza inferiore. Riducendo progressivamente la frequenza applicata si eliminano classi di energia cinetica via via inferiore e così si abbassa la temperatura del campione, portando contemporaneamente ad un aumento della densità degli atomi al centro della trappola. In questo modo è possibile aumentare la densità nello spazio delle fasi fino al raggiungimento del valore critico per la transizione verso il condensato.

Questo metodo funziona bene per raffreddare il Rubidio perché il suo numero iniziale di atomi è sufficientemente alto $(2 \cdot 10^8 \text{ con } T_{in} \simeq 1 \text{ mK})$, mentre per il Potassio non permette di arrivare a temperature sufficientemente basse in quanto il numero iniziale di atomi è basso e è a temperatura superiore al limite Doppler. Per raffreddare entrambe le specie è stato dimostrato che il metodo migliore è quello del raffreddamento simpatetico [81] nel quale il Rb agisce da bagno termico per il K e, fintanto che $N_{Rb} \gg N_K$, il Potassio termalizza con il Rubidio e segue la sua temperatura. La frequenza usata per indurre lo spin-flip del Rb deve essere tale da non interessare anche il K e pertanto la scelta ricade sulla transizione a radiofrequenza $|F = 2, m_F = 2\rangle \rightarrow |F = 1, m_F = 1\rangle \sim 6.8$ GHz, ben lontana dallo spettro della seconda specie.

La rampa di evaporazione è prodotta da un generatore di segnale programmabile Agilent E8257D ed è inviata sugli atomi da un'antenna a guida d'onda posizionata sopra alla camera principale. Questa rampa deve essere opportunamente programmata in modo da deve avere una durata di tempo per ogni passo in frequenza tale da permettere la ritermalizzazione sia intratomica che interatomica, ovvero più lenta dell'inverso del rate di collisione elastica $\tau = 1/\bar{n}\bar{v}\sigma$ (dove \bar{n} è la densità media, \bar{v} la velocità media e σ la sezione d'urto elastica). Un esempio di questa rampa è mostrato in figura 4.1. Alla fine di questa procedura si può ottenere o un doppio condensato di Rb e K o un condensato di solo Rb, se si è scelto di non caricare K spegnendo la sua 2D-MOT.

4.1.5 Trappola Ottica

Una volta ottenuto il condensato di solo Rb o di Rb e K si può decidere quale esperimento svolgere. Nel caso in cui si voglia avere la possibilità di regolare le interazioni interatomiche, sfruttando le risonanze di Feshbach, è necessario l'uso della trappola di dipolo ottico al posto di quella magnetica poiché le risonanze sono negli stati $|1,1\rangle$ che non sono intrappolabili magneticamente.



Figura 4.1: Rampa di evaporazione tipica con un campo di bias totale di 2 G. La linea tratteggiata rappresenta la frequenza limite per gli atomi in $|2,2\rangle$ e nell'inserto è mostrata più in dettaglio la parte finale della rampa.

Solitamente il passaggio da una trappola all'altra viene eseguito prima della fine della rampa di evaporazione che viene interrotta ad una temperatura di circa 1 μ K, valore massimo intrappolabile dalla forza di dipolo alle potenze disponibili sui due fasci che generano il potenziale ottico. Per eseguire il trasferimento, visto che le due trappole sono concentriche, è sufficiente portare a zero con una rampa esponenziale la corrente nella millitrappola in 200 ms ed al tempo stesso alzare esponenzialmente le potenze dei due fasci. Quando questo viene fatto, la parte finale dell'evaporazione avviene direttamente nella trappola ottica, ma non più mediante la variazione della radiofrequenza perché tutti gli stati sono ugualmente intrappolati, ma mediante una progressiva riduzione della profondità della trappola, eseguita abbassando semplicemente la potenza dei fasci.

4.1.6 Reticolo Ottico

Dopo che è stato ottenuto un singolo o doppio condensato sia in trappola magnetica che in trappola di dipolo, al sistema può essere aggiunto un ulteriore potenziale confinante costituito dal Reticolo Ottico (descritto nel § 1.2.3). L'accensione dei fasci laser che generano il reticolo deve essere il più adiabatica possibile, ovvero deve essere sufficientemente lenta da compiere una transizione adiabatica dallo stato di condensato allo stato fondamentale del sistema atomico intrappolato nel reticolo. In questo modo gli atomi possono passare con continuità dallo stato superfluido, caratteristico della BEC, allo stato fondamentale proprio di un gas in un reticolo che è determinato dall'ampiezza del reticolo s.

Sperimentalmente i fasci del reticolo vengono accesi con una rampa a forma di S costruita da due rampe esponenziali (vedi § 4.2), la prima con costante di tempo positiva e la seconda con costante di tempo negativa. La durata della rampa complessiva viene scelta in funzione del ampiezza *s* desiderata, questo tempo viene diviso a metà ed ognuna delle due costanti di tempo viene impostata ad un valore pari ad 1/5 di quest'ultimo. Per s = 50 il tempo totale di rampa è $t_{ramp} = 200$ ms con $\tau_1 = 20$ ms e $\tau_2 = -20$ ms. Dopodiché gli atomi sono tenuti per un certo tempo t_{hold} nel reticolo ed infine i fasci sia del reticolo che della trappola di dipolo o la corrente nella trappola magnetica vengono spenti bruscamente, in pochi μ s, affinchè il sistema, prima di essere rivelato con la tecnica che sarà descritta nel § 4.3, non abbia il tempo di ritornare alla fase superfluida, ma presenti nella distribuzione d'impulso le caratteristiche dello stato assunto nel reticolo.



Figura 4.2: Immagine acquisita da un oscilloscopio in cui viene mostrata la rampa a forma di S di accensione del reticolo. Il segnale giallo rappresenta l'ampiezza del fascio assiale, quello verde del verticale, quello blu del radiale, mentre quello viola è il segnale di trigger dell'acquisizione.

4.2 Trasferimenti di Stato

Se un esperimento richiede la possibilità di regolare le interazioni interatomiche, oltre all'uso della trappola di dipolo è necessario avere sia gli atomi di ⁸⁷Rb che di ⁴¹K nello stato $|1,1\rangle$, perché solo per esso sono presenti risonanze di Feshbach a campi magnetici accessibili dall'apparato sperimentale in uso. Alla fine dello stadio finale del raffreddamento evaporativo gli atomi si trovano nello stato $|2,2\rangle$, pertanto devono subire un trasferimento di stato interno per trovarsi nello stato $|1,1\rangle$. Questo passaggio è molto delicato e deve essere eseguito nel minor tempo possibile in quanto la miscela di Rb e K risulta essere instabile quando una specie non è ancora "trasferita" (si trova in $|2,2\rangle$), mentre l'altra lo è già (è in $|1,1\rangle$).

Sono possibili due stati misti: Rb in $|1,1\rangle$ e K in $|2,2\rangle$ oppure Rb $|2,2\rangle$ e K in $|1,1\rangle$. Nella prima situazione si ha un'interazione interspecie di tipo attrattivo che può portare al collasso del sistema e la lunghezza di diffusione interspecie è sufficientemente grande ($a_{inter} \approx -2500a_0$) da rendere rilevante i processi di urto a tre corpi, causando il riscaldamento degli atomi. La seconda situazione è molto più instabile della prima perché in essa sono sono possibili collisioni inelastiche a due corpi, in grado di convertire energia Zeeman in energia cinetica e causare così un veloce riscaldamento e la perdita dello stato condensato. Pertanto è stato deciso di trasferire per primo il Rubidio e poi il Potassio, cercando di minimizzare il tempo totale impiegato.

Per gli scopi dei precedenti lavori svolti con l'apparato sperimentale descritto nel capitolo 3 era sufficiente indurre, tramite una microonda ed un opportuno campo magnetico, una transizione adiabatica Landau-Zener su entrambe le specie atomiche confinate in trappola ottica e, successivamente, portare a termine il raffreddamento evaporativo. Il trasferimento veniva svolto in tempi superiori ai 100 ms ed il successivo raffreddamento permetteva di compensare ampiamente il riscaldamento subito. Questo metodo presenta lo svantaggio di non permettere un controllo accurato sulla temperatura, la frazione di atomi condensata ed il rapporto fra il numero di atomi di Rb e K ottenuti alla fine dell'evaporazione. Questo costituiva un serio limite per il recente studio [50] del comportamento della transizione Superfluido-Isolante di Mott al variare delle interazioni interatomiche ed anche un possibile problema per il presente lavoro di tesi, pertanto sono stati messi a punto due nuovi schemi di trasferimento per il Rb ed il K che hanno permesso di ottenere un tempo totale impiegato di $\simeq 6$ ms.

Il trasferimento del Rb viene eseguito, come prima, ma in tempi molto più ristretti, inducendo una transizione adiabatica Landau-Zener mediante una microonda ed un campo magnetico. Se il sistema viene immaginato come a due livelli accoppiati da un parametro α e separati in energia linearmente in funzione di esso, allora, variando linearmente la separazione in energia, determinata dal campo magnetico, vi è una probabilità di transizione fra i due livelli proporzionale a:

$$P_{if} \sim e^{-2\pi \frac{\alpha^2}{\hbar \frac{\partial (E_f - E_i)}{\partial t}}} \tag{4.2}$$

I livelli $|1,1\rangle \in |2,2\rangle$ sono descrivibili come stati vestiti per l'effetto Stark dinamico causato dalla microonda applicata e sono ulteriormente spostati per effetto Zeeman dal campo magnetico. Vista questa dipendenza dei livelli sia dalla frequenza della radiazione EM applicata, sia dal campo magnetico, è possibile scegliere di variare uno dei due e tenere l'altro fisso, determinando così anche l'espressione esatta di α . Dalla (4.2) si può vedere che la probabilità di transizione aumenta al crescere della della distanza fra i livelli e della velocità della spazzata in α .

É stato deciso di mantenere il campo magnetico, prodotto dalle bobine della 3D-MOT alimentate dal generatore di corrente Kepco, ad un'intensità costante (≈ 71.46 G) tale da ridurre al minimo le interazioni interatomiche fra Rb e K e di variare la frequenza generata da un generatore di segnale HP8340. La rampa di frequenza è centrata sulla frequenza di risonanza della transizione $|2, 2\rangle \rightarrow |1, 1\rangle$ al dato valore di campo ed ha durata di 2 ms. La microonda viene inviata sugli atomi dalla stessa antenna a guida d'onda usata per l'evaporazione commutando il suo ingresso dall'Agilent E8257D al HP8340 con uno switch molto veloce ($\approx 1 \ \mu s$). Al termine della rampa viene inviato un impulso di 500 μs di luce risonante con lo stato $|2, 2\rangle$ per eliminare la piccola frazione di atomi non trasferiti ($\sim 2\%$).

Il trasferimento del K viene fatto impiegando una transizione Raman a due fotoni con un impulso π . Consideriamo un sistema a tre livelli, come in figura 4.3, i primi due accoppiati da una frequenza ω_1 di intensità I_1 ed i secondi due da una frequenza ω_2 di intensità I_2 , entrambe con detuning rispetto alla risonanza a singolo fotone pari a Δ . $\Omega_{1,2} = \Gamma \sqrt{I_{1,2}/I_s}$ sono le frequenze di Rabi associate alle due transizioni, con $\Gamma \in I_s$ larghezza della riga ed intensità di saturazione del livello eccitato $|2\rangle$. Per il Rb ed il Potassio questi stati corrispondono a $|1\rangle = |2,2\rangle$, $|2\rangle$ è dato da entrambi i livelli di struttura fine ${}^2P_{3/2} \in {}^2P_{1/2}$ (con $\Gamma \simeq 2\pi \cdot 6$ MHz), mentre $|3\rangle = |1,1\rangle$.



Figura 4.3: Schema dei livelli della transizione Raman considerata.

Lo stato del sistema Ψ può essere descritto come combinazione lineare degli autostati imperturbati ψ_n con probabilità di occupazione $|c_n(t)|^2$:

$$\Psi(t) = c_1(t)\psi_1 + c_2(t)\psi_2 + c_3(t)\psi_3 \tag{4.3}$$

Una transizione a due fotoni è un processo del secondo ordine ed, affinchè sia probabile e domini sulle transizioni a singolo fotone, è necessario usare due fasci intensi (~ 80 mW) e con detuning molto grande, in particolare $\Delta \gg \Gamma$. Questo permette di ricavare che la probabilità di occupazione del terzo livello è:

$$|c_3(t)|^2 \propto \sin^2\left(\frac{\Omega_1\Omega_2}{4\Delta}t\right) \tag{4.4}$$

Se $I_1 = I_2$ questa probabilità è direttamente proporzionale all'intensità dei due fasci. Come per il trasferimento del Rb, anche qui si tiene il campo magnetico a ≈ 71.46 G e questo determina una differenza di frequenza fra i livelli iniziale e finale di ≈ 425 MHz (calcolata usando la formula di Breit-Rabi [82]) e questo è il doppio del valore impostato sulla radiofrequenza che pilota l'AOM nello schema ottico impiegato per generare i due fasci a frequenze differenti (vedi § 3.2.2). I due fasci vengono accesi ed inviati sugli atomi per soli 4 μ s ottenendo un'efficenza di trasferimento superiore al 90%.

Una descrizione più completa dei due metodi qui illustrati può essere trovata in [50].
4.3 Tecnica di Rivelazione

L'ultimo stadio di un esperimento è costituito dalla rivelazione del campione atomico. La tecnica usata per indagare gli atomi ultrafreddi è quella della *rivelazione in assorbimento* [83] e sarà illustrata nel § 4.3.2. Questa tecnica di rivelazione è distruttiva in quanto gli atomi subiscono un forte riscaldamento interagendo con la luce laser di rivelazione che causa la loro dispersione nell'apparato da vuoto, richiedendo così la ripetizione di tutta la procedura sperimentale su un nuovo campione per eseguire un'altra misura.

Gli atomi possono essere rivelati sia mentre si trovano dentro una trappola (rivelazione *in situ*), caso utile per studiare la loro distribuzione spaziale, sia spegnendo velocemente i potenziali di confinamento e illuminandoli dopo un tempo t_{exp} mentre espandono liberamente (cadendo anche verticalmente per effetto della forza di gravità). Questa seconda procedura è detta rivelazione *in tempo di volo* o in *Time of Flight (TOF)* e, se t_{exp} è sufficientemente lungo, permette di ricavare la distribuzione di impulso degli atomi prima dello spegnimento del potenziale confinante. Le basi teoriche di questo risultato saranno illustrate nel successivo § 4.3.1.

4.3.1 Espansione in Tempo di Volo

Quando si vuole ottenere una rivelazione in tempo di volo bisogna spegnere bruscamente tutti i potenziali confinanti, dopodiché gli atomi cominciano a cadere verticalmente per effetto della forza di gravità ed a espandere balisticamente per via dell'assenza delle forze di confinamento. Lo spegnimento deve essere il più veloce possibile per preservare lo stato del campione atomico.

Il tempo di volo viene definito come il tempo intercorrente fra lo spegnimento dei potenziali e l'inizio della rivelazione ed è sperimentalmente limitato superiormente solo dalla dimensione verticale della camera da vuoto. Il tempo di spegnimento dei fasci del reticolo è di pochi μ s, mentre quello dei fasci di dipolo e della corrente nella millitrappola è attorno ai 100 μ s e questo risulta essere il contributo maggiore all'indeterminazione sull'effettivo momento da cui iniziare a contare il tempo di caduta, pertanto si stima un errore sul tempo di volo di 100 μ s.

L'espansione balistica di una gas soggetto solo alla forza di gravità è semplice da calcolare [84] e mostra che la funzione d'onda che descrive il condensato o il gas termico è identica a quella avuta nella trappola a meno di un fase e di un fattore di scala nelle posizioni. Questo porta alla conseguenza che un gas termico durante l'espansione tende ad assumere una forma isotropa, mentre un condensato si allarga di più nella direzione che prima era più confinata.

La rivelazione in tempo di volo è molto interessante perché nel caso di un condensato, sia che sia stato rilasciato da una trappola che da un reticolo ottico, permette di ricavare dalla distribuzione di densità degli atomi la loro distribuzione d'impulso [85]. Se sono presenti delle correlazioni di fase (correlazioni del primo ordine) fra i siti del reticolo, allora queste saranno visibili sotto forma di picchi nella distribuzione di densità. Proprio grazie a questa proprietà è possibile conoscere alcune delle caratteristiche importanti dello stato assunto nel reticolo e distinguere fra la fase Superfluida e la fase Isolante di Mott (vedi § 1.3.2).

E interessante mostrare qui esplicitamente questo collegamento, seguendo la dimostrazione illustrata in [86]. Consideriamo il caso semplice di un condensato non interagente, dopo essere stato rilasciato, la sua funzione d'onda $\psi(\vec{r},t)$ è descritta dalla seguente equazione di Schrödinger:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi \tag{4.5}$$

la cui soluzione può essere scritta nel seguente modo:

$$\psi(\vec{r},t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d^3 p \psi_0(\vec{p}) e^{i \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{\hbar}} e^{-i \frac{p^2}{2m} \frac{t}{\hbar}}$$
(4.6)

Far comparire nell'esponente un termine quadratico è di aiuto, per esempio lungo x:

$$\frac{px}{\hbar} - \frac{p^2 t}{2m\hbar} = -\frac{t}{2m\hbar} \left(p - \frac{mx}{t} \right)^2 + \frac{mx^2}{2\hbar t}$$
(4.7)

Nel limite $t \to \infty$ il secondo termine diventa trascurabile e possiamo scrivere:

$$\psi(x,t) \simeq \int dp \psi_0(p) e^{-i\frac{t}{2m\hbar} \left(p - \frac{mx}{t}\right)^2} = \int dq \psi_0 \left(q + \frac{mx}{t}\right) e^{-i\frac{tq^2}{2m\hbar}}$$
(4.8)

In questo limite l'esponenziale è un termine rapidamente oscillante e l'unico contributo importante ai fini dell'integrazione è quello che annulla l'esponente:

$$\psi(x,t) \simeq \sqrt{\frac{mh}{t}} e^{i\pi/4} \psi_0\left(\frac{mx}{t}\right) \quad \to \quad |\psi(\vec{r},t)|^2 \simeq \frac{mh}{t} |\psi_0\left(\frac{m\vec{r}}{t}\right)|^2 \tag{4.9}$$

L'equazione (4.9) mostra che la funzione d'onda all'istante t è proporzionale alla distribuzione iniziale degli impulsi, con $\vec{p} = m\vec{r}/t$. Il regime asintotico $t \to \infty$ viene raggiunto dopo pochi millisecondi. Questo risultato è valido anche nel caso di un condensato interagente perché, dopo pochi ms, esso raggiunge una densità tale da poterlo considerare molto diluito.

4.3.2 Rivelazione in assorbimento

Una volta trascorso il tempo di volo stabilito, gli atomi di ⁸⁷Rb e ⁴¹K in espansione vengono rivelati. La rivelazione delle due specie viene eseguita separatamente illuminando ciascuna di esse per poche decine di microsecondi con un fascio laser polarizzato σ^+ e risonante con la transizione chiusa $|F| = 2, m_F =$ $2\rangle \rightarrow |F = 3, m_F = 3\rangle$. Questa transizione è stata scelta per permettere agli atomi di compiere molti cicli di assorbimento/emissione senza decadere in stati non assorbenti e la durata del tempo di esposizione è scelta in modo da rimanere in un regime di assorbimento lineare. Il fascio laser è molto più largo della distribuzione atomica, pertanto verrà attenuato per via dell'assorbimento dovuto agli atomi solo in una determinata regione della sua estensione. Dopodiché il fascio prosegue il suo percorso fuori dall'apparato da vuoto e viene inviato su di una telecamera a tecnologia CCD (Charge Coupled Device) attraverso un sistema di specchi e lenti, impiegati per aumentare la risoluzione. Si ottiene così un'immagine del fascio laser in cui in una regione l'intensità è attenuata per via dell'assorbimento dovuto alla presenza della nube atomica. Chiaramente l'estensione di questa regione e l'andamento dell'intensità sono legati alla distribuzione di densità della specie atomica in esame, integrata lungo la direzione di osservazione.

Se gli atomi, per via della procedura sperimentale, si trovassero al momento dell'espansione nello stato $|F = 1, m_F = 1\rangle$, allora, pochi ms prima della rivelazione con il fascio laser proveniente dalla sorgente di raffreddamento, essi dovrebbero essere illuminati per qualche centinaio di μ s dal fascio di rivelazione originato dalla sorgente di ripompaggio, venendo così pompati otticamente nello stato iperfine $|F = 2, m_F = 2\rangle$.

Per ottenere la distribuzione atomica con un miglior rapporto Segnale-Rumore (SNR) bisogna acquisire per ogni specie tre immagini in sequenza (con ugual tempo di esposizione):

- $I_{atomi+luce}$ in cui è visibile entro il fascio laser risonante il profilo di assorbimento dovuto alla presenza degli atomi. Questa immagine è quella che contiene il segnale di interesse.
- I_{luce} in cui è presente solo il fascio laser risonante. È l'immagine che svolge la funzione di *flat field*.
- I_{buio} in cui non c'è il fascio laser, ma solo l'eventuale luce spuria proveniente dall'ambiente circostante ed il rumore elettronico di lettura dei pixel della CCD. Questa è l'immagine di buio.

L'assorbimento subito dal fascio laser è descritto dalla legge di Lambert-Beer: l'intensità trasmessa da uno spessore z di un materiale non omogeneo è data da:

$$I_{atomi+luce}(x,y) = I_{luce}e^{-\int \sigma n(x,y,z)dz}$$

$$(4.10)$$

dove n(x, y, z) è la densità numerica degli atomi e $\sigma = 3\lambda^3/2\pi$ è la sezione d'urto di assorbimento della specie atomica considerata. É evidente che, invertendo la relazione (4.10) e dividendo per σ , si può ottenere la densità degli atomi integrata lungo la direzione di osservazione, ma per questo lavoro di tesi è stato scelto di usare soltanto la *densità ottica* definita come $OD = \sigma \int n(x, y, z) dz$ in modo da essere totalmente indipendenti dalla sezione d'urto, in quanto quest'ultima presenta una forma semplice solo quando si lavora con una singola specie atomica, mentre diventa molto più complessa quando si rivela una miscela.

Per eliminare il più possibile il contributo della luce spuria e del rumore elettronico, alle intensità $I_{atomi+luce}$ e I_{luce} viene sottratta l'immagine di buio I_{buio} e poi viene calcolata la densità ottica:

$$OD = -\ln\left(\frac{I_{atomi+luce} - I_{buio}}{I_{luce} - I_{buio}}\right)$$
(4.11)

Questo deve essere fatto per ogni specie con il proprio set di tre immagini. Come risulta evidente da quest'equazione, I_{luce} viene usata come immagine di *flat field*, ovvero costituisce un riferimento sfruttato per normalizzare la risposta dei pixel della telecamera ed anche per eliminare il più possibile l'eventuale disomogeneità del fascio laser di rivelazione. Minore è la distanza temporale t_{delay} intercorrente fra l'acquisizione di $I_{atomi+luce}$ e di I_{luce} , maggiore sarà la probabilità che la forma e l'intensità del fascio di rivelazione siano rimaste esattamente le stesse.

Durante questo lavoro di tesi la sequenza di acquisizione delle immagini è stata perfezionata cercando di ridurre il più possibile t_{delay} . La procedura di rivelazione precedente, detta di *imaging lento*, era la seguente:

- 1. rivelazione verticale e laterale degli atomi di K per 100 μ s;
- 2. dopo 40 μ s rivelazione verticale e laterale degli atomi di Rb per 100 μ s;
- 3. attesa di 600 ms necessaria per trasferire le due immagini;
- 4. immagine di flat field per il K con esposizione per 100 μ s;
- 5. dopo 40 μ s immagine di flat field per il Rb con esposizione per 100 μ s;
- 6. attesa di 600 ms necessaria per trasferire le due immagini;
- 7. immagine di buio per il K;
- 8. dopo 40 μ s immagine di buio per il Rb;
- 9. trasferimento in 600 ms delle ultime due immagini;

Per ridurre il tempo intercorrente fra le prime due immagini e le seconde due è stato deciso di sfruttare il sistema di acquisizione interlinea di questa CCD (vedi § 3.2.4) che permette di avere un t_{delay} molto breve fra una coppia di immagini. La prima deve contenere il segnale degli atomi di ciascuna specie, mentre la seconda deve essere di flat field per entrambe. Per ottenere ciò, subito dopo la prima immagine, bisogna pompare velocemente gli atomi in uno stato che non sia risonante con il fascio di rivelazione. Per il Rb è stato possibile aggiungere facilmente in direzione radiale un fascio risonante con la transizione $|^2P_{3/2}, F' = 2\rangle \rightarrow |^2S_{1/2}, F = 2\rangle$ che sarà chiamato di pulizia. Si è scoperto che con esso è

possibile eliminare gli atomi solo usando tempi di volo compresi fra i 12 ed i 13 ms perché la geometria della millitrappola limita l'accesso ottico radiale. Prima di intervenire più radicalmente sullo schema ottico per risolvere questo problema ed aggiungere un analogo per il K, si è deciso di provare questa nuova configurazione per la rivelazione del solo Rb. Pertanto è stata sviluppata una nuova procedura sperimentale, detta di *imaging veloce*:

- 1. rivelazione verticale e laterale degli atomi di Rb con $t_{expos} = 100 \ \mu s$;
- 2. accensione del fascio di pulizia del Rb per $t_{delay} = 1$ ms;
- 3. immagine di flat field per il Rb con lo stesso tempo di esposizione;
- 4. attesa di 600 ms necessaria per trasferire le due immagini;
- 5. immagine di buio per la prima immagine;
- 6. immagine di buio per la seconda immagine;
- 7. trasferimento in 600 ms delle ultime due immagini;

Sono necessarie due immagini di buio per via della peculiarità del funzionamento del sistema interlinea che costringe ad integrare la seconda immagine di ciascuna coppia per un tempo fisso di 260 ms, mentre la prima ha durata $\geq 10 \ \mu$ s. I tempi t_{expos} e t_{delay} sono stati scelti dopo aver eseguito con questa procedura la calibrazione dei parametri sperimentali sul solo Rb, i cui risultati saranno discussi nel § 5.2.1. Questo studio ha permesso, inoltre, di verificare che la procedura di imaging veloce non è indispensabile per ottenere il segnale di correlazione cercato, poiché esso è ancora visibile con la procedura lenta. Pertanto, prima di modificare il sistema ottico per implementare la procedura di imaging veloce per entrambe le specie, si è scelto di cercare di rivelare il segnale di correlazione della miscela con la procedura di imaging lenta. I risultati di questo studio saranno discussi nel § 5.2.2.

4.4 Procedura di Misura

Lo studio della correlazione spaziale delle fluttuazioni di densità degli atomi è stato svolto mediante l'analisi delle immagini della nuvola atomica, acquisite con la tecnica di rivelazione in assorbimento eseguita in tempo di volo, previo rilascio degli atomi dal reticolo ottico. L'analisi sarà descritta dettagliatamente nel successivo capitolo 4, mentre qui saranno illustrate le richieste sperimentali necessarie per eseguire correttamente l'acquisizione dei dati e le due differenti sequenze sperimentali impiegate per eseguire l'esperimento in presenza o del solo Rubidio o della miscela di Rubidio e Potassio.

4.4.1 Analisi dei requisiti sperimentali necessari per la misura

Come evidenziato nel § 2.4, per avere una buona visibilità dei picchi di correlazione è necessario acquisire in ciascuna condizione sperimentale un set di molte immagini e cercare di avere un tempo di volo il più grande possibile. Poi bisogna prestare attenzione all'adiabaticità della rampa di accensione del reticolo, per garantire la permanenza degli atomi nello stato fondamentale del sistema, e verificare quale sia il tempo di confinamento ottimale.

In ogni lavoro sperimentale il fattore che incide maggiormente sulla qualità dei risultati è il rumore, le cui fonti devono essere controllate e possibilmente minimizzate. Poiché si vuole studiare la correlazione presente nella fluttuazione del numero di atomi nelle immagini del campione atomico in espansione, è evidente che la maggior parte delle sorgenti di rumore saranno collegate con la tecnica di rivelazione. Se ne possono individuare facilmente due: un rumore proveniente dal fascio laser impiegato per la rivelazione ed un rumore elettronico presente nella telecamera CCD usata per acquisire le immagini. Se avessimo voluto svolgere uno studio della densità atomica avremmo dovuto considerare anche la sua fluttuazione come rumore, ma qui essa costituisce il segnale d'interesse.

Il rumore elettronico della telecamera è essenzialmente legato, nel caso in esame, alla corrente di buio ($< 2e^{-}/px/s$) ed al rumore di lettura ($\sim 2.5e^{-}$ rms). Il contributo di queste due sorgenti, dipendendo da processi termici, potrebbe essere ridotto raffreddando la telecamera, ma ciò non è stato necessario perché la sottrazione dell'immagine di buio e la divisione per l'immagine di flat field permettono di eliminare gran parte dell'effetto. É stato stimato che il contributo residuo alla deviazione standard della densità ottica sia pari a $\sim 0.005 \pm 0.002$.

Il rumore dovuto al fascio di rivelazione è legato alla natura quantizzata della radiazione EM e, all'intensità impiegata, è essenzialmente dovuto allo shot noise dei fotoni $\Delta N_p = \sqrt{N_p}$, dove N_p è il numero di fotoni che incide su ogni pixel. Poiché questo numero è alto risulta che il rumore fotonico domina su quello elettronico ed il suo contributo alla deviazione standard della densità ottica è stato stimato essere pari a ~ 0.020 ± 0.005.

Le fluttuazioni del numero di atomi sono legate alla natura discreta del campione atomico e seguono una distribuzione Poissoniana, pertanto risulta che $\Delta N_a = \sqrt{N_a}$. Per poter osservare con successo una correlazione nella fluttuazione di densità degli atomi è necessario che il contributo atomico domini sia su quello fotonico che quello elettronico ($\Delta N_a > \Delta N_p \ge \Delta N_e$). Per essere sicuri che le ipotesi appena sfruttate siano rispettate sarà opportuno calibrare l'intensità del fascio di rivelazione ed il tempo di esposizione degli atomi.

Il numero di atomi di una singola specie misurato per pixel è legato al valor medio della corrispondente densità ottica (4.11) attraverso la seguente relazione:

$$N_a = \frac{\langle OD(\vec{r}) \rangle a_{pixel}}{\sigma} \tag{4.12}$$

dove a_{pixel} è l'area di un pixel. Se le fluttuazioni del numero di atomi seguono una statistica di Poisson, allora il rumore relativo per singolo pixel è dato da:

$$\frac{\Delta OD}{OD} = \frac{\Delta N_a}{N_a} = \frac{1}{\sqrt{N_a}} \tag{4.13}$$

Questa relazione mostra chiaramente come il contributo delle fluttuazioni atomiche cresca al diminuire del numero di atomi rilevati su di un singolo pixel, pertanto dovrebbe essere vantaggioso lavorare con densità ottiche abbastanza basse e ciò è confermato anche dai risultati sperimentali descritti in [69]. Nella figura 4.4 è mostrata una tipica distribuzione della densità ottica del campione atomico lungo i due assi centrali dell'immagine. Dal grafico della deviazione standard è possibile vedere come al centro il contributo atomico ($\simeq 0.035 \pm 0.005$) sia dominante rispetto al rumore fotonico ed elettronico ($\simeq 0.020 \pm 0.005$) e vada decrescendo verso i bordi.



Figura 4.4: Densità ottica tipica delle immagini acquisite. Sono mostrate la densità media e la sua deviazione standard lungo due sezioni ortogonali dell'immagine.

Vi è infine un altro aspetto importante da considerare per il calcolo della funzione di Correlazione (2.37): il segnale di correlazione che si vuole studiare è causato dall'interferenza costruttiva degli atomi in espansione, analogamente a quanto avviene per i fotoni nell'esperimento di Hanbury Brown e Twiss. Questo segnale non è distribuito uniformemente su tutta la superficie della telecamera, ma è concentrato nella regione dove sono stati rivelati gli atomi, pertanto sarà opportuno considerare ai fini del calcolo solo un'area ridotta centrata sulla nuvola atomica e di larghezza tale da avere il miglior rapporto fra il numero di pixel in cui è soddisfatta la richiesta $\Delta N_a > \Delta N_p$ ed il numero di pixel contenenti la distribuzione di densità della specie atomica in esame. Un buon compromesso può essere quello usato nella figura $4.4 (211 \cdot 211 \text{ px})$.

A seguito di questa discussione si capisce come sia importante ai fini della misura svolgere uno studio preliminare volto ad ottimizzare i seguenti parametri sperimentali:

- 1. l'area della regione considerata per l'analisi;
- 2. il tempo t_{delay} intercorrente fra l'acquisizione di un'immagine e la successiva;
- 3. il numero di immagini acquisite in ciascuna condizione sperimentale;
- 4. la durata del tempo di esposizione t_{expos} al fascio laser in ciascuna immagine;
- 5. la potenza del fascio laser di rivelazione;
- 6. la densità ottica della nuvola atomica al momento della rivelazione;
- 7. il tempo di espansione t_{TOF} ;
- 8. il tempo t_{hold} di intrappolamento nel reticolo;
- 9. la durata della rampa t_{ramp} di accensione del reticolo.

Dopo aver eseguito questa calibrazione sarà interessante studiare il comportamento del segnale di correlazione al variare dei seguenti parametri:

- 1. l'altezza del reticolo s, così da studiare cosa avviene avvicinandosi alla transizione Superfluido-Isolante di Mott;
- 2. il tempo t_{hold} di intrappolamento nel reticolo ad s = 15 per studiare la decoerenza del Superfluido;

4.4.2 Sequenza dell'esperimento nel caso di singola specie

La procedura sperimentale seguita per ottenere un'immagine della densità atomica in presenza di solo ⁸⁷Rb è la seguente:

- 1. preraffreddamento del solo Rb nella 2D-MOT e dopo circa 20 s caricamento nella 3D-MOT;
- 2. raffreddamento nella 3D-MOT, Compressione e fase di Melassa Ottica;
- 3. pompaggio ottico e trasferimento nella trappola di Quadrupolo;
- 4. spostamento dal centro della 3D-MOT al centro della Millitrappola e trasferimento in essa;

- 5. Raffreddamento Evaporativo eseguito per la parte iniziale nella Millitrappola, trasferimento in trappola di Dipolo e conclusione dell'evaporazione;
- 6. accensione adiabatica del Reticolo Ottico in t_{ramp} per raggiungere s = 50 ed intrappolamento per un tempo t_{hold} ;
- 7. espansione libera per $t_{TOF} = 12.5 \div 13 \text{ ms};$
- 8. rivelazione laterale del Rb in $|2,2\rangle$ con la procedura di imaging veloce.

Tipicamente dopo il raffreddamento evaporativo si ottiene un numero totale di atomi di Rb di $6 \div 7 \cdot 10^4$ a T = 44 nK con una frazione condensata del 60%.

4.4.3 Sequenza dell'esperimento nel caso di doppia specie

La procedura sperimentale seguita per ottenere le immagini della densità atomica del 87 Rb e del 41 K è la seguente:

- 1. preraffreddamento di entrambe le specie nella 2D-MOT e dopo circa 20 s caricamento nella 3D-MOT;
- 2. raffreddamento nella 3D-MOT, Compressione e fase di Melassa Ottica;
- 3. pompaggio ottico e trasferimento nella trappola di Quadrupolo;
- 4. spostamento dal centro della 3D-MOT al centro della Millitrappola e trasferimento in essa;
- 5. Raffreddamento Evaporativo e Simpatetico eseguito per la parte iniziale nella Millitrappola, trasferimento in trappola di Dipolo e conclusione dell'evaporazione;
- 6. accensione adiabatica del Reticolo Ottico in t_{ramp} per raggiungere s = 50 ed intrappolamento per un tempo t_{hold} ;
- 7. espansione libera per un tempo t_{TOF} ;
- 8. rivelazione laterale di entrambe le specie in $|2,2\rangle$ con la procedura di imaging lenta;

Tipicamente dopo il raffreddamento evaporativo si ottiene un numero totale di atomi di Rb di $5 \cdot 10^4$ e di K di $2 \cdot 10^4$. Le frazioni condensate sono rispettivamente il 40% ed il 55%.

Al momento attuale non è stata ancora sfruttata la possibilità sperimentale di controllare le interazioni interspecie.

Capitolo 5 Studio della Correlazione di Rumore

In questo capitolo verrà descritto dettagliatamente il metodo usato per analizzare le immagini ed estrarre il segnale di correlazione cercato. Successivamente saranno illustrati i risultati della calibrazione dei parametri sperimentali e di alcune misure svolte in presenza del solo Rubidio. Infine verranno discussi i primi risultati ottenuti in presenza di una miscela di Rb e K.

5.1 Analisi delle Immagini

Lo sviluppo e la messa a punto del programma per il calcolo della correlazione presente nella distribuzione di densità atomica in un dato set di immagini hanno costituito una parte importante del lavoro svolto durante il periodo di tesi. Il programma è stato scritto nel linguaggio di programmazione MATLAB, scelto per la sua facilità d'uso e per la ricchezza di funzioni già pronte. Sebbene il linguaggio MATLAB generi codice meno veloce di quanto non si possa ottenere programmando in C o C++, esso ha il grande vantaggio di permettere di sviluppare programmi complessi in tempi più brevi e ciò ha consentito, in particolare, di parallelizzare con molta semplicità il fit delle immagini. In questo modo l'elaborazione di un tipico set di 60 immagini richiede solo ~ 90 s su un computer dotato di processore Intel i7 2600K e 16 GB di RAM.

Il programma di analisi è composto da più stadi consecutivi, ognuno dei quali è svolto da una funzione dedicata:

- 1. definizione del dataset da analizzare e di tutti i parametri necessari per l'esecuzione;
- 2. caricamento delle immagini in memoria e calcolo della densità ottica secondo l'eq. (4.11), usando l'opportuno set in base alla procedura di imaging con cui sono state acquisite;

- 3. fit della densità ottica e selezione delle immagini in base ai risultati del fit;
- 4. normalizzazione della densità ottica di ciascuna immagine selezionata;
- 5. calcolo della funzione di correlazione;
- 6. applicazione di un filtro passa banda;
- 7. fit dei picchi di correlazione;
- 8. calcolo della visibilità e/o del rapporto Segnale/Rumore (SNR)

5.1.1 Caricamento delle immagini

Per velocizzare l'elaborazione dei dati è stato deciso di caricare tutte le immagini nella RAM del computer. Per calcolare la densità ottica di ciascuna specie atomica viene usata l'equazione (4.11), pertanto per ottenere un'immagine è necessario caricare in memoria tre file corrispondenti a $I_{atomi+luce}$, I_{luce} ed I_{buio} (vedi § 4.3.2). Poiché ogni file ha una dimensione di 5 MB ed ogni set di dati è costituito mediamente da 50-60 immagini, sarebbe molto dispendioso in termini di RAM occupata caricarli tutti insieme e poi calcolare la densità ottica, pertanto si è scelto di caricarne ed elaborarne tre per volta e salvare in memoria solo il risultato. Inoltre, sulla stessa immagine gli atomi possono essere rivelati sia dalla direzione verticale che da quella laterale e queste informazioni sono salvate in regioni della CCD diverse, separate da una zona di pixel non illuminata, quindi è opportuno lavorare solo con delle aree ristrette dell'immagine, prese attorno al centro della nuvola atomica. La larghezza dell'area considerata, per il motivo illustrato nel § 4.4.1, è stata calibrata per massimizzare il segnale di correlazione ed è stata scelta pari a 211 px per tempi di volo di ~ 13 ms.

Le densità ottiche, così calcolate, vengono poi elaborate separatamente, suddividendo in base alla specie atomica ed alla direzione di rivelazione.

5.1.2 Selezione delle immagini

Prima di calcolare la funzione di correlazione, il set di immagini viene selezionato in base ad alcuni parametri in modo da assicurarsi che le differenze fra ogni immagine siano causate solo dallo shot noise atomico e non da altre distorsioni che possono essersi verificate a causa di qualsiasi altra fluttuazione avvenuta durante il ciclo di ciascun esperimento. I criteri di selezione sono la posizione del centro della nuvola atomica, la larghezza della distribuzione e la densità ottica. Per ricavare questi valori le immagini vengono fittate con un'opportuna funzione:

1. quando non sono visibili segni di picchi secondari causati dalla presenza di una frazione superfluida la funzione usata è una semplice gaussiana;

2. quando sono visibili dei picchi secondari causati dalla presenza di una frazione superfluida la funzione scelta è costituita da nove doppie gaussiane, di cui una è centrata sul picco centrale, mentre le altre sono posizionate laddove si attendono gli otto picchi secondari. I centri delle doppie gaussiane sono vincolati ad essere gli stessi ed ai fini della selezione viene usata la media dei valori ottenuti dal fit della gaussiana centrale.

L'esecuzione dei fit è stata parallelizzata e, sfruttando contemporaneamente otto thread, si ottiene una riduzione di 2.6 volte del tempo di calcolo.

Tipicamente per la posizione del centro e per la larghezza della nuvola atomica viene ammessa una fluttuazione di ± 1 px. I limiti della densità ottica accettata sono scelti in modo da usare almeno 40 immagini, pur tagliando via le code della distribuzione di intensità, e questo di norma equivale a scegliere una finestra larga 0.2 attorno ad un valore centrale. Una tipica selezione è mostrata in figura 5.1.



Figura 5.1: Selezione tipica delle immagini.

Si pensa che la fluttuazione della densità ottica massima fra le ripetizioni dell'esperimento sia legata ad una variazione incontrollabile del numero di atomi presenti alla fine del processo di evaporazione. Una discussione più approfondita delle conseguenze delle fluttuazioni di questi parametri si può trovare in [88].

5.1.3 Normalizzazione

Dopo la selezione le immagini della densità ottica della nuvola atomica presentano ancora una forte variabilità, legata al differente numero di atomi contenuto nel campione atomico durante ciascuna realizzazione dell'esperimento, e questo non permette una corretta normalizzazione della funzione di correlazione. Infatti, nell'equazione (2.37) la divisione per l'autocorrelazione della media delle immagini serve a rimuovere tutti quei comportamenti che sono comuni al set di dati, fra cui la forma gaussiana della densità ottica. Quando l'ampiezza di questa distribuzione varia da immagine ad immagine la normalizzazione non riesce a rimuovere bene questo effetto ed in ogni singolo punto saranno presenti sia il vero segnale dovuto all'effetto Hanbury Brown e Twiss, sia le fluttuazioni dell'ampiezza rispetto alla media. Sfortunatamente, come anche in [87], il secondo contributo domina sul primo ed il segnale di correlazione cercato viene mascherato da un grande fondo gaussiano.

Questo problema è stato affrontato usando due metodi complementari: in primo luogo è stato sottratto dalle immagini il risultato del fit della densità ottica calcolato nel precedente passaggio, e poi è stato applicato un filtro passa banda alla funzione di correlazione. La sottrazione del fit permette di eliminare quasi completamente la dipendenza dal numero totale di atomi in quelle immagini in cui la densità ottica è ben descritta da una funzione gaussiana, ovvero quando il sistema è ben dentro la fase Isolante di Mott $(U/J \gg 1)$, ma è meno efficace nella situazione intermedia (U/J > 1) in cui il sistema è costituito da una successione di regioni nella fase Isolante di Mott alternate a regioni superfluide (vedi $\{1,3,3\}$) ed anche nella fase superfluida (U/J < 1), per la quale però viene usato il fit a 9 doppie gaussiane. Negli ultimi due casi rimangono dei residui difficilmente eliminabili mediante la sottrazione di funzioni analitiche perché essi hanno delle forme casuali, pertanto la loro permanenza porta alla presenza nell'immagine di correlazione di regioni abbastanza ampie e larghe da essere confrontabili con i picchi di correlazione dovuti al vero segnale. Queste regioni sono lentamente variabili sulla scala di decine di pixel e pertanto ad esse è associato un vettore d'onda \vec{k} piccolo (definito nello spazio reciproco dello spazio reale), mentre i picchi di correlazione cercati hanno una larghezza di pochi pixel e quindi vi è associato un vettore d'onda grande: tale differenza suggerisce l'applicazione alla funzione di correlazione di un filtro passa alto nello spazio dei vettori d'onda che permetta di sopprimere nello spazio reale delle posizioni solo gli andamenti a lungo raggio. L'applicazione del filtro verrà descritta meglio nel \S 5.1.5. La sottrazione del fit, anche se lascia dei residui, è importante perché permette di aumentare l'ampiezza del segnale di correlazione di un fattore 2.3, com'è possibile vedere dai risultati presentati in figura 5.4 (il rapporto segnale/rumore aumenta invece solo del 1.8%).

Dopo la normalizzazione ai dati viene applicato un offset variabile da immagine ad immagine in modo da evitare la presenza di punti con valore negativo. Ciò si è reso necessario perché, in alcuni set di dati, valori negativi della densità ottica presenti solo in regioni lontane dalla nuvola atomica causavano la comparsa di artefatti nella funzione di correlazione. É stato verificato che sia l'aggiunta di questo offset sia la moltiplicazione delle densità ottiche per un fattore costante non cambiano né la forma della correlazione né l'ampiezza relativa dei picchi rispetto al fondo, ma aggiungono solo un fattore di scala globale.

5.1.4 Calcolo della Funzione di Correlazione

Per il motivo illustrato nel § 4.4.2 è stato deciso di non calcolare la funzione di correlazione delle fluttuazioni della densità atomica, definita dall'equazione (2.37), ma si è scelto di analizzare l'analoga funzione definita per la densità ottica:

$$C(\vec{d}) = \frac{\int \langle OD(\vec{x} - \vec{d}/2) \cdot OD(\vec{x} + \vec{d}/2) \rangle d\vec{x}}{\int \langle OD(\vec{x} - \vec{d}/2) \rangle \cdot \langle OD(\vec{x} + \vec{d}/2) \rangle d\vec{x}} - 1$$
(5.1)

Al numeratore compare la media su molte repliche del sistema delle funzioni di autocorrelazione della densità ottica di ciascuna immagine, mentre a denominatore vi è la funzione di autocorrelazione della densità ottica media.

Il calcolo della funzione di correlazione mediante l'equazione (5.1) richiede un notevole sforzo computazionale perché bisogna integrare su tutte le distanze possibili fra coppie di pixel dell'immagine contenente la densità ottica da analizzare (tipicamente $211 \cdot 211$ px, vedi § 5.2.1) e questo deve essere ripetuto per tutte le repliche dell'esperimento considerate nella media (mediamente 50-60). In totale sarebbe necessario eseguire circa $(211 \cdot 211) \cdot (211 \cdot 211/2) \cdot 61 \approx 6 \cdot 10^{10}$ passi e ciò richiederebbe un tempo di calcolo significativo. Fortunatamente, nel caso in esame è possibile eseguire in un altro modo il calcolo della funzione di correlazione perché sono rispettate le ipotesi per l'applicazione del teorema di Wiener-Khinchin [89], il quale riconduce il problema al semplice calcolo di trasformate ed antitrasformate di Fourier.

Il teorema di Wiener-Khinchin dimostra che la funzione di correlazione di un processo casuale stazionario in senso largo (ovvero per cui almeno il primo ed il secondo momento non dipendano dal tempo) è la antitrasformata di Fourier della densità dello spettro di potenza del processo stesso:

$$G(\vec{d}) = \int_{-\infty}^{\infty} S_P(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{d}} d\vec{k} = FT^{-1}\left(S_P(\vec{k})\right)$$
(5.2)

Il processo fisico di interferenza fra gli atomi che dà luogo alle fluttuazioni della densità ottica è sicuramente un processo casuale e stazionario nel tempo (ciò sarebbe evidente se fosse possibile avere una sorgente ed una rivelazione continua di atomi), pertanto questo teorema può essere applicato anche nel nostro caso. La grandezza casuale è la densità ottica ed il suo spettro di potenza è:

$$S_P(\vec{k}) = FT(OD(\vec{x})) \cdot FT^*(OD(\vec{x})) = |FT(OD(\vec{x}))|^2$$
(5.3)

La funzione di correlazione normalizzata diventa così:

$$C(\vec{d}) = \frac{\langle FT^{-1}(|FT(OD(\vec{x}))|^2) \rangle}{FT^{-1}(|FT(\langle OD(\vec{x}) \rangle)|^2)} - 1$$
(5.4)

La densità ottica è una variabile discreta, essendo ricavata da una matrice di valori discreta, pertanto bisogna calcolare la trasformata e l'antitrasformata di Fourier discrete. Questo viene fatto usando l'algoritmo *Fast Fourier Transform* (FFT) implementato nella libreria FFTW3, incorporata in MATLAB.

5.1.5 Applicazione di Filtri

Come discusso nel § 5.1.3, la sottrazione del fit permette di eliminare la maggior parte del fondo gaussiano dovuto alla forma della distribuzione di densità ottica, ma lascia dei residui che hanno spesso forme casuali e non analitiche. Essi portano alla presenza nell'immagine di correlazione di regioni con ampiezza confrontabile a quella dei picchi di correlazione attesi, ma molto più larghe. Quest'ultima proprietà è importante perché permette di distinguere tali regioni dal segnale cercato: essendo larghe sono lentamente variabili sulla scala di decine di pixel e pertanto vi è associato un vettore d'onda piccolo, mentre per i picchi di correlazione è attesa una larghezza di pochi pixel e quindi un vettore d'onda grande. Applicando un filtro passa-alto definito sullo spazio dei vettori d'onda (spazio reciproco dello spazio reale) direttamente all'immagine risultante dal calcolo della correlazione, detta *immagine di correlazione*, è possibile attenuare nello spazio reale delle posizioni solo gli andamenti a lungo raggio e pertanto eliminare queste regioni senza influenzare il segnale.

Durante l'elaborazione dei dati si è scoperto che la telecamera usata per l'acquisizione introduce un notevole rumore di lettura nelle immagini costituito da una serie di righe inclinate di intensità variabile larghe ~ 20 px la cui posizione varia da immagine ad immagine. La sottrazione dell'immagine di buio e la divisione per l'immagine di flat field non eliminano questo rumore, ma lo amplificano perché aumentano di ~ 4 volte la frequenza della modulazione. Ciò causa la presenza di forti striature inclinate con periodo di ~ 2 px nell'immagine di correlazione che disturbano molto il segnale di interesse. Però, grazie a questo andamento particolare, esse possono essere eliminate applicando un filtro passa basso.

Vista la necessità di filtrare frequenza sia basse che alte bisogna applicare un filtro passa banda. Il filtro scelto è un filtro *Butterworth* [90, 91], comunemente usato per i segnali elettrici per ottenere una risposta in frequenza il più possibile piatta nella banda passante, e nella configurazione passa basso ha la seguente risposta nello spazio dei vettori d'onda:

$$H(k) = \frac{1}{1 + (k/k_C)^{2n}} \tag{5.5}$$

dove n è l'ordine del filtro e ne determina la pendenza, $k_C = 2\pi x_C/L$ è la frequenza di taglio, con L dimensione dell'immagine in pixel, ed x_C è un indice intero. Per applicare il filtro passa banda viene calcolata la trasformata di Fourier dell'immagine di correlazione in modo da portarla nello spazio dei vettori d'onda, poi essa viene separatamente moltiplicata per un filtro passa basso con frequenza di taglio alta e per un filtro passa basso con frequenza di taglio bassa, viene eseguita la differenza fra i due risultati ed infine viene calcolata l'antitrasformata dell'immagine filtrata. Le frequenze e l'ordine di filtraggio sono state ottimizzate ed i valori migliori sono risultati essere: n = 3, $k_{basso} = 5.1 \times 2\pi/L$ (risultato vicino a quello trovato in [87]) e $k_{alto} = 35.9 \times 2\pi/L$. Così dall'immagine di correlazione vengono filtrati tutti gli andamenti con lunghezza d'onda maggiore di $d_{basso} = 2\pi/k_{basso} = 41$ px ed inferiore a $d_{alto} = 2\pi/k_{alto} = 5.9$ px (usando L = 211 px, vedi § 5.2.1). In figura 5.2 sono riportati lo studio svolto per calibrare la frequenza di taglio inferiore e la banda passante del passa banda, mentre in figura 5.3 sono mostrate una tipica immagine di correlazione prima e dopo il filtraggio.





Figura 5.2: Ottimizzazione della frequenza di taglio inferiore e della banda passante del filtro passa banda. In ascissa è riportata sempre la frequenza di taglio inferiore k_{basso} . Il punto evidenziato in entrambi i grafici corrisponde al valore ottimale.



Figura 5.3: Immagine di correlazione tipica. É mostrata sia l'immagine prima dell'applicazione del filtro che dopo. I punti di intersezione fra le linee ed i cerchi rossi sono le posizioni attese per i picchi in base alla distanza teorica. I tre picchi analizzati sono evidenziati da un riquadro bianco. Sono indicate anche tutte le informazioni rilevanti sul set di dati di appartenenza e l'SNR calcolato.

5.1.6 Uso delle simmetrie

Per migliorare il rapporto segnale/rumore è possibile sfruttare alcune simmetrie. Per prima cosa bisogna notare che la funzione di correlazione (2.37) è per definizione simmetrica per inversione delle coordinate ovvero $G(\vec{d}) = G(-\vec{d})$, pertanto, se dividiamo l'immagine di correlazione in quattro quadranti risulta che il primo è uguale al terzo ed il secondo è uguale al quarto. Questa simmetria non permette di migliorare l'SNR, ma bisogna tenerne conto perché implica che solo due quadranti sono significativi.

Il reticolo ottico possiede una simmetria propria: i suoi assi sono ortogonali, pertanto è simmetrico per riflessione rispetto agli assi. Supponendo che anche la nuvola atomica si distribuisca simmetricamente nel reticolo quando vi viene intrappolata, è possibile sfruttare questa simmetria per incrementare l'SNR. L'immagine di correlazione viene ribaltata rispetto ad un asse e poi viene mediata con una copia non ribaltata. Così si ottiene un incremento del rapporto segnale/rumore del ~ 50%. Bisogna notare che nelle immagini di correlazione derivanti da set di dati acquisiti usando la rivelazione laterale gli assi del reticolo non sono paralleli agli assi dell'immagine stessa, ma sono inclinati di $\approx -6.5^{\circ}$, quindi, per sfruttare correttamente la simmetria, l'immagine di correlazione deve essere ruotata di questo angolo, ribaltata e poi ruotata indietro.

In figura 5.4 è mostrato come migliora la qualità del segnale applicando progressivamente i metodi descritti in questo e nei precedenti paragrafi.



(a) No filtro,No sottrazione fit,No simmetria



(c) filtro,No sottrazione fit,No simmetria



(e) filtro, sottrazione fit, No simmetria



(b) No filtro, sottrazione fit, No simmetria





(f) filtro, sottrazione fit, simmetria

Figura 5.4: Confronto dei risultati ottenuti applicando all'immagine di correlazione i differenti metodi per migliorare la qualità del segnale. La scala di colori usata rispettivamente nelle prime due egrelle ultime quattro immagini è la stessa.

5.1.7 Analisi dei picchi di correlazione

In una tipica immagine di correlazione è sempre presente un picco centrale e, se l'esperimento ha avuto successo, devono comparire dei picchi a distanze multiple della lunghezza caratteristica (2.41). Nelle immagini migliori, come la 5.3, è possibile vedere fino a due ordini di picchi. Solo i tre picchi evidenziati con un riquadro bianco vengono analizzati perché, dopo aver usato la simmetria del reticolo, sono gli unici a trovarsi nel riquadro significativo e ad essere quasi sempre visibili. Nel seguito essi saranno chiamati, andando in senso orario, picco 2, picco 3 e picco 1.

Il picco centrale è il più alto ed ampio, ma non è legato al segnale di interferenza atteso perché si trova a $\vec{d} = 0$. Nel suo centro sono presenti i contributi dello shot noise dei fotoni ed il rumore termico di lettura dell'elettronica, mentre la sua forma è legata alle aberrazioni ottiche del sistema di rivelazione in quanto, teoricamente, la sua forma è determinata dalla *Point Spread Function* convoluta con sé stessa.

I tre picchi di correlazione selezionanti vengono fittati con una funzione gaussiana bidimensionale, così ne vengono calcolati l'ampiezza, la larghezza lungo i due assi e la posizione del centro. Quest'ultima viene usata per calcolare la distanza dal picco centrale ed è sempre risultata compatibile con quella attesa entro una deviazione standard. Il fit dei picchi 1 e 2 è risultato generalmente molto affidabile, mentre quello del picco 3 è spesso meno preciso per via della sua minor ampiezza rispetto al livello del rumore di fondo. Pertanto, se non diversamente specificato, si è deciso di non usare la media fra i tre, ma solo fra il primo ed il secondo. In figura 5.5 è mostrato un tipico fit dei picchi.



Figura 5.5: Tipico fit gaussiano eseguito sui tre picchi scelti.

Come osservabile sperimentale per studiare l'andamento della correlazione al

variare dei parametri sperimentali è possibile usare più grandezze fisiche. Un'osservabile intuitiva sarebbe l'ampiezza dei picchi di correlazione, ma in [88] viene notato come essa non sia solo derivante dalla fisica del processo di interferenza, ma che dipende anche dalla risoluzione del sistema di rivelazione e dal tempo di espansione usato. Viene suggerito di studiare invece l'area di ciascun picco, calcolata come il prodotto dell'ampiezza per le due larghezze della gaussiana 2D. Questa quantità è quindi espressa in μm^2 .

Un'altra possibilità è data dallo studio del rapporto segnale/rumore. Come segnale si può considerare sia l'area di ciascun picco, sia la media dell'ampiezza in un cerchio di raggio 1 px attorno al massimo. Come rumore bisogna prendere la deviazione standard del fondo calcolata in un'area attorno al picco. A causa dell'applicazione del filtro passa banda il livello del fondo non è omogeneo, ma presenta delle zone più intense intervallate da aree con valori molto vicini allo zero. Inoltre il filtro causa l'insorgere di piccole deformazioni radiali, come l'anello con valori negativi presente attorno al picco centrale. Per tenere conto di questi due comportamenti, la deviazione standard del fondo viene calcolata nel seguente modo: sull'immagine viene delimitata una corona circolare centrata sul picco centrale, con raggio pari alla lunghezza caratteristica e con larghezza pari al doppio del waist dei picchi di correlazione. Dalla corona vengono escluse le regioni attorno ai picchi e poi viene calcolata la deviazione standard su tutti i valori contenuti nell'area selezionata. Chiameremo Coron SNR e Area SNR il rapporto segnale rumore calcolato usando, rispettivamente, l'ampiezza del picco e la sua area come segnale e come rumore quello calcolato sulla corona.

Vi è infine un'altra scelta: in letteratura viene spesso usata come osservabile la visibilità, definita come il rapporto fra la differenza tra il massimo del segnale ed il fondo e la somma del massimo del segnale ed il fondo:

$$V = \frac{segnale - fondo}{segnale + fondo}$$
(5.6)

Per calcolarla sono stati provati tre metodi: prendendo il segnale al centro del picco ed il valore del fondo in un punto posto alla stessa distanza dal centro, ma ad un angolo di 45° rispetto al picco; prendendo il segnale al centro del picco e calcolando il fondo sulla corona; prendendo l'area del picco e calcolando il fondo sulla corona. É stato verificato che nel nostro caso questo parametro non ha un andamento significativo perché il segnale è molto più grande del valor medio del fondo.

In figura 5.6 è mostrato l'andamento delle osservabili proposte al variare del numero di immagini usate per il calcolo della correlazione. Ci si attende che il segnale cresca all'aumentare del numero di immagini. La visibilità è circa piatta e addirittura supera l'unità, perciò non può dare informazioni utili né attendibili. Anche l'area è circa costante in questa serie di dati, ma non lo è per tutte le misure prese, quindi sarà studiata solo quando mostra un comportamento interessante. L'andamento del Coron SNR e dell'Area SNR è sicuramente significativo ed è molto simile, a meno di un fattore di scala. A seguito di questo studio, nel presente lavoro è stata scelta come osservabile principale il Coron SNR, mentre l'area dei picchi ed il loro waist vengono sempre controllati e saranno riportati quando presentano interesse fisico.



Figura 5.6: Scelta dell'osservabile. Il set di dati è quello della calibrazione del numero di immagini ed è mostrato il comportamento del primo picco. É atteso un incremento dell'osservabile all'aumentare del numero di immagini. L'andamento del SNR nei due casi è molto simile ed è significativo, mentre la visibilità non dà informazioni utili. Anche l'area risulta costante.

5.2 Risultati Sperimentali

5.2.1 Caso singola specie

Calibrazione in presenza di solo Rb

Dalla discussione svolta nel § 4.4.1 risulta chiaro che il rapporto segnale/rumore dei picchi nelle immagini di correlazione può dipendere molto dai parametri sperimentali scelti. Pertanto, prima di effettuare delle misure in funzione di una variabile fisica, è stato svolto uno studio finalizzato ad ottimizzare i seguenti parametri sperimentali:

- 1. l'area della regione considerata per l'analisi;
- 2. il tempo t_{delay} intercorrente fra l'acquisizione di un'immagine e la successiva;
- 3. il numero di immagini acquisite in ciascuna condizione sperimentale;
- 4. la durata del tempo di esposizione t_{expos} al fascio laser in ciascuna immagine;
- 5. la potenza del fascio laser di rivelazione;

- 6. la densità ottica della nuvola atomica al momento della rivelazione;
- 7. il tempo di espansione t_{TOF} ;
- 8. il tempo t_{hold} di intrappolamento nel reticolo;
- 9. la durata della rampa t_{ramp} di accensione del reticolo.

Tutte queste misure, se non specificato diversamente, sono state acquisite con la procedura di imaging veloce con rivelazione laterale, usando un'altezza del reticolo pari ad s = 50 per essere sicuri di trovarsi ben dentro la fase Isolante di Mott, $t_{ramp} = 200$ ms, $t_{hold} = 26$ ms e con un tempo di espansione compreso fra i 12.5 ed i 13 ms.

Per determinare l'area ottimale da considerare per l'analisi è stato preso un set di dati che presentava un buon segnale di correlazione, è stato determinato il centro della nuvola atomica ed attorno ad esso è stata ritagliata una regione di semi larghezza crescente (da 50 px fino a 200 px), poi è stato studiato l'SNR della media dei picchi presenti nell'immagine di correlazione. Come si può vedere dalla figura 5.7a l'SNR inizialmente cresce fino ad arrivare ad un massimo fra 100 e 110 px, poi decresce abbastanza velocemente. La crescita costante del waist dei picchi all'aumentare della semi larghezza (vedi fig. 5.7b) è dovuta all'applicazione del filtro.



Figura 5.7: Calibrazione dell'area di analisi. In ascissa è indicata la semi-larghezza della regione considerata.

Da questa verifica si può capire come il segnale di correlazione dipenda dalla dimensione dell'area considerata. Se il calcolo viene eseguito su un quadrato molto grande si considerano molti punti lontani dal centro della nuvola atomica dove il rumore fotonico ed elettronico dominano le fluttuazioni atomiche, causando sia l'attenuazione che una maggiore larghezza del segnale. Se, invece, si considera un quadrato troppo piccolo si escludono regioni dove le fluttuazioni atomiche sono ancora dominanti, causando sempre un'attenuazione del segnale. A seguito di questa calibrazione è stato deciso di analizzare, per ogni set di dati preso con un $t_{TOF} = 12.5 \div 13$ ms, un'area centrata sulla nuvola atomica e larga 211 pixel. In figura 4.4 è mostrata una tipica selezione ed è importante notare come la densità ottica raggiunga il livello del fondo solo molto vicino al bordo dell'immagine. Il waist della nuvola è di ~ 34 px, circa un terzo della semi larghezza dell'immagine. Questo suggerisce un criterio per determinare la semi larghezza dell'area da analizzare: essa deve essere circa tre volte più grande della larghezza della distribuzione di densità della nuvola atomica e comunque tale da permettere il raggiungimento del livello del fondo al bordo dell'immagine.

Il passo successivo è stato di verificare quale fosse il tempo minimo t_{delay} intercorrente fra l'acquisizione di un'immagine e l'altra necessario per ottenere un buon SNR. Per prima cosa sono state prese delle misure con la procedura di imaging veloce, variando t_{delay} fra 20 $\mu {\rm s}$ e 10 m
s, con e senza l'uso del fascio di pulizia, ed è stato trovato che il fascio di pulizia è necessario per $t_{delay} < 5$ ms perché gli atomi non hanno avuto ancora il tempo di cadere fuori dalla regione di rivelazione prima dell'acquisizione dell'immagine di flat field. Per tempi superiori l'uso del fascio di pulizia non fa alcuna differenza e si ha comunque un buon segnale di correlazione. Ciò ha incoraggiato a provare ad acquisire le immagini anche con la procedura di imaging lenta e questa verifica ha avuto esito positivo: anche con un ritardo di ~ 600 ms fra $I_{atomi+luce}$ e I_{luce} si ottiene un segnale di correlazione con un SNR accettabile, ma inferiore a quello ottenibile con l'imaging veloce. Questo probabilmente avviene perché la forma e l'intensità del fascio laser di rivelazione variano, ma non troppo, durante questo tempo. E stato deciso di acquisire le successive misure con $t_{delay} = 1$ ms e con l'uso del fascio di pulizia in quanto in queste condizioni la qualità delle immagini era la migliore.

Lo studio del numero di immagini necessario per ottenere un buon segnale di correlazione, mediandole nella (5.4), è stato svolto acquisendo due serie di numerose immagini, una con la procedura di imaging veloce e l'altra con quella lenta, ed i risultati sono mostrati in figura 5.8. Con la procedura veloce è sufficiente avere 40 immagini per raggiungere la saturazione del SNR, mentre con la procedura lenta bisogna acquisire almeno 65 immagini per arrivare allo stesso livello.

La calibrazione del tempo di esposizione t_{expos} della nuvola atomica al fascio di rivelazione è riportata in figura 5.9. É mostrato solo l'andamento del SNR e del waist (in px) del primo picco perché è l'unico il cui fit è risultato affidabile in tutto il set di dati. Si può vedere come un tempo di integrazione troppo corto non permetta di acquisire immagini con delle fluttuazioni di densità sufficientemente ampie da generare un segnale di correlazione ben distinguibile dal fondo perché probabilmente gli atomi compiono pochi cicli di assorbimento/emissione di fotoni. Al contrario, un tempo troppo lungo permette di eseguire un numero di cicli di assorbimento/emissione di fotoni tale da modificare significativamente la distribuzione atomica e provocare la perdita di gran parte del segnale di



Figura 5.8: Calibrazione del numero di immagini ottimale con le due procedure di imaging.

interferenza. Come tempo di esposizione è stato scelto di usare $t_{expos} = 100 \ \mu s$ perché permette di avere contemporaneamente un SNR alto ed un waist dei picchi piccolo. Il grafico del waist riporta i risultati del fit in pixel per mostrare che l'andamento è significativo, se fosse stato riportato in μm le barre di errore sarebbero molto più grandi per via della propagazione dell'incertezza che deve includere anche quella sul fattore di ingrandimento.



Figura 5.9: Calibrazione del tempo t_{expos} di esposizione al fascio di rivelazione.

Una volta scelto il tempo di esposizione è stata ottimizzata la potenza del fascio di rivelazione. L'andamento del SNR è mostrato in figura 5.10, dove i valori riportati sull'asse delle ascisse sono la potenza integrata, ovvero l'integrale per t_{expos} dell'intensità del fascio. L'SNR misurato è massimo per una potenza integrata di ~ 75 μ W e, pertanto, si è cercato di mantenere questo valore per

tutte le misure successive, facendo uso di una tabella di calibrazione potenza integrata/conteggi sui pixel della CCD.



Figura 5.10: Calibrazione della potenza integrata del fascio di rivelazione. In ascissa è riportata la potenza integrata del fascio di rivelazione, poiché è il valore misurato con 100 μ s di tempo di esposizione.

Non è stato possibile studiare esaurientemente il comportamento del segnale di correlazione al variare della densità ottica perché si è rivelato sperimentalmente complicato mantenere costante il numero di atomi totale per i tempi necessari ad acquisire 50-60 immagini (più di un ora per ciascun punto del set). É stato comunque preso un set di dati a basse densità ottiche, con un numero sufficiente di immagini per ogni punto, da stabilire che il segnale di correlazione è abbastanza intenso per densità ottiche superiori a 0.3, mentre al di sotto di questo valore il contributo del rumore fotonico alla fluttuazione della densità ottica è probabilmente molto più rilevante.



Figura 5.11: Calibrazione della densità ottica ottimale.

Con la procedura di imaging veloce non è stato possibile svolgere uno studio del SNR al variare del tempo di espansione t_{TOF} della nube atomica rilasciata dal

reticolo, per via dei limiti costruttivi dell'apparato sperimentale (vedi § 4.4.1). Questo studio è stato svolto in [69] ed ha mostrato che il segnale cresce $\propto t_{TOF}^2$, pertanto è preferibile lavorare con un tempo di espansione il più lungo possibile, ma comunque tale da garantire una densità degli atomi sufficiente da far prevalere le fluttuazioni atomiche sulle sorgenti di rumore.

La calibrazione del tempo t_{hold} di permanenza nel reticolo è interessante perché permette di capire in quale tempo gli atomi, venendo isolati nelle celle del reticolo, perdono la coerenza che avevano nello stato superfluido precedente l'intrappolamento. Inoltre permette di studiare eventuali effetti di riscaldamento dovuti allo scattering di fotoni. In figura 5.12 è mostrato l'andamento del SNR e dell'area della media dei picchi al variare di t_{hold} fra 5 ms e 1 s. Sia l'SNR che l'area crescono molto rapidamente, lasciando pensare che la coerenza venga persa quasi completamente durante il tempo di accensione del reticolo ($t_{ramp} = 200$ ms), raggiungono un massimo a $t_{hold} = 10$ ms e poi cominciano a calare contemporaneamente per tempi superiori a $70 \div 80$ ms. Quest'ultimo andamento è correlato a quello della densità ottica massima della nuvola che in 1 s diminuisce dal valore iniziale di 0.6 fino a 0.3. Di conseguenza cala anche il contributo dello shot noise atomico alle fluttuazioni di densità ottica (da 0.055 a 0.035) e ciò spiega la decrescita dell'SNR. Il calo della densità ottica al centro della nuvola indica che a s = 50 per tempi lunghi vi è una perdita rilevante di atomi dal reticolo.



Figura 5.12: Calibrazione del tempo t_{hold} di permanenza nel reticolo.

L'ultima calibrazione effettuata è stata quella del tempo di accensione del reticolo ed il risultato è mostrato in figura 5.13. Per $t_{ramp} = 100$ ms si capisce facilmente che la rampa non è adiabatica perché è troppo veloce e, quindi, non garantisce la permanenza degli atomi nello stato fondamentale del sistema, portando al loro riscaldamento ed alla fuga dalla trappola. Per tempi lunghi, invece, si ha un segnale inferiore probabilmente perché molti atomi vengono persi durante un così lento trasferimento nel reticolo ottico. Infatti con $t_{ramp} = 200$ ms si ha una densità ottica di 0.55, che cala a 0.3 già con $t_{ramp} = 300$ ms e poi diventa 0.25 con $t_{ramp} = 600$ ms. Pertanto è stato deciso di mantenere il tempo scelto inizialmente, pari a $t_{ramp} = 200$ ms.



Figura 5.13: Calibrazione del tempo t_{ramp} di accensione del reticolo.

Misure in presenza di solo Rb

Dopo aver eseguito la calibrazione dei parametri sperimentali, è stato interessante studiare il comportamento del segnale di correlazione al variare dell'altezza del reticolo s, così da studiare cosa avviene avvicinandosi alla transizione Superfluido-Isolante di Mott. Poi è stato acquisito un set di misure al variare del tempo t_{hold} di intrappolamento nel reticolo, fissato ad s = 15, per studiare che cosa avviene durante la decoerenza della fase Superfluida.

Le misure al variare dell'altezza del reticolo s sono state prese variando s da 15 a 60, con un tempo di accensione del reticolo scelto proporzionalmente all'altezza stabilita (da $t_{ramp} = 100$ ms per s = 15 a $t_{ramp} = 200$ ms per $s \ge 30$). La procedura di rivelazione usata è stata quella dell'imaging veloce dalla direzione laterale con un $t_{TOF} = 13$ ms, mentre tutti gli altri parametri sono quelli stabiliti dalla calibrazione. Per le immagini a s = 15 non è stato necessario eseguire il fit della densità ottica con la funzione a nove doppie gaussiane perché, per qualche motivo, non erano evidenti i picchi del superfluido, ma è stato sufficiente un fit con una doppia gaussiana centrale per tener conto del maggiore allargamento. Questo fit è stato usato anche per le immagini ad s = 20, mentre per tutti gli altri valori è stato usato un fit gaussiano.

Nelle figure 5.14a, 5.14b e 5.14c è mostrato rispettivamente l'andamento medio fra il picco 1 ed il picco 2 del SNR, dell'area e del waist. Il rapporto segnale/rumore è buono già per i primi tre valori di s, ma cresce ancora per s = 40e raggiunge il massimo ad s = 50. Il punto ad s = 60 ha un SNR decisamente peggiore perché a tale altezza i fasci laser che generano il reticolo sono vicini al limite della loro potenza, quindi ci si deve attendere una maggiore instabilità. L'andamento del SNR probabilmente non è legato a qualche effetto fisico,



Figura 5.14: Misura dell'andamento del segnale di correlazione al variare dell'altezza s del reticolo in presenza di solo Rb.

ma semplicemente al fatto che le ultime due misure sono state affette da minor rumore. Questa ipotesi è supportata dall'andamento del waist dei picchi che al crescere di s si riduce, raggiungendo per $s \ge 30$ il valore minimo, come predetto dall'equazione (2.42). Infatti si prevede che all'aumentare dell'altezza del reticolo la frazione di atomi nei domini superfluidi tenda a 0 e che quindi tutti i siti reticolari siano occupati solo da atomi nella fase Isolante di Mott. Questo, secondo la (2.45), ed anche come verificato sperimentalmente in [71] per un campione atomico rilasciato da un reticolo 2D, dovrebbe portare anche ad una progressiva decrescita dell'area dei picchi fino al raggiungimento di un valore minimo. Il comportamento dei punti con $s \ge 30$ è in accordo con questa previsione, quello ad s = 20 è compatibile entro le barre di errore, mentre il valore trovato per s = 15è lontano da quello atteso. Probabilmente questo punto non è molto attendibile perché, come notato precedentemente, sono assenti evidenti picchi dovuti ad una frazione superfluida, al contrario di quanto atteso per s = 15. Le misure ad altezza del reticolo fissata a s = 15 al variare del tempo t_{hold} di intrappolamento nel reticolo sono interessanti perché, se analizzate correttamente, possono permettere lo studio del comportamento della correlazione del secondo ordine durante la decoerenza della fase Superfluida. Il set di dati è stato acquisito con la procedura di imaging veloce con rivelazione dalla direzione laterale con un $t_{TOF} = 16.6$ ms, senza l'uso del fascio di pulizia, con $t_{delay} = 3$ ms e con un tempo di accensione del reticolo pari a 100 ms. Il tempo di intrappolamento t_{hold} è stato variato da 11 ms ad 1 s.

E noto che un condensato, interagendo con l'ambiente circostante, subisce su tempi delle centinaia di ms un processo di decoerenza [92] che gli fa perdere la coerenza globale propria dello stato superfluido. Se il campione superfluido si trova in un potenziale reticolare è possibile che parte degli atomi che perdono la coerenza, ma rimangono ancora confinati nel reticolo, vengano a trovarsi in uno stato con caratteristiche simili a quelle dello stato Isolante di Mott. Perciò, se questo è vero, ci si può attendere che al crescere del tempo t_{hold} di intrappolamento nel reticolo la frazione di atomi che hanno perso la coerenza aumenti sempre più e che il segnale di correlazione del secondo ordine cresca di pari passo fino a raggiungere un livello saturato, come discusso nel § 2.4.2.

Ad s = 15 è presente una grande frazione di atomi nei domini che si trovano nella fase Superfluida e questo, come illustrato nel § 1.3.2, comporta l'insorgere di picchi di interferenza legati ad un effetto di correlazione del primo ordine. Sfortunatamente questi picchi si trovano ad una distanza dal centro della nuvola atomica pari proprio alla lunghezza caratteristica (2.41) attesa per i picchi di correlazione del secondo ordine. Risulta evidente che, se le immagini contenenti questi picchi secondari disposti a questa particolare distanza venissero analizzate con la funzione di correlazione del secondo ordine (5.1), la loro sola esistenza causerebbe la comparsa nelle immagini di correlazione di picchi aggiuntivi. Essi sarebbero non solo molto più alti e larghi di quelli dovuti al segnale di interferenza contenuto nelle fluttuazioni della densità ottica, ma anche nelle stesse posizioni. Pertanto il segnale d'interesse risulterebbe completamente mascherato da questo contributo. Questo effetto è stato un fattore limitante per lo studio svolto in [69], ma in [71] è stato sviluppato un metodo per ovviare a questo problema.

Il metodo proposto per eliminare l'effetto dei picchi secondari è il seguente: la densità ottica deve essere fittata con una opportuna funzione che tenga conto sia del picco centrale che degli otto secondari, poi questo fit deve essere sottratto dalla densità per eliminare la densità atomica media. Questa rimozione, non essendo la funzione di fit perfetta, in generale lascia alcuni residui che possono ancora provocare un falso segnale, pertanto le regioni dei picchi secondari devono essere mascherate con delle maschere circolari di raggio maggiore dell'estensione di tali strutture. Nel presente lavoro di tesi è stata sviluppata una funzione di fit a nove doppie gaussiane, già descritta nel § 5.1.2, che ha permesso di svolgere correttamente l'analisi della correlazione di secondo ordine senza richiedere l'uso di ulteriori maschere.

Nelle figure 5.15a, 5.15b e 5.15c è mostrato rispettivamente l'andamento medio del SNR, del waist e dell'ampiezza dei picchi di correlazione del secondo ordine. In rosso sono mostrati i risultati ottenuti sottraendo il fit dei picchi, mentre in blu quelli ottenuti senza la sottrazione. Dal confronto dei due andamenti risulta evidente che essi sono molto diversi e che quindi la procedura di rimozione dei picchi secondari ha avuto successo. Senza eliminare queste strutture dalle immagini si ottiene, come previsto, un'ampiezza ed una larghezza dei picchi di correlazione completamente dominata dal contributo della correlazione del primo ordine. Bisogna notare che in questo caso la larghezza risultante dal fit è sottostimata di un fattore ~ 1.5 perché la forma dei picchi trovati sarebbe stata descritta meglio da una doppia gaussiana. Se invece alle immagini di partenza viene sottratto il fit ottenuto con la funzione a nove doppie gaussiane, si ottiene un andamento sia del SNR che dell'ampiezza di correlazione compatibile con le previsioni teoriche formulate precedentemente e si può notare come venga raggiunto un livello saturato già dopo ~ 260 ms, probabile segno dell'occupazione di tutti i siti reticolari da parte di almeno un atomo che ha perso la coerenza di fase globale.

La precisione del fit con 9 doppie gaussiane è sufficientemente buona da non richiedere, dopo la sua sottrazione dalle immagini, l'ulteriore procedura di mascheramento e ciò è dimostrato dal primo punto a $t_{hold} = 11$ ms perché nell'immagine di correlazione sono del tutto assenti picchi alla distanza pari alla lunghezza caratteristica attesa (l'SNR ed il waist non sono nulli perché solo in questo punto il fit ha scambiato del rumore casuale per un picco). Dall'andamento del waist si può vedere come esso sia, nell'analisi svolta sottraendo il fit, sistematicamente inferiore a quello ottenuto senza nessuna sottrazione.

Si può concludere che l'analisi sviluppata in questo lavoro di tesi ha permesso, al progredire della decoerenza dello stato Superfluido, di evidenziare la progressiva comparsa di atomi in uno stato fisico tale da dare luogo allo stesso tipo di correlazione del secondo ordine prodotta da atomi nello stato Isolante di Mott, eliminando al tempo stesso il contributo della correlazione del primo ordine.



Figura 5.15: Misura dell'andamento del segnale di correlazione al variare del tempo t_{hold} di permanenza nel reticolo ad s = 15 in presenza di solo Rb. In rosso sono mostrati i risultati ottenuti sottraendo il fit dei picchi, mentre in blu quelli ottenuti senza la sottrazione. É immediato notare come i due comportamenti siano ben distinti. Il fit sottostima la larghezza dei picchi nel caso non mascherato.

5.2.2 Caso doppia specie

Dopo aver eseguito la calibrazione dei parametri sperimentali ed alcune misure in presenza del solo Rubidio, si è cercato di studiare la correlazione delle fluttuazioni di densità in presenza sia del Rb che del K. La procedura di preparazione della miscela, di svolgimento dell'esperimento e della successiva rivelazione è stata già descritta nel § 4.4.3. Visto che la procedura di imaging lento si è rivelata sufficiente per ottenere un segnale di correlazione in presenza del solo Rb, si è ritenuto opportuno effettuare le prime misure usando proprio questa tecnica, al posto di quella di imaging veloce che avrebbe richiesto la modifica dello schema ottico di rivelazione.

Per queste prime misure, una volta ottenuto il doppio condensato, prima dell'accensione del reticolo non è stato eseguito il trasferimento di stato delle due specie verso il livello $|1,1\rangle$, per poter controllare le interazioni interspecie mediante le risonanze di Feshbach. É stato deciso di cercare di sfruttare questa possibilità solo dopo aver verificato la presenza del segnale di correlazione sia del Rb che del K senza l'uso di questa tecnica, perché è stato notato che per mantenere stabile l'efficenza del processo di trasferimento (e quindi il numero di atomi totale) sarebbe stato necessario fermare più volte l'acquisizione dei dati, per effettuare una ricalibrazione delle frequenze usate per indurre le transizioni.

Durante le prime misure è stato riscontrato subito un limite legato alla densità ottica: a tempi di espansione di $12 \div 13$ ms, se con il solo Rb si aveva un livello medio al centro della nuvola variabile fra 0.4 e 0.6, in presenza delle due specie la densità del rubidio cala di circa il 25%, mentre quella del potassio difficilmente supera lo 0.2. Inoltre la contemporanea rivelazione dalle direzioni laterale e verticale riduce la densità ottica misurata di un altro 25% perché gli atomi, venendo illuminati da due direzioni, non hanno un asse di quantizzazione ben definito. Pertanto, per ottenere delle densità ottiche medie accettabili, è stato necessario ridurre il tempo di volo a $t_{TOF} = 9$ ms per il K e a $t_{TOF} = 11$ ms per il Rb ed usare solo la rivelazione laterale. Il tempo di espansione è diverso per via dei tempi richiesti dalla procedura di imaging lento.

In queste condizioni sono stati acquisiti dei set di dati di 80-100 immagini in trappola ottica e con reticolo ad s = 50, rivelando entrambe le specie nello stato $|2,2\rangle$. L'analisi delle immagini del Rb ha mostrato la presenza dei picchi di correlazione ad una distanza compatibile entro una deviazione standard con la lunghezza caratteristica l_{theory} attesa:

$$d_{fit} = (29.01 \pm 0.11)$$
 pixel $= (94 \pm 9)\mu m \Leftrightarrow l_{theory} = (95.1 \pm 0.9)\mu m$ (5.7)

Ricordiamo che l'errore su l_{theory} è dovuto alla propagazione dell'incertezza sul tempo di volo e sull'ingrandimento ottico, mentre quello sulla distanza è ricavato dall'incertezza del fit e poi è convertito in μ m propagando opportunamente l'errore. La lunghezza caratteristica attesa per il K è circa doppia rispetto a quella del Rb, a parità di tempo di espansione t_{TOF} , per via della differente massa delle due specie ($m_K/m_{Rb} = 0.47$). Le immagini sono state analizzate con lo stesso metodo sviluppato per il Rb e, sfortunatamente, finora non hanno mostrato la presenza di picchi di correlazione.

Un possibile motivo può essere la bassa densità ottica. Inizialmente si è provato a prendere alcuni set di dati con $t_{TOF} = 13.0$ ms per il K, ma non è stato rivelato nessun segnale di correlazione perché la densità ottica al centro della nuvola non superava lo 0.1. Si è verificato che il rumore fotonico dominava sulle fluttuazioni atomiche, non rispettando così la richiesta sperimentale $\Delta N_a > \Delta N_p$. Quindi, come già discusso, è stato deciso di provare con un tempo di $t_{TOF} = 9.0$ ms a discapito dell'ampiezza e della larghezza attese per i picchi. In questa situazione la densità ottica media è attorno a 0.2 e le fluttuazioni atomiche sono distinguibili rispetto al fondo del rumore fotonico, ma hanno un'ampiezza media confrontabile con esso: $\Delta N_a \sim \Delta N_p$. Pertanto, ricordando anche il risultato della calibrazione della densità ottica svolta sul Rb, è probabile che sia necessario avere delle densità ottiche superiori per ottenere dei risultati positivi. Nelle prossime misure si cercherà di usare un tempo di volo ancora più corto per verificare questa ipotesi, ma comunque è necessario trovare una strategia che permetta di ottenere campioni di K tali da poter lavorare anche a t_{TOF} più lunghi con densità ottiche maggiori.

Un'ulteriore effetto negativo può essere legato alla modulazione ad alta frequenza presente nelle immagini di correlazione che viene rimossa solo grazie all'applicazione del filtro passa banda. É possibile che il segnale di correlazione sia tanto debole da essere dominato da questo rumore ed il filtro può non essere in grado di separare i due contributi. É stato verificato che questa modulazione è causata dal rumore elettronico di lettura della CCD e non è stato trovato nessun modo per ridurlo. Forse una telecamera diversa potrebbe non avere questo fastidioso difetto.

A seguito di questa discussione risulta evidente che per misurare con successo la correlazione delle fluttuazioni di densità di entrambe le specie presenti nella miscela di ⁸⁷Rb e ⁴¹K bisogna superare i problemi sperimentali incontrati. Si potrebbe cercare di percorrere due strade complementari: in primo luogo si dovrebbe cercare di ottimizzare, ove possibile, la sequenza sperimentale usata per preparare il campione atomico al fine di ottenere maggiori densità ottiche del K, inoltre si potrebbe cambiare la telecamera usata per la rivelazione per ovviare al forte rumore di lettura.

102

Conclusioni

Nel presente lavoro di tesi è stata integrata una nuova tecnica diagnostica all'apparato sperimentale già esistente al fine di studiare il comportamento di una miscela di due specie di atomi ultrafreddi intrappolati in un reticolo ottico. L'apparato usato permette di ottenere un doppio condensato di ⁸⁷Rb e ⁴¹K e di confinarlo in un reticolo ottico tridimensionale. In queste condizioni il campione atomico risulta essere ben descritto dal modello di Bose-Hubbard a due specie atomiche, i cui parametri possono essere controllati sperimentalmente con grande precisione. Ciò può permettere di esplorare tutto il diagramma di fase del sistema, in cui è prevista la presenza di molte fasi interessanti ed ancora mai esplorate, come un possibile ordinamento "antiferromagnetico" delle due specie nel reticolo.

Per poter studiare queste nuove fasi della materia bisogna disporre di metodi diagnostici capaci di accedere alle osservabili che le discriminano. Per studiare la disposizione degli atomi in un reticolo è stata già proposta [15] e verificata l'efficacia di una tecnica basata sul calcolo della funzione di correlazione spaziale delle fluttuazioni contenute nelle immagini del profilo di densità di un campione atomico, lasciato espandere per un certo tempo dopo essere stato rilasciato dal reticolo. Questa tecnica sfrutta l'effetto Hanbury Brown e Twiss che causa la presenza di una correlazione nelle fluttuazioni della densità atomica misurate in punti diversi di una matrice di rivelatori, come può essere considerata una CCD. Queste fluttuazioni sono dovute alla statistica quantistica delle particelle bosoniche rivelate ed il profilo e la posizione dei picchi di correlazione sono legati alla disposizione degli atomi nel reticolo prima del loro rilascio.

L'efficacia di questa tecnica è stata dimostrata da alcuni lavori [68, 69, 71, 72] volti a studiare le proprietà del diagramma di fase di una singola specie atomica intrappolata in un reticolo ottico. Nel presente lavoro si è voluto applicare questo metodo diagnostico per studiare il caso di una miscela. L'apparato sperimentale è stato ottimizzato ove necessario ed è stata sviluppata una nuova procedura di rivelazione per ridurre al minimo il contributo delle fonti di rumore alle immagini acquisite. Per verificare l'efficacia di questi interventi è stata studiata l'immagine di correlazione di un gas di solo Rb, che prima del rilascio dal reticolo si trovava nello stato Isolante di Mott, e sono stati osservati i primi picchi di correlazione alle distanze attese, in accordo con i risultati dei precedenti studi.

Una parte molto importante del lavoro svolto è stata lo sviluppo ed il succes-

sivo perfezionamento del programma di analisi dei dati, utilizzato per calcolare la funzione di correlazione ed estrarre il segnale di correlazione cercato. Grande attenzione è stata dedicata all'affidabilità del suo funzionamento ed ai metodi disponibili per migliorare il rapporto segnale/rumore dei risultati con esso ottenuti.

Prima di procedere all'esecuzione di misure di interesse fisico è stato svolto un lavoro completo ed esauriente di calibrazione di tutti i parametri sperimentali ritenuti importanti, sulla base di considerazioni teoriche generali, al fine di trovarne i valori ottimali tali da massimizzare la qualità del segnale di correlazione osservato. Uno studio di questo tipo non era presente in letteratura e può essere d'aiuto per chi in futuro vorrà applicare questa tecnica diagnostica ad altri esperimenti nel campo degli atomi ultrafreddi o anche al di fuori di esso.

Una volta ottimizzato l'apparato sperimentale ed il programma di analisi e prima di passare allo studio del comportamento di una miscela di atomi, è stato ritenuto opportuno svolgere due set di misure in presenza del solo Rb. Lo studio dell'andamento del segnale di correlazione al variare dell'ampiezza del reticolo tridimensionale ha mostrato un buon accordo con le previsioni teoriche e con i risultati sperimentali ottenuti da [71] nel caso di un sistema intrappolato in un reticolo bidimensionale. Nel secondo studio è stato osservato il comportamento del segnale di correlazione al variare del tempo di intrappolamento nel reticolo. Il campione era preparato in uno stato in cui era presente una grande frazione di atomi nella fase Superfluida ed era atteso che questa frazione diminuisse all'aumentare del tempo, per via di un processo di decoerenza indotto dall'ambiente circostante. Questa predizione teorica è stata confermata, mostrando come parte degli atomi che hanno perso la coerenza si venga a trovare in uno stato con proprietà simili a quello di un Isolante di Mott, in quanto dà luogo ad un segnale di correlazione crescente all'aumentare del tempo. Questa misura è del tutto nuova e mostra che la tecnica interferometrica di Hanbury Brown e Twiss può essere sfruttata non solo per indagare la disposizione degli atomi nel reticolo, ma anche per lo studio dei fenomeni di decoerenza, almeno nell'ambito di sistemi intrappolati in reticoli ottici.

Infine, si è cercato di misurare un segnale di correlazione in presenza di una miscela di ⁸⁷Rb e ⁴¹K intrappolata nel reticolo ottico tridimensionale. Il segnale del Rb è stato osservato ed è in accordo con le previsioni per uno stato Isolante di Mott, mentre non è stato ottenuto quello del K. Sono state identificate le possibili cause di questa situazione e sono state formulate delle strategie volte al superamento dei problemi sperimentali riscontrati. Quando essi saranno risolti si potrà procedere al promettente studio del ricco diagramma di fase di una miscela di atomi ultrafreddi predetto dal modello di Bose-Hubbard a due specie atomiche.
Ringraziamenti

Questi mesi di tesi sono stati per me un periodo molto importante in cui ho potuto avvicinarmi ad un campo della fisica sperimentale molto interessante ed in continuo sviluppo. Ho imparato molte cose importanti e preziose per il mio futuro ed ho conosciuto molte persone brave e capaci. Per questo motivo voglio ringraziare il prof. Massimo Inguscio per avermi offerto la possibilità di partecipare al lavoro di questo laboratorio e di svolgere un esperimento molto interessante e promettente.

Un ringraziamento particolare e caloroso va al dott. Francesco Minardi, responsabile del laboratorio e della mia tesi, che mi ha seguito costantemente e mi ha insegnato molto in questi mesi, chiarendo i miei dubbi e discutendo sempre le mie idee, anche quando queste si rivelavano sbagliate. Voglio poi ringraziare calorosamente il dott. Giacomo Lamporesi per avermi insegnato pazientemente tutto ciò che era necessario per far funzionare l'esperimento ed il dott. Devang Naik per il suo costante sostegno e per avermi aiutato ogni volta che ne avevo bisogno. Non possono non ringraziare anche il dott. Stefano Conclave per il mutuo aiuto che ci siamo dati durante questi mesi, mentre eravamo entrambi dei semplici studenti. Grazie anche al dott. Jacopo Catani e al dott. Florian Schaefer per i preziosi consigli e l'aiuto.

Voglio ringraziare di cuore i miei genitori, Vladimir ed Elena, per essermi sempre stati vicini, per aver avuto sempre fiducia in me, ma soprattutto per avermi permesso di studiare senza altre preoccupazioni ed arrivare a questo traguardo. Grazie a mia sorella Ekaterina, che mi ha dato molti consigli importanti durante la stesura di questa tesi, e a mia nonna Nina, per avermi sostenuto in questo mese di scrittura intensa.

Un semplice ringraziamento non basta per esprimere la mia riconoscenza al mio amore, Elisa, per tutta la fiducia che hai riposto in me e per tutto il sostegno che mi hai dato in questi lunghi mesi, in cui entrambi ci siamo impegnati molto per concludere il nostro studio e guardare avanti insieme.

Un ringraziamento sincero va anche a Paola e Riccardo, genitori di Elisa, e a tutti i miei amici che mi sono stati vicini in questi anni di studi e non solo.

Bibliografia

- M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, Science 269, 198 (1995).
- [2] K. B. Davis, M. O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle, Phys. Rev. 75, 3969 (1995).
- [3] M. R. Andrews, C. G. Townsend, H.-J. Miesner, D. S. Durfee, D. M. Kurn, W. Ketterle, Science 275, 637 (1997)
- [4] Bose-Einstein condensation in atomic gases, Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi", course CXL, edited by M. Inguscio, S. Stringari, and C. E. Wieman, IOS Press, Amsterdam (1999).
- [5] O.Morsch, J. H.Müller, M. Cristiani, D. Ciampini, and E. Arimondo, Phys. Rev. Lett. 87, 140402 (2001).
- [6] B.P. Anderson, and M.A. Kasevich, Science **282**, 1686 (1998).
- [7] F. S. Cataliotti, S. Burger, C. Fort, P. Maddaloni, F. Minardi, A. Trombettoni, A. Smerzi, and M. Inguscio, Science 293, 5531 (2001).
- [8] M. Kozuma, L. Deng, E. W. Hagley, J. Wen, R. Lutwak, K. Helmerson, S. L. Rolston, and W. D. Phillips, Phys. Rev. Lett. 82, 871 (1999).
- [9] J. Stenger, S. Inouye, A. P. Chikkatur, D. M. Stamper-Kurn, D. E. Pritchard, and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. 82, 4569 (1999).
- [10] Yu. B. Ovchinnikov, J. H. Müller, M. R. Doery, E. J. D. Vredenbregt, K. Helmerson, S. L. Rolston, and W. D. Phillips, Phys. Rev. Lett. 83, 284 (1999).
- [11] D. Jaksch, C. Bruder, J. I. Cirac, C. W. Gardiner, and P. Zoller, Phys. Rev. Lett. 81, 3108 (1998).
- [12] R. P. Feyman, Int. J. Theor. Phys. 21, 467 (1982); Found. Phys. 16, 507 (1986); Opt. News 11, 1 (1985).

- [13] W. S. Bakr, A. Peng, M. E. Tai, R. Ma, J. Simon, J. I. Gillen, S. Fölling, L. Pollet and M. Greiner, Science **329**, 599 (2010).
- [14] Jonathan Simon, Waseem S. Bakr, Ruichao Ma, M. Eric Tai, Philipp M. Preiss, and Markus Greiner, Nature 472, 307 (2011).
- [15] E. Altman, E. Demler, and M. D. Lukin, Phys. Rev. A 70, 013603 (2004).
- [16] R. Hanbury Brown and R. Q. Twiss, Nature (London) **177**, 27 (1956).
- [17] R. J. Glauber, Phys. Rev. Lett. **10**, 84 (1963).
- [18] R. J. Glauber, Phys. Rev. **130**, 2529 (1963).
- [19] S.N. Bose, Zeitschrift für Physik 26: 178. doi:10.1007/BF01327326 (1924).
- [20] A. Einstein, Quantentheorie des einatomigen idealen Gases, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, 1 (1925).
- [21] K. Huang, Statistical Mechanics, John Wiley & Sons, (1987).
- [22] V.I. Yukalov, Laser Phys. **19**, 1-110 (2009).
- M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E.Wieman, E. A. Cornell, Science 269,198 (1995);
 E. A. Cornell, C. E.Wieman, Rev. Mod. Phys., 74, 875 (2002).
- [24] K. B. Davis, M. O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. Van Druten, D. S. Durfee,
 D. M. Kurn, W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **75**, 3969 (1995);
 W. Ketterle, Rev. Mod. Phys., **74**, 1131 (2002).
- [25] Y. Gott, M. Ioffe, and V. Tel'lkovskii, Nucl. Fusion. Suppl. Pt. 3, 1045 (1962).
- [26] D. E. Pritchard, Phys. Rev. Lett. 51, 1336 (1983).
- [27] A. Ashkin, J.P. Gordon, Opt. Lett. 8, 511 (1983).
- [28] H.J Metcalf, P. van der Straten, Laser Cooling and Trapping, Springer, 2001.
- [29] G. M. Tino, Lezioni del corso di Fisica Atomica, Università degli Studi di Firenze (2010).
- [30] R. Grimm, M.Weidemüller, Y.B.Ovchinnikov, Adv.At.Mol.Opt.Phys. 42, 95 (2000).
- [31] J. Dalibard, Cohen-Tannoudji, J. Opl. Soc. Am.B 2, 1707 (1985) e 6, 2023 (1989)

- [32] L. Fallani, F. Minardi, G. Roati, *Lezioni del corso di Atomi Ultrafreddi*, Università degli Studi di Firenze (2010).
- [33] N.W. Ashcroft, and N.D. Mermin, *Solid State Physics*, Brooks/Cole (1976).
- [34] O.Morsch, J. H.Müller, M. Cristiani, D. Ciampini, and E. Arimondo, Phys. Rev. Lett. 87, 140402 (2001).
- [35] J. Hubbard, Proc. R. Soc. London A 276, 238 (1963);
 M. C. Gutzwiller, Phys. Rev. Lett. 10, 159 (1963);
 J. Kanamori, Prog. Theor. Phys. 30, 275 (1963) [CAS].
- [36] Fisher, M. P. A., Weichman, P. B., Grinstein, G. Fisher, D. S., Phys. Rev. B 40, 546 (1989).
- [37] W. Zwerger, J. Opt. B **5:S9**, (2003).
- [38] N. F. Mott, Proc. Phys. Soc. London Ser. A 62, 416 (1949).
- [39] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T. W. Hänsch, and I. Bloch, Nature 415, 39 (2002).
- [40] D. Jaksch, C. Bruder, J. I. Cirac, C. W. Gardiner, and P. Zoller, Phys. Rev. Lett. 81, 3108 (1998).
- [41] D. van Oosten, P. van der Straten, and H. T. C. Stoof, Phys. Rev. A 63, 053601 (2001).
- [42] G. G. Batrouni, V. Rousseau, R. T. Scalettar, M. Rigol, A. Muramatsu, P. J. H. Denteneer and M. Troyer, Phys. Rev. Lett. 89, 117203 (2002).
- [43] E. Altman, W. Hofstetter, E. Demler and M. D. Lukin, New J. Phys. 5, 113 (2003).
- [44] G.-H. Chen and Y.-S.Wu, Phys. Rev. A 67, 013606 (2003).
- [45] G.-P. Zheng, J.-Q. Liang, and W. M. Liu, Phys. Rev. A **71**, 053608 (2005).
- [46] A. Isacsson, Min-Chul Cha, K. Sengupta, and S. M. Girvin, Phys. Rev. B 72, 184507 (2005).
- [47] T. Mishra, Ramesh V. Pai and B. P. Das, cond-mat/0610121 (2006).
- [48] M. Guglielmino, V.Penna, B. Capogrosso-Sansone, Phys. Rev. A 84, 031603(R) (2011).
- [49] G. Thalhammer, G. Barontini, L. De Sarlo, J. Catani, F. Minardi, M. Inguscio, Phys. Rev. Lett. 100, 210402 (2008).

- [50] S. Conclave, Transizione di Mott in una miscela Bose-Bose a interazioni controllabili, Tesi di Laurea in Fisica, Università degli Studi di Roma "La Sapienza" (2012).
- [51] C. Weber, G. Barontini, J. Catani, G. Thalhammer, M. Inguscio, F. Minardi, Phys. Rev. A 78, 061601(R) (2008).
- [52] G. Barontini, C. Weber, F. Rabatti, J. Catani, G. Thalhammer, M. Inguscio, F. Minardi, Phys. Rev. Lett. 103, 043201 (2009).
- [53] M. Schellekens, L'Effet Hanbury Brown et Twiss pour les Atomes Froids, Ph.D. thesis, Université Paris XI Orsay (2007).
- [54] A. A. Michelson and E. W. Morley, Ivi, 1887, **34**.
- [55] R. Hanbury Brown, R. C. Jennison, and M. D. Das Gupta, Nature 170, 1061 (1952).
- [56] R. Hanbury Brown, and R. Q. Twiss, Phil. Mag. 45, 663 (1954).
- [57] M. Henny, S. Oberholzer, C. Strunk, T. Heinzel, K. Ensslin, M. Holland, and C. Schönenberger, Science 284, 296 (1999).
- [58] W. D. Oliver, J. Kim, R. C. Liu, and Y. Yamamoto, Science **284**, 299 (1999).
- [59] H. Kiesel, A. Renz, and F. Hasselbach, Nature **418**, 392 (2002).
- [60] M. Iannuzzi, A. Orecchini, F. Sacchetti, P. Facchi, and S. Pascazio, Phys. Rev. Lett. 96, 080402 (2006).
- [61] M. Naraschewski, R. J. Glauber, Phys. Rev. A 59, 4595 (1999).
- [62] J. P. Grondalski, P. M. Alsing, I. H. Deutsch, Opt. Exp. vol. 5, 249 (1999).
- [63] M. Yasuda and F. Shimizu, Phys. Rev. Lett. 77, 3090 (1996).
- [64] A. Ottl, S. Ritter, M. Köhl, and T. Esslinger, Phys. Rev. Lett. 95, 090404 (2005).
- [65] M. Schellekens, R. Hoppeler, A. Perrin, J. V. Gomes, D.Boiron, A. Aspect, and C. I. Westbrook, Science **310**, 648 (2005).
- [66] T. Jeltes, J. M. McNamara, W. Hogervorst, W. Vassen, V. Krachmalnicoff, M. Schellekens, A. Perrin, H. Chang, D. Boiron, and A. Aspect, and C. I. Westbrook, Nature (London) 445, 402 (2007).
- [67] S. S. Hodgman, R. G. Dall, A. G. Manning, K. G. H. Baldwin, A. G. Truscott, Science, **331**, 6020 (2011).

- [68] M. Greiner, C. A. Regal, J. T. Stewart, and D. S. Jin, Phys. Rev. Lett. 94, 110401 (2005).
- [69] S. Fölling, F. Gerbier, A. Widera, O. Mandel, T. Gericke, I.Bloch, Nature 434, 481 (2005).
- [70] T. Rom, Th. Best, D. van Oosten, U. Schneider, S. Fölling, B. Paredes, I. Bloch, Nature (London) 444, 733 (2006).
- [71] I. B. Spielman, W. D. Phillips, J. V. Porto, Phys. Rev. Lett. 98, 080404 (2007).
- [72] V. Guarrera, N. Fabbri, L. Fallani, C. Fort, K. van der Stam, M. Inguscio, Phys. Rev. Lett. 100, 250403 (2008).
- [73] M. Modugno, C. Fort, P. Maddaloni, F. Minardi and M. Inguscio, Eur. Phys. J. D 17, (2001).
- [74] G. Camy, C. J. Borde, M. Ducloy, Optics Communications 41, 325 (1982).
- [75] J. Catani, A new apparatus for ultracold K-Rb Bose-Bose atomic mixtures, Ph.D. thesis, Università degli Studi di Firenze (2006).
- [76] L. De Sarlo, Ultracold bosonic mixtures: cold collisions and optical lattices, Ph.D. thesis, Università degli Studi di Firenze (2007).
- [77] O. Morsch, and M. Oberthaler, Rev. Mod. Phys. 78, 179 (2006).
- [78] G. Barontini, Ultracold Bose-Bose mixtures with tunable interspecies interactions, Ph.D thesis, Università degli Studi di Firenze (2010).
- [79] W. Petrich, M.H. Anderson, J.R. Ensher and E.A. Cornell, J. Opt. Soc. Am. B 11, 1332 (1994).
- [80] B. M. Penetrante, J. N. Bardsley, M. A. Levine, D. A. Knapp, and R. E. Marrs, Phys. Rev. A 43, 4873 (1991).
- [81] G.Modugno, G. Ferrari, G. Roati, R. J. Brecha, A. Simoni, and M. Inguscio, Science 9, 1320 (2001).
- [82] C.J. Foot, Atomic Physics, Oxford Univ. Press (2005).
- [83] Ketterle, Durfee, Stamper-Kurn, Making, probing and understanding Bose-Einstein condensates, cond-mat/9904034
- [84] J. Viana Gomes, A. Perrin, M. Schellekens, D. Boiron, C. I. Westbrook, M. Belsley, Phys. Rev. A 74, 053607 (2006).

- [85] Y. Castin, R. Dum, Phys. Rev. Lett. 77, 5315 (1996).
- [86] M. Modugno, Appunti del corso di Fenomeni Quantistici Macroscopici, Università degli Studi di Firenze (2010).
- [87] N. Fabbri, Diagnostica Hanbury Brown e Twiss per bosoni ultrafreddi in reticoli ottici, Tesi di Laurea in Fisica, Università degli Studi di Firenze (2007).
- [88] S. Fölling, Probing Strongly Correlated States of Ultracold Atoms in Optical Lattices, Ph.D thesis, Johannes-Gutenberg-Universität Mainz, (2008).
- [89] J. Goodman, Statistical Optics, Wiley, New York (1985).
- [90] S. Butterworth, Wireless Engineer, vol. 7, 1930.
- [91] Rabiner, L.R., and B. Gold., *Theory and Application of Digital Signal* Processing. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1975.
- [92] R. Graham, Phys. Rev. Lett. 81, 5262 (1998).