



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FIRENZE
Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Tesi di Laurea Specialistica
in Scienze Fisiche e Astrofisiche

Diagnostica Hanbury Brown e Twiss per bosoni ultrafreddi in reticoli ottici

Candidata: Nicole Fabbri
Relatore: Prof. Massimo Inguscio

Anno Accademico 2006/07

Indice

Introduzione	1
1 Atomi ultrafreddi in reticoli ottici	7
1.1 Il modello di Bose-Hubbard	8
1.1.1 Lo stato fondamentale dell'Hamiltoniana di B-H	10
1.2 Transizione da Superfluido ad isolante di Mott	13
1.3 Rottura della simmetria traslazionale	16
1.3.1 Sistemi confinati	17
1.3.2 Effetti del disordine: il Bose Glass	19
1.4 Il potenziale dipolare	21
1.5 Il reticolo ottico	23
1.6 Reticoli disordinati e quasi-periodici	26
2 L'effetto Hanbury Brown e Twiss	29
2.1 L'esperimento di Hanbury Brown e Twiss	30
2.2 Analisi del fenomeno	31
2.3 Applicazione all'ottica atomica	33
3 L'apparato sperimentale	39
3.1 Il campione atomico: il ^{87}Rb	39
3.2 Realizzazione del condensato di Bose-Einstein	40
3.2.1 La trappola magneto ottica (MOT)	41
3.2.2 La compressione e la melassa ottica	42
3.2.3 La trappola magnetica e il raffreddamento evaporativo	43
3.3 Il reticolo ottico principale	45
3.3.1 La sorgente laser	45
3.3.2 Lo schema ottico	45
3.4 Il reticolo bicromatico	48
3.4.1 La sorgente laser del reticolo secondario	49
3.4.2 Lo schema ottico	50
3.5 Calibrazione dei reticoli ottici	52

3.5.1	Diffrazione di Bragg in regime Raman-Nath	53
3.5.2	Osservazione delle oscillazioni di Rabi	55
4	Studio sperimentale delle correlazioni di rumore	59
4.1	Procedura di misura	60
4.2	La tecnica di rivelazione	64
4.2.1	Tempistica della rivelazione	67
4.3	Le fonti sperimentali di rumore	68
4.4	Procedura di analisi di dati	70
4.4.1	Il teorema di Wiener-Khinchine	72
4.4.2	I filtri	73
4.4.3	Simmetrie delle immagini della correlazione di rumore . .	75
4.4.4	Selezione delle immagini	76
4.4.5	Il programma di elaborazione dei dati	77
4.5	Risultati sperimentali	77
4.5.1	Considerazioni sulla correlazione nella fase di Mott . . .	77
4.5.2	Correlazione di atomi in un reticolo quasi-disordinato: rottura della fase di Mott	79
4.6	Confronto con le simulazioni	83
	Conclusioni	94
	Bibliografia	98

Introduzione

Negli ultimi anni la fisica dei gas ultrafreddi in reticoli ottici ha conosciuto un amplissimo sviluppo, dimostrando di poter offrire una vasta gamma di possibilità di indagine sia teorica che sperimentale. A partire dalla prima realizzazione della condensazione di Bose-Einstein di un gas diluito di atomi ultrafreddi nel 1995 [1, 2], è stato infatti aperto un nuovo capitolo della fisica atomica e molecolare, al centro del quale vi è lo studio delle proprietà statistiche delle particelle e delle loro interazioni.

Per diversi anni l'obiettivo principale è stato quello di evidenziare i molteplici fenomeni associati all'esistenza di una coerenza macroscopica, al primo ordine: fra gli esperimenti di fondamentale importanza in quest'ambito ricordiamo l'osservazione dell'interferenza fra due condensati sovrapposti [3], gli studi sulla coerenza di fase a lungo raggio della funzione d'onda del condensato [4] e sulla nascita di vortici quantizzati [5]. Dal punto di vista teorico il sistema a molti corpi debolmente interagenti che costituisce il condensato viene descritto da una funzione d'onda macroscopica coerente, con un ordine a lungo raggio, concetto noto in fisica della materia condensata in relazione alla superfluidità e alla superconduttività. Questa rappresentazione peraltro riporta anche alla descrizione dello stato coerente della radiazione laser [6]. D'altronde la funzione d'onda macroscopica, che è direttamente connessa ai gradi di libertà microscopici, fornisce una descrizione completa del sistema, esprimibile mediante un'equazione di Schroedinger non lineare, nota come equazione di Gross-Pitaevskii [7, 8].

Più recentemente l'introduzione dei reticoli ottici, costituiti da onde elettromagnetiche stazionarie generate da fasci laser contropropaganti, ha allargato enormemente lo scenario della fisica dei gas ultrafreddi. La realizzazione di sistemi atomici ultrafreddi in reticoli ottici ha infatti permesso di accedere ad un regime che, anche per gas atomici estremamente diluiti, non può essere trattato in termini di particelle non interagenti. Il sorgere di tali fenomeni è legato alla fisica dei sistemi fortemente correlati, che per lungo tempo è stata esclusivamente legata alla fisica della materia condensata o dei liquidi quantistici, e sembrava preclusa ai sistemi atomici sotto forma di gas diluiti. Al

contrario, i reticoli ottici costituiscono un sistema ideale per lo studio di tali fenomeni.

Mentre i cristalli materiali sono affetti da impurezze e difetti, il reticolo ottico è caratterizzato da una rigorosa periodicità; tale periodicità è inoltre costante nel tempo, dati i lunghi tempi di coerenza della radiazione laser che genera il reticolo stesso. A ciò si aggiunge il fatto che il reticolo è una struttura elementare, costituita unicamente da fotoni, che sono bosoni non interagenti, e non possono pertanto sostenere fononi. Queste caratteristiche peculiari consentono la misura di osservabili fisiche che non sono accessibili nei cristalli materiali. Lo studio dei sistemi di gas ultrafreddi in reticoli ottici deboli ha permesso l'indagine dei fenomeni di particella singola in un potenziale periodico, in analogia all'elettrone in un cristallo ideale, come lo studio delle oscillazioni di Bloch di gas termici [9] e di gas degeneri [10], e dell'effetto Josephson [11]. Ha permesso inoltre di fornire la conferma sperimentale dell'effetto Kapitza-Dirac [12] e l'osservazione della diffrazione di Bragg, ottenuta dapprima per gas termici [13] e poi su condensati di Bose-Einstein [14, 15, 16].

In reticoli ottici molto intensi, il comportamento globale di un gas di atomi ultrafreddi è invece descritto dal modello di Bose-Hubbard, introdotto anch'esso per lo studio della fisica dello stato solido, e proposto per la prima volta nell'ambito di sistemi di gas atomici nel lavoro di D. Jaksch in [17]: l'indagine del sistema in tale regime risulta quindi interessante anche in una prospettiva di simulazione quantistica di sistemi di materia condensata, come proposto in [18].

Un'ulteriore caratteristica dei reticoli ottici che si rivela di fondamentale importanza è la possibilità di modificare i parametri fisici fondamentali del sistema semplicemente attraverso il controllo dell'intensità della luce laser e quindi dell'altezza del reticolo. Ciò ha aperto la strada allo studio della fisica di atomi in diversi regimi di interazione, permettendo di sperimentare diverse fasi quantistiche che si associano a questi diversi regimi. È stato in tal modo possibile studiare la transizione dalla fase superfluida alla fase di isolante di Mott [19], ovvero da un gas debolmente interagente ad un sistema a molti corpi fortemente correlato. La fase di isolante di Mott, in particolare, si presenta come una distribuzione di atomi localizzati nei siti reticolari; ad ogni sito corrisponde un numero di atomi discreto e univocamente definito in base ai parametri sperimentali (essenzialmente, l'altezza del reticolo e il numero totale degli atomi). Le caratteristiche peculiari della fase di Mott saranno illustrate ampiamente nel §1.2.

Oltre a ciò, attraverso la realizzazione di reticoli quasi-periodici è possibile indagare la fisica dei sistemi disordinati: proprio a Firenze, nel 2006, usando un reticolo ottico bicromatico in regime di forte interazione, sono state osser-

vate le prime evidenze sperimentali della fase quantistica di *Bose glass* [20]. L'esistenza di tale fase è stata prevista alla fine degli anni '80 [21, 22] ed è stata oggetto di recenti studi nel contesto specifico dei sistemi atomici in reticoli ottici [23, 24]. Una delle caratteristiche peculiari che accomuna le due fasi di isolante di Mott e di *Bose glass* è la scomparsa delle proprietà di coerenza spaziale al primo ordine a lungo raggio, benché poi le due fasi siano ben differenziate, come sarà illustrato in dettaglio (v. § 1.2 e § 1.3.2).

Nell'indagine di simili sistemi, diviene dunque fondamentale lo studio delle proprietà di coerenza agli ordini superiori. Per esempio nel caso di sistemi che presentano coerenza di fase al primo ordine come il condensato di Bose-Einstein in fase superfluida in un reticolo ottico, si possono ricavare informazioni fondamentali sulla distribuzione spaziale degli atomi nei siti reticolari semplicemente dal profilo di interferenza, ottenuto osservando la distribuzione di densità degli atomi dopo un tempo di espansione. Al contrario, laddove il sistema non esibisca coerenza al primo ordine, non è possibile ricavare informazioni sulla distribuzione spaziale direttamente dal profilo di densità in espansione. Del resto non è neppure possibile osservare direttamente la distribuzione dei bosoni nel reticolo ottico in quanto, con le tecniche sperimentali ad oggi disponibili, non si può avere una risoluzione sito per sito dell'immagine del sistema atomico nel reticolo (nelle configurazioni sperimentali tipiche, la distanza fra due siti reticolari contigui è infatti inferiore al μm).

Risulta pertanto cruciale l'applicazione di un metodo di indagine che evidenzi la coerenza del sistema agli ordini superiori, come l'effetto Hanbury Brown e Twiss, che si osserva misurando la correlazione delle fluttuazioni di densità di particelle indistinguibili. Com'è noto, l'esperimento originale di R. Hanbury Brown e R. Q. Twiss [25, 26], nato nell'ambito dell'astronomia, consiste nell'osservazione della correlazione delle fluttuazioni dei conteggi di fotoni provenienti da una sorgente incoerente e rivelati in due punti diversi. L'applicazione primigenia di tale tecnica è stata la misura del diametro angolare della stella Sirio.

Una prima descrizione quantistica del fenomeno è stata fornita dal lavoro teorico di U. Fano in [27] in termini di una sovrapposizione delle ampiezze di probabilità di differenti cammini di rivelazione indistinguibili, che dà luogo ad un effetto di interferenza. La trattazione del fenomeno può essere svolta però anche sulla base di considerazioni di statistica quantistica (v. per esempio [28]), attraverso il calcolo delle fluttuazioni della popolazione di particelle bosoniche e fermioniche. In tal modo si evidenzia per i bosoni una correlazione nelle fluttuazioni interpretabile in termini di comportamento agglomerato (comunemente definito *bunching*), e per i fermioni un'anticorrelazione (*antibunching*).

L'effetto Hanbury Brown e Twiss ha trovato la sua naturale applicazione nello studio dei sistemi atomici fermionici e bosonici [29, 30, 31]: questi esperimenti riprendono direttamente la tecnica dell'osservazione della correlazione delle posizioni di arrivo degli atomi su punti diversi del rivelatore. Lo studio teorico di E. Altman, E. Demler e M. D. Lukin [32] ha poi suggerito l'utilizzo di un diverso metodo di indagine interferometrica delle fluttuazioni della densità atomica, sempre basato sull'effetto Hanbury Brown e Twiss, effettuato mediante l'osservazione del profilo di densità degli atomi dopo l'espansione da un reticolo ottico. Questa idea ha trovato le sue prime applicazioni nello studio di sistemi atomici in regimi fortemente correlati, in particolare per sistemi costituiti da bosoni e fermioni ultrafreddi, rispettivamente in [33, 34, 35], e per sistemi dati da coppie correlate di fermioni originati dalla dissociazione di molecole[36].

Questo lavoro di tesi è stato dedicato allo studio delle correlazioni Hanbury Brown e Twiss su sistemi di bosoni ultrafreddi in reticoli ottici, in un regime di interazione forte. In particolare, tale studio è stato basato sul calcolo della correlazione delle fluttuazioni del profilo di densità degli atomi dopo l'espansione libera che segue lo spegnimento del reticolo.

Le misure sono state dapprima effettuate su un sistema in fase di isolante di Mott, ed hanno confermato i risultati sperimentali ottenuti in [33].

L'aspetto originale di questo lavoro di tesi è però costituito dall'applicazione della diagnostica Hanbury Brown e Twiss su un sistema quasi-disordinato, dove si verifica la rottura controllata della fase di isolante di Mott, ottenuta mediante la sovrapposizione di due reticoli di lunghezza d'onda non commensurata¹ e di diversa altezza.

La fase di Mott, come già accennato, comporta una distribuzione ordinata degli atomi caratterizzata dal riempimento discreto dei siti reticolari; l'osservazione della funzione di correlazione spaziale delle fluttuazioni di densità degli atomi dopo l'espansione presenta in questo caso dei picchi la cui posizione è legata alla periodicità del reticolo ottico. L'introduzione del disordine mediante la realizzazione di un reticolo bicromatico, permette di produrre delle disomogeneità locali del potenziale che provocano una redistribuzione del gas bosonico nei siti. L'osservazione della funzione di correlazione delle fluttuazioni di densità degli atomi dopo l'espansione ha rivelato in questo caso la comparsa di picchi ulteriori, in corrispondenza della periodicità del reticolo secondario: la posizione di tali picchi è non banale, in quanto ad essi non corrispondono in realtà dei minimi del potenziale. Come vedremo, l'applicazione del metodo di indagine interferometrica di Hanbury Brown e Twiss allo studio della fase di

¹La definizione operativa di non commensurabilità fra due lunghezze d'onda misurate sperimentalmente sarà fornita in dettaglio nel § 1.6.

isolante Mott descrive essenzialmente la distribuzione regolare della spaziatura dei minimi del potenziale, mentre nel caso di un sistema disordinato essa fornisce delle informazioni ulteriori, e in particolare rende conto dell'effettivo riempimento inhomogeneo dei singoli siti.

La tesi è organizzata come segue. Il primo capitolo è dedicato ad una trattazione teorica del sistema in esame: si introduce innanzitutto il modello di Bose-Hubbard, che descrive bosoni interagenti in un potenziale periodico e le diverse fasi quantistiche in cui questi si trovano al variare dei parametri fisici del sistema. Si descrive quindi la realizzazione di un potenziale periodico e quasi-periodico mediante reticoli ottici. Nel secondo capitolo viene definita la funzione di correlazione delle fluttuazioni, illustrando l'esperimento di Hanbury Brown e Twiss e le sue applicazioni all'ottica atomica. Nel terzo capitolo viene presentato per sommi capi l'apparato sperimentale, già in funzione, utilizzato per la produzione del condensato di Bose-Einstein, quindi si descrive più in dettaglio l'apparato specificamente usato per la realizzazione dei reticoli ottici periodici e quasi-periodici. Il quarto capitolo è infine dedicato alla presentazione della procedura sperimentale che permette di ricavare la funzione di correlazione spaziale delle fluttuazioni di densità degli atomi dopo l'espansione, si discutono i risultati sperimentali e si fornisce il confronto con alcune simulazioni teoriche del sistema in esame.

Capitolo 1

Atomi ultrafreddi in reticoli ottici

Un sistema di bosoni ultrafreddi interagenti in un potenziale periodico, come quello prodotto da un *reticolo ottico*, è efficacemente descritto dal modello di Bose-Hubbard, che presenteremo in questo capitolo. Mediante la risoluzione dell'equazione agli autovalori dell'Hamiltoniana di Bose-Hubbard è infatti possibile dar conto della nascita di diverse fasi quantistiche, in quanto lo stato fondamentale del sistema dipende fortemente dai parametri fisici che ivi compaiono. In particolare in reticoli ottici perfettamente periodici, si assiste alla transizione dalla fase superfluida alla fase di isolante di Mott, indotta dall'aumento dell'altezza del potenziale. In questo capitolo si discute anche l'effetto della rottura della simmetria traslazionale indotto dall'introduzione di un potenziale aggiuntivo confinante o di un potenziale disordinato: da quest'ultimo infatti consegue, in regimi di forte interazione, la nascita della fase di *Bose glass*.

La seconda parte di questo capitolo è dedicata alla descrizione di ciò che è alla base della realizzazione dei reticoli ottici, ovvero l'interazione fra atomi ultrafreddi e un campo elettrico coerente di radiazione non risonante. Nello specifico, l'interazione è essenzialmente descritta da un potenziale conservativo (interazione di dipolo), facilmente separabile, mediante un'opportuna scelta dei parametri sperimentali, dal contributo dissipativo che è invece responsabile del riscaldamento degli atomi: essa costituisce pertanto uno strumento importante per la manipolazione degli atomi ultrafreddi. Il reticolo ottico non è altro che il potenziale periodico che nasce dall'interazione degli atomi con un'onda elettromagnetica stazionaria, costituita da due fasci laser contropropaganti. Oltre alla descrizione della configurazione di base del reticolo ottico in varie dimensioni, vengono inoltre qui introdotti i concetti di reticolo disordinato e quasi-periodico, che hanno consentito la realizzazione di sistemi disordinati su

cui si è concentrata l'indagine sperimentale svolta in questo lavoro di tesi.

1.1 Il modello di Bose-Hubbard

La dinamica di un gas diluito di atomi bosonici neutri in un potenziale periodico può essere efficacemente descritta mediante il modello di Bose-Hubbard, già largamente utilizzato per la trattazione teorica di sistemi della fisica dello stato solido. In particolare, il potenziale periodico che verrà considerato nel corso di questa trattazione è quello generato dall'interazione di dipolo degli atomi con fasci laser contropropaganti, fuori risonanza rispetto alle transizioni atomiche. Questa configurazione, che prende il nome di *reticolo ottico*, verrà ampiamente illustrato nei § 1.5, 1.4 e 1.6.

La realizzazione del modello di Bose-Hubbard con atomi ultrafreddi in reticoli ottici, proposta in [17], si rivela particolarmente interessante in quanto le costanti di accoppiamento che descrivono il sistema possono essere controllate semplicemente calibrando l'intensità della luce laser che costituisce il reticolo stesso.

Si mostrerà qui in primo luogo come l'Hamiltoniana di Bose-Hubbard si possa ricavare dall'espressione generale dell'operatore Hamiltoniano per atomi bosonici in un potenziale periodico.

Il moto quantizzato degli atomi in un potenziale periodico è essenzialmente rappresentato dai moti vibrazionali degli atomi in un singolo sito reticolare e dal *tunneling* fra siti primi-vicini: essi costituiscono i termini dominanti dello spettro, descrivibile in termini di una struttura a bande (v. per esempio [37]). L'Hamiltoniana generale che descrive un simile sistema è data da:

$$H = \int d^3x \psi^\dagger(\mathbf{x}) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_0(\mathbf{x}) \right) \psi(\mathbf{x}) + \frac{2\pi a_s \hbar^2}{m} \int d^3x \psi^\dagger(\mathbf{x}) \psi^\dagger(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) \quad (1.1)$$

In questa espressione $\psi^\dagger(\mathbf{x})$ è l'operatore di campo bosonico per un atomo in un determinato stato interno e $V_0(\mathbf{x})$ il potenziale periodico dato dal reticolo ottico. L'interazione collisionale fra gli atomi è espressa in maniera approssimata mediante uno pseudopotenziale a corto raggio, dove a_s è la lunghezza di *scattering* in onda s ed m la massa dell'atomo. Tale approssimazione è lecita nel limite di gas diluiti, tali che $n^{-1/3}$ è molto maggiore del raggio dell'interazione (con n densità atomica). Per un singolo atomo, gli autostati di tale Hamiltoniana sono gli stati di Bloch. Un sistema a molti corpi come un gas di bosoni deve essere invece descritto mediante un'espansione più generale in funzioni d'onda di Wannier, ricavate da un'appropriata sovrapposizione di

onde di Bloch, e localizzate sui singoli siti reticolari, $w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$, dove x_i è la posizione del sito i -esimo. Tale espansione si scrive come:

$$\psi(\mathbf{x}) = \sum_i \hat{b}_i w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \quad (1.2)$$

dove \hat{b}_i è l'operatore di annichilazione di un bosone nel sito reticolare i -esimo che, insieme all'operatore di creazione \hat{b}_i^\dagger , obbedisce alle regole di commutazione canoniche $[\hat{b}_i^\dagger, \hat{b}_j] = \delta_{ij}$. Si assuma adesso che le scale di energia coinvolte nella dinamica del sistema siano molto minori dell'energia necessaria a popolare la seconda banda dello spettro. Sotto questa ipotesi, è possibile considerare solo lo stato vibrazionale di più bassa energia della prima banda. Espandendo quindi gli operatori del campo in eq. (1.1) sulla base delle funzioni d'onda di Wannier si ottiene l'Hamiltoniana di Bose-Hubbard:

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j + \frac{1}{2} U \sum_i \hat{n}_i (\hat{n}_i - 1). \quad (1.3)$$

Nella precedente espressione $\hat{n}_i = \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i$ è l'operatore numero, i cui autostati corrispondono ad un numero definito di bosoni nel sito i -esimo. Si noti che la prima sommatoria è eseguita solo su siti primi-vicini. L'accoppiamento fra siti reticolari primi vicini è caratterizzato dall'elemento di matrice di *tunneling*

$$J_{ij} = \int d^3x w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_0(\mathbf{x}) \right) w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j). \quad (1.4)$$

Si noti che nell'eq. (1.3) il parametro J non presenta dipendenza dagli indici i e j dei siti reticolari primi-vicini, come invece in eq. (1.4): l'Hamiltoniana di Bose-Hubbard (1.3) è scritta infatti nell'ipotesi che il reticolo sia uniforme, e l'accoppiamento fra i siti sia quindi uguale per ogni coppia di primi-vicini. La repulsione fra due atomi in un singolo sito reticolare è invece descritta dal parametro U , che è l'elemento di matrice di interazione

$$U = \frac{4\pi a_s \hbar^2}{m} \int d^3x |w(\mathbf{x})|^4. \quad (1.5)$$

Poiché le interazioni sono a corto raggio, molto minore rispetto alla spaziatura reticolare, si tiene conto esclusivamente dell'interazione fra due atomi che occupano lo stesso sito. Si noti che nel caso di interazioni repulsive, come quelle che saranno considerate nel seguito, il parametro U assume valori positivi.

Dato il potenziale ottico, l'elemento di matrice di *tunneling* J e l'energia di interazione su un sito U possono essere ricavati numericamente dal calcolo

della struttura delle bande. In particolare, l'elemento di matrice J è legato alla larghezza della banda fondamentale attraverso la relazione:

$$4J = |E_0(q = \pi/a) - E_0(q = 0)| \quad (1.6)$$

dove q è il quasi-impulso degli atomi in un reticolo ottico di periodicità a , ed E è l'energia.

Al fine di evidenziare la dipendenza di J ed U dai parametri sperimentali fondamentali, è opportuno effettuare alcune approssimazioni. Approssimando la funzione di Wannier con una funzione d'onda gaussiana centrata su un singolo sito reticolare, si ottiene [38]:

$$J \approx \frac{4}{\sqrt{\pi}} E_R \left(\frac{V_0}{E_R} \right)^{3/4} \exp\left(-2\sqrt{V_0/E_R}\right), \quad (1.7)$$

$$U \approx 5.97 \frac{a_s}{\lambda} E_R \left(\frac{V_0}{E_R} \right)^{3/4}, \quad (1.8)$$

dove $E_R = \hbar^2 k^2 / (2m)$, ovvero l'energia cinetica che un atomo, inizialmente a riposo, guadagna nel processo di assorbimento di un fotone del reticolo.

Dalle eq. (1.7) e (1.8) risulta chiaro che, dal punto di vista sperimentale, i parametri U e J possono essere variati con continuità semplicemente attraverso variazioni dell'altezza del reticolo ottico.

1.1.1 Lo stato fondamentale dell'Hamiltoniana di B-H

Lo stato fondamentale dell'Hamiltoniana di Bose-Hubbard riportata in eq. (1.3) dipende dal rapporto fra le scale di energia del sistema, ovvero da U/J .

Si consideri in prima istanza il semplice caso di una coppia di particelle identiche disposte in due buche di potenziale uguali: il reticolo periodico è una generalizzazione di tale situazione, anche in considerazione del fatto che l'accoppiamento di *tunneling* avviene solo fra siti reticolari primi-vicini, come già precedentemente notato.

Se le due particelle sono non interagenti, si presentano due stati debolmente legati, uno simmetrico e l'altro antisimmetrico: $|\varphi_S\rangle = 1/\sqrt{2}(|\varphi_L\rangle + |\varphi_R\rangle)$ e $|\varphi_A\rangle = 1/\sqrt{2}(|\varphi_L\rangle - |\varphi_R\rangle)$, dove $|\varphi_L\rangle$ e $|\varphi_R\rangle$ sono rispettivamente lo stato fondamentale della buca di potenziale sinistra e destra. La differenza di energia fra $|\varphi_S\rangle$ e $|\varphi_A\rangle$ è legata alla probabilità che le due particelle si scambino, mediante un doppio *tunneling*, e corrisponde quindi a $2J$. Poiché lo stato simmetrico è ad energia inferiore rispetto allo stato antisimmetrico, lo stato fondamentale del sistema a due corpi non interagente si realizza quando entrambi gli atomi si trovano nello stato simmetrico, ed è descritto da una sovrapposizione di zero, uno e due atomi per sito.

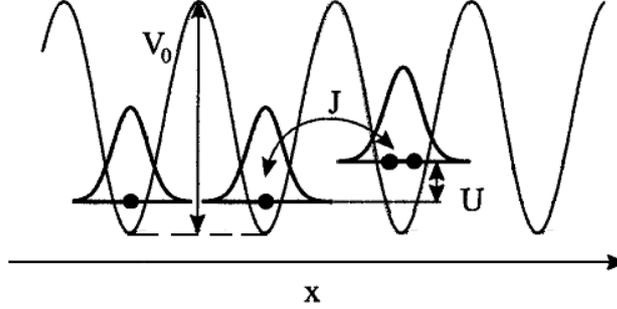


Figura 1.1: Realizzazione del modello di Bose-Hubbard in un reticolo ottico. V_0 indica l'altezza del reticolo, J è il termine di accoppiamento fra siti primi-vicini e U è l'energia di interazione fra atomi nel medesimo sito.

Se al contrario sussistono delle interazioni repulsive fra le particelle, l'energia totale dello stato fondamentale simmetrico aumenta. Esso infatti è costituito dalla sovrapposizione di tre stati: due stati prevedono la presenza di due particelle nella stessa buca, sinistra o destra; il terzo stato, anch'esso simmetrico per scambio, descrive invece la situazione in cui le particelle occupano buche diverse. A causa dell'interazione repulsiva, le configurazioni in cui le due particelle occupano la stessa buca della doppia buca sono energeticamente più costose. Tale contributo aumenta l'energia totale dello stato simmetrico, e questo incremento è quantificabile in $U/2$ per particella. Quando $U \gg J$ si può ricavare, con semplici calcoli, che lo stato complessivo del sistema a due corpi che minimizza l'energia è una sovrapposizione degli stati simmetrico e antisimmetrico $|\varphi_S\rangle$ e $|\varphi_A\rangle$, che si può riscrivere come $|\psi\rangle = 1/\sqrt{2}(|\varphi_L\rangle \otimes |\varphi_R\rangle + |\varphi_R\rangle \otimes |\varphi_L\rangle)$. Questo stato descrive la situazione in cui ognuno dei due siti è occupato esattamente da un atomo.

Possiamo ora considerare un sistema a molte particelle disposte in buche di potenziale periodiche, schematicamente illustrato in Fig. 1.1.

Nel caso di particelle debolmente interagenti, cioè per valori $U/J \ll 1$, il termine di *tunneling* è dominante e lo stato legato fondamentale del sistema a molti corpi con N atomi è costituito dal prodotto di onde di Bloch associate a singole particelle, fra loro identiche:

$$|\Psi_{SF}\rangle_{U/J \approx 0} \propto \left(\sum_{i=1}^M \hat{b}_i^\dagger \right)^N |0\rangle \quad (1.9)$$

dove M è il numero totale di siti reticolari.

La funzione d'onda di ciascun atomo è dunque sparpagliata sull'intero reticolo. Poiché lo stato a molti corpi è dato dal prodotto di stati identici di singola particella, esso può essere descritto attraverso un'unica funzione d'onda macroscopica $|\phi_i\rangle$, che è equivalente ad uno stato coerente. Ne risulta che il valore di aspettazione dell'operatore di distruzione di un bosone nel sito i -esimo è non nullo ($\langle \phi_i | \hat{b}_i | \phi_i \rangle \neq 0$).

Poiché la funzione d'onda macroscopica manifesta una fase definita, il numero degli atomi che occupano un singolo sito reticolare è affetto dalla massima incertezza: l'indeterminazione sul numero n di atomi per sito è legata infatti all'indeterminazione sulla fase φ dalla relazione $\Delta n \Delta \varphi \geq 1$. Il numero di atomi per sito in particolare segue una distribuzione Poissoniana, con una varianza data dal numero medio di atomi di quel sito $\sigma^2(n_i) = \langle \hat{n}_i \rangle$. Il sistema in questo caso esibisce pertanto le caratteristiche fondamentali della fase superfluida.

Viceversa, se il contributo delle interazioni è dominante, cioè per $U/J \gg 1$, le fluttuazioni sul numero degli atomi dovute alla delocalizzazione delle funzioni d'onda di singola particella sono energeticamente sfavorite, perché configurazioni con numero elevato di atomi nello stesso sito hanno un alto costo energetico (ricordiamo che stiamo considerando il caso di interazioni repulsive, $U > 0$). Lo stato fondamentale del sistema è quindi costituito da funzioni d'onda localizzate sui siti reticolari, in modo tale da minimizzare l'energia di interazione. La funzione d'onda dello stato fondamentale a molti corpi si può esprimere come prodotto di stati di Fock locali, autostati del numero di occupazione di un sito singolo. Si supponga di realizzare una configurazione con un numero fissato n di atomi per sito (ipotesi ragionevole nel caso omogeneo sin qui trattato, in assenza cioè di potenziali esterni addizionali di confinamento). Lo stato sarà quindi dato da:

$$|\Psi_{MI}\rangle_{J \approx 0} \propto \prod_{i=1}^M \left(\hat{b}_i^\dagger \right)^n |0\rangle. \quad (1.10)$$

Il numero di atomi per sito è in questo caso esattamente determinato ma la fase della funzione d'onda è completamente indefinita. Ciò si traduce nell'annullarsi del valore di aspettazione dell'operatore di distruzione di un bosone nel sito i -esimo: $\langle \phi_i | \hat{b}_i | \phi_i \rangle \approx 0$. In questo regime di forte interazione il sistema non può essere pertanto descritto attraverso un'unica funzione d'onda macroscopica, come nel caso di un gas di bosoni debolmente interagenti. La fase del sistema qui descritta è definita di isolante di Mott.

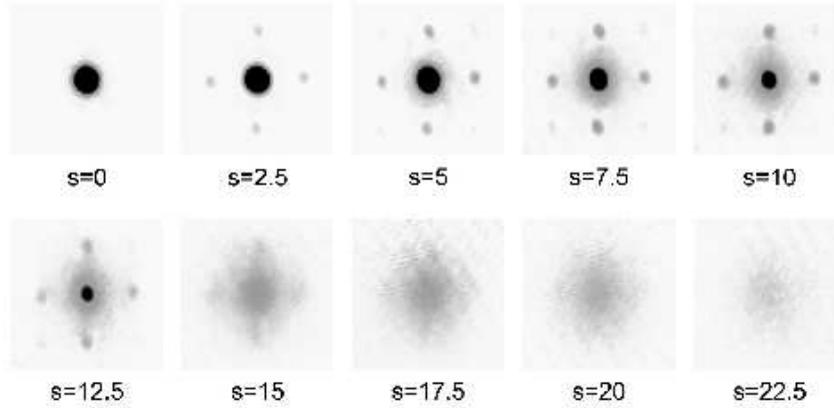


Figura 1.2: Distribuzione di densità della nuvola atomica rivelata in espansione, per diverse altezze del reticolo ottico: la perdita del profilo di interferenza caratterizza la transizione da superfluido a isolante di Mott.

1.2 Transizione da Superfluido ad isolante di Mott

Il modello di Bose-Hubbard predice dunque una transizione dalla fase superfluida alla fase di isolante di Mott qualora si incrementi il valore del rapporto U/J . Si tratta di una transizione di fase quantistica, in cui il parametro di controllo è dato dalle costanti di accoppiamento dell'Hamiltoniana. Si noti che la teoria sviluppata nel paragrafo precedente è valida a $T = 0$, cioè quando le fluttuazioni termiche non giocano alcun ruolo.

Tale transizione può essere realizzata sperimentalmente su un gas bosonico diluito aumentando l'altezza del reticolo ottico in cui gli atomi sono confinati, cioè aumentando l'intensità dei fasci laser che lo generano. Aumentando l'altezza del reticolo infatti, si induce un aumento dell'energia di interazione sul singolo sito U con legge di potenza, ma soprattutto un decadimento esponenziale dell'elemento di matrice di *tunneling* fra siti primi-vicini J , come già illustrato nelle eq. (1.7) e (1.8). A ciò segue una localizzazione sempre maggiore della funzione d'onda atomica.

La transizione dalla fase superfluida alla fase di isolante è stata osservata sperimentalmente per atomi ultrafreddi in un reticolo ottico [19] in corrispon-

denza del valore $U/J \sim z \cdot 5.6$ previsto dalla teoria, riportato in ([38]), dove z è il numero di siti primi-vicini nel reticolo (nel caso di un reticolo cubico semplice $z = 6$).

Il regime superfluido di un gas bosonico in un reticolo ottico, efficacemente descritto dalla teoria di Gross-Pitaevskii e Bogoliubov [39, 40], è principalmente caratterizzato dalla coerenza di fase della funzione d'onda macroscopica che occupa la totalità dei siti reticolari.

Se nei sistemi macroscopici la superfluidità si manifesta attraverso l'assenza di viscosità, riduzione del momento di inerzia, la presenza di correnti persistenti ed altri fenomeni collettivi (il suono II e III), nonché la nascita di vortici quantizzati (fenomeni interpretati tutti in termini di coerenza della fase S del parametro d'ordine, il cui gradiente fissa la velocità del superfluido $v_s = \hbar/m\nabla S$), nei sistemi mesoscopici, invece, un'evidenza della coerenza a lungo raggio e quindi della superfluidità è data dall'interferenza fra differenti componenti del campione atomico, generalmente osservato in espansione [3]. Questa proprietà è stata utilizzata anche in questo lavoro di tesi per caratterizzare la presenza di fase superfluida nella nuvola atomica, come illustrato in Fig. 1.2.

La fase di isolante di Mott, prodotta aumentando l'altezza del reticolo ottico ($U/J \rightarrow \infty$), consiste invece in uno stato a molti corpi nel quale si ha un riempimento discreto e definito dei siti reticolari. La coerenza di fase, propria del regime superfluido, si perde a causa della formazione degli stati di Fock. In questo caso il sistema non presenta interferenza nel profilo di densità degli atomi dopo un intervallo di tempo di espansione dal reticolo.

La natura della fase di isolante si riflette inoltre nell'esistenza di un *gap* finito nello spettro di eccitazione, che è caratterizzato da una risonanza in corrispondenza dell'elemento di matrice di interazione U . Lo spettro di eccitazione di un isolante di Mott è stato misurato per la prima volta in [19]. Inoltre la compressibilità del sistema $\kappa = \partial n / \partial \mu$ si annulla (dove n è la densità atomica e μ il potenziale chimico), così come naturalmente si annulla la frazione superfluida.

Per valori $U/J > 1$ ma finiti, è previsto tuttavia che rimanga una componente superfluida residua: lo stato del sistema complessivo, descritto in termini di una sovrapposizione di stati di Fock nei singoli siti, dà un valore diverso da zero del valore di aspettazione $\langle \phi_i | \hat{b}_i | \phi_i \rangle$. Ciò si traduce anche in una visibilità residua del profilo di interferenza [41].

Una descrizione più dettagliata della coerenza residua a corto raggio si ottiene mediante un approccio perturbativo, intorno al regime di puro isolante, con $U/J \rightarrow \infty$. In tale regime la funzione di correlazione al primo ordine $G^{(1)}(\mathbf{R})$ è diversa da zero solo in corrispondenza di $\mathbf{R} = 0$, e la distribuzione di

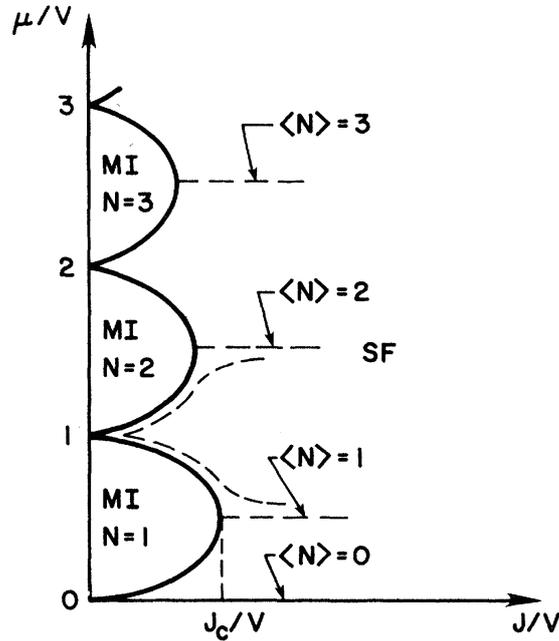


Figura 1.3: Diagramma delle fasi a $T=0$ per un sistema di bosoni interagenti in un reticolo ottico. Per piccoli valori di J/U la fase superfluida è instabile, e il sistema si presenta nella fase di isolante di Mott con riempimento discreto dei siti reticolari [22].

impulso è una gaussiana, che riflette la trasformata di Fourier della funzione d'onda di Wannier. Introducendo un *tunneling* $J \ll U$, lo stato di Mott diviene una mescolanza coerente di coppie particella-lacuna (dove con lacuna si intende l'assenza di una particella in un sito reticolare, in analogia alla fisica dello stato solido). A causa della presenza di uno spettro di energia a bande, né la funzione d'onda della particella né quella della lacuna possono sparpagliarsi sui siti reticolari, ma sono piuttosto legate a piccola distanza l'una dall'altra. Ciò determina il persistere di una significativa coerenza a corto raggio. Usando, come già detto, la teoria della perturbazioni al primo ordine, si ricava che l'ampiezza di probabilità dello stato particella-lacuna è proporzionale a J/U :

$$|\Psi\rangle_{U/J} \propto |\Psi_{MI}\rangle_{J \approx 0} + \frac{J}{U} \sum_{\langle i,j \rangle} \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j |\Psi_{MI}\rangle_{J \approx 0} \quad (1.11)$$

In Fig. 1.3 è riportato il diagramma delle fasi ricavato in [22]: esso rappresenta il piano $J - \mu$, dove μ è il potenziale chimico del sistema, essenzialmente

legato alla densità atomica. Tale diagramma mostra una serie di lobi, all'interno dei quali (per piccoli valori di J rispetto alla scala dell'energia di interazione) il sistema è nella fase di Mott, con un numero intero di atomi per sito reticolare, che cresce all'aumentare di μ ; all'esterno dei lobi (per grandi valori di J) il sistema è un superfluido.

1.3 Rottura della simmetria traslazionale

Introducendo un potenziale esterno addizionale, variabile spazialmente in maniera non periodica, si induce la rottura della perfetta simmetria traslazionale propria del reticolo ottico.

La rottura della simmetria traslazionale può essere su una scala molto maggiore rispetto alla distanza caratteristica tra i siti reticolari, o sulla scala dei siti stessi.

Nel primo caso tale rottura è introdotta imponendo condizioni al contorno non periodiche, ovvero un potenziale aggiuntivo lentamente variabile nello spazio (come può essere un potenziale esterno confinante): esso produce una variazione della densità media, che risulta massima al centro, in corrispondenza del minimo di potenziale, e decade a zero al bordo.

Una rottura della simmetria sulla scala caratteristica dei siti reticolari è invece indotta dalla presenza di disomogeneità locali del potenziale addizionale, sulla scala di alcuni siti reticolari: in questo caso il potenziale può essere quasi-ordinato o disordinato, a seconda che esista o meno una periodicità propria di tali disomogeneità.

In entrambi i casi descritti, l'effetto della rottura della simmetria traslazionale è descritto da un'Hamiltoniana del tipo:

$$H = \int d^3x \psi^\dagger(\mathbf{x}) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{lat}(\mathbf{x}) + V_T(\mathbf{x}) \right) \psi(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \frac{4\pi a_s \hbar^2}{m} \int d^3x \psi^\dagger(\mathbf{x}) \psi^\dagger(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) \quad (1.12)$$

con analogo significato dei simboli come in eq. (1.1), e dove si aggiunge il potenziale esterno $V_T(\mathbf{x})$ variabile spazialmente ma costante nel tempo.

Sotto le ipotesi prima illustrate, considerando solo gli stati vibrazionali di bassa energia, ed espandendo gli operatori del campo in eq. (1.12) sulla base delle funzioni d'onda di Wannier si ottiene l'Hamiltoniana di Bose-Hubbard per sistemi disomogenei:

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \hat{b}_i \hat{b}_j^\dagger + \sum_i \epsilon_i \hat{n}_i + \frac{1}{2} U \sum_i \hat{n}_i (\hat{n}_i - 1) \quad (1.13)$$

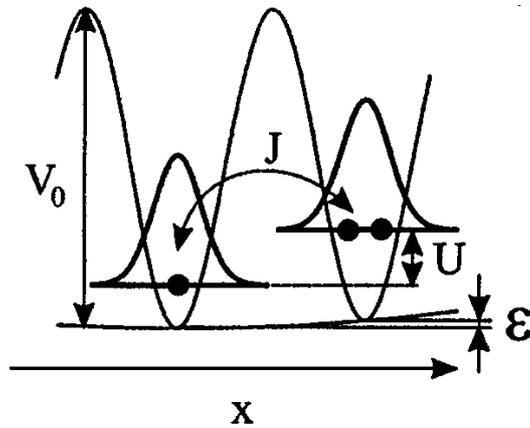


Figura 1.4: Realizzazione del modello di Bose-Hubbard in un reticolo ottico di altezza V_0 , nel caso disomogeneo. Oltre alle scale di energia definite nel caso omogeneo, ovvero il termine di accoppiamento fra siti primi-vicini J e l'energia di interazione fra atomi nel medesimo sito U , compare una ulteriore scala di energia ϵ , data dall'offset di energia di ciascun sito reticolare, variabile da sito a sito.

dove ϵ_i rappresenta un offset in energia sul sito reticolare i -esimo, variabile da sito a sito, dato da:

$$\epsilon_i = \int d^3x V_T(\mathbf{x}) |w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)|^2. \quad (1.14)$$

In Fig. 1.4 è rappresentata la realizzazione del modello di Bose-Hubbard di un gas bosonico in un reticolo ottico di altezza V_0 , in presenza di un potenziale addizionale. Le scale di energia caratteristiche sono l'accoppiamento di *tunneling* fra siti primi-vicini J e l'energia di interazione fra atomi nel medesimo sito U , definite anche nel caso omogeneo, più un'ulteriore scala di energia ϵ , che quantifica l'offset di energia di ciascun sito reticolare.

1.3.1 Sistemi confinati

Il primo caso che consideriamo riguarda la rottura della simmetria traslazionale per effetto di un potenziale esterno confinante. La trattazione di un simile sistema è importante, in quanto la realizzazione di esperimenti volti a studiare un gas atomico in un reticolo ottico prevede generalmente la presenza di un potenziale esterno addizionale, lentamente variabile nello spazio. Questo potenziale può essere prodotto da un campo magnetico esterno, ma anche,

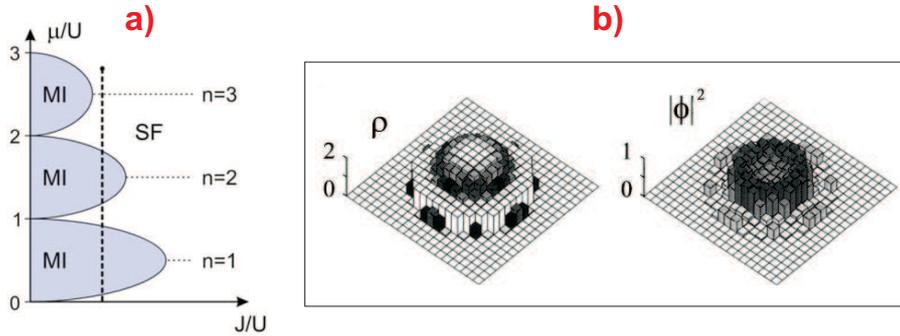


Figura 1.5: **a)** Diagramma delle fasi per un sistema di bosoni interagenti in un reticolo ottico: in presenza di un confinamento esterno il sistema sperimenta diversi valori di $\mu(\mathbf{x})$, cui corrisponde una linea verticale che interseca i lobi della fase di isolante di Mott. **b)** Densità della fase di isolante di Mott (a sinistra) e componente superfluida (a destra) in un reticolo ottico con confinamento armonico isotropo, in due dimensioni [17]. Tali grandezze sono rappresentate sul piano $x/a, y/a$ dei punti reticolari.

come vedremo nel § 1.5, dal profilo gaussiano dei fasci laser che producono il reticolo ottico.

Come accennato, il confinamento esterno produce una modulazione su larga scala della densità media, la quale risulta massima al centro, in corrispondenza del minimo di potenziale, e decade a zero al bordo. Poiché si tratta di potenziali lentamente variabili, si può applicare la cosiddetta approssimazione di densità locale: si assume cioè che il sistema si comporti localmente come nel caso omogeneo, dove tuttavia il potenziale chimico μ è funzione delle coordinate spaziali: $\mu(\mathbf{x}) = \mu(0) - \varepsilon(\mathbf{x})$, con $\varepsilon(0) = 0$ in corrispondenza del minimo del potenziale esterno confinante. Di conseguenza, una singola realizzazione sperimentale non è rappresentata da un punto isolato nello spazio delle fasi $J - \mu$ in Fig. 1.3, ma piuttosto dalla media su un insieme esteso di valori locali di μ , che corrisponde in grafico ad una linea verticale che interseca i diversi lobi della fase di isolante di Mott, corrispondenti a diversi (discreti) di occupazione dei siti reticolari da parte degli atomi (come rappresentato in Fig. 1.5a). In altre parole, la disomogeneità del sistema è responsabile della formazione di domini di Mott con diverso numero di occupazione dei siti reticolari, alternati a domini di superfluido. In Fig. 1.5b, ricavata da [17], è rappresentato l'andamento previsto della densità complessiva $\rho(x, y)$ e della componente superfluida $|\phi(x, y)|^2$ in un sistema bidimensionale disomogeneo, dove un potenziale armonico isotropo è sovrapposto al reticolo. Si noti che il profilo spaziale della densità presenta al centro del potenziale confinante un

dominio di Mott con due atomi per sito reticolare ($\rho = 2$), circondato da un dominio con un solo atomo per sito ($\rho = 1$). Sono inoltre presenti due anelli di superfluido, evidenziati nel grafico a destra, che rappresenta appunto $|\phi(x, y)|^2$.

In un sistema simile, è naturalmente preclusa una netta transizione dalla fase superfluida a quella di isolante, e le due fasi coesistono in prossimità del punto critico. Tuttavia, almeno localmente, è possibile individuare delle fasi con proprietà ben definite e corrispondenti a quelle del sistema omogeneo.

1.3.2 Effetti del disordine: il Bose Glass

In presenza di un potenziale esterno disordinato, sovrapposto al reticolo periodico, il sistema costituito dal gas di bosoni interagenti è ancora descrivibile attraverso l'eq. (1.13). Assumiamo però che in questo caso il potenziale esterno addizionale $V_T(\mathbf{x})$ che compare nella definizione di ϵ_i in eq. (1.14) non abbia un andamento lentamente variabile rispetto alle coordinate spaziali, ma che vari sulla scala di distanza fra i siti reticolari. In questo caso il sistema non è più descrivibile in termini di sistema omogeneo, sfruttando l'approssimazione di densità locale che è stata utilizzata nella trattazione del caso di un potenziale confinante lentamente variabile nello spazio.

Si consideri in particolare il caso in cui l'offset in energia del sito i -esimo assuma valori in un intervallo limitato $\epsilon_i \in [-\Delta/2, \Delta/2]$. Dall'analisi dell'eq. (1.13) appare in questo caso evidente che compaia un'ulteriore scala di energia, oltre all'accoppiamento fra siti primi vicini J e l'energia di interazione in un singolo sito U .

L'introduzione del disordine induce delle modifiche sostanziali sul diagramma di fase $J - \mu$ del sistema, e in particolare la nascita di una nuova fase quantistica, il *Bose glass*.

È stato previsto teoricamente in [22] che se il disordine è debole rispetto all'energia di interazione sul singolo sito ($\Delta < U$), i lobi della fase di Mott si riducono progressivamente e si osserva la comparsa della nuova fase di *Bose glass*; aumentando il disordine, la fase di *Bose glass* si estende, fino ad implicare la completa scomparsa della fase di Mott per $\Delta \gg U$, come mostrato qualitativamente in Fig. 1.6 ricavata da [22].

La fase di *Bose glass* esibisce alcune proprietà analoghe a quelle della fase di isolante di Mott: in particolare non presenta frazione superfluida ed è un isolante, caratterizzato dall'assenza di coerenza a lungo raggio.

Tuttavia si possono individuare delle differenze fondamentali fra queste due fasi per quanto riguarda lo spettro di energia. Infatti nella fase di isolante di Mott sussiste un *gap* nello spettro di eccitazione. Questo può essere spiegato facilmente nel limite $J \rightarrow 0$, partendo quindi da uno stato nella forma in eq. (1.10). Si consideri, nel caso semplice di occupazione singola dei siti

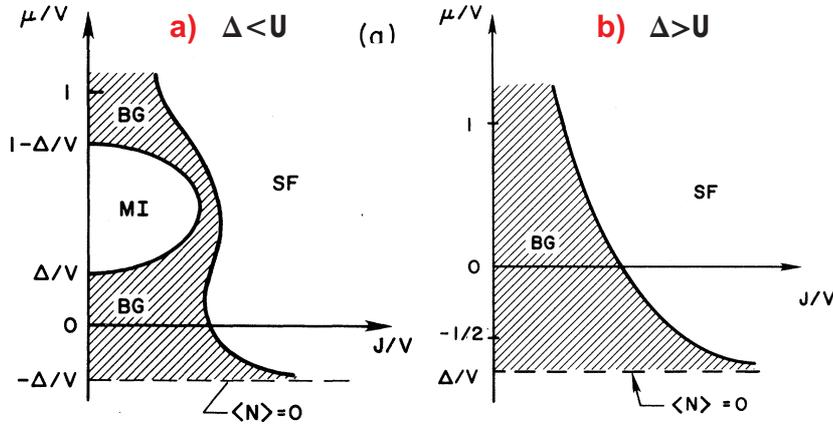


Figura 1.6: Diagramma di fase per un sistema di bosoni in un reticolo ottico con l'aggiunta di disordine in un'intervallo limitato $\epsilon_i \in [-\Delta/2, \Delta/2]$. Nel caso **a)** il disordine Δ è minore dell'energia di interazione su singolo sito U , nel caso **b)** viceversa $\Delta > U$.

reticolari, un'eccitazione elementare, data dal salto di un atomo da un sito al primo-vicino già occupato da un secondo atomo: il costo energetico di questa eccitazione, se l'accoppiamento di *tunneling* J è zero, corrisponde all'energia di interazione di una coppia di particelle poste nello stesso sito reticolare U . Nel caso di occupazione multipla dei siti reticolari ($n > 1$) si ricava analogamente che essa corrisponde ad nU . La presenza del disordine, però, introduce delle differenze di energia fra siti primi-vicini, distribuite in modo casuale, e ciò implica che il costo energetico di un'eccitazione elementare divenga $\Delta E = U \pm \Delta_i$, com'è illustrato in Fig. 1.7. Ne consegue che l'energia di eccitazione non è la stessa per tutti gli atomi. Pertanto un sistema ideale, infinitamente esteso, con $\Delta \geq U$, può essere eccitato ad energie arbitrariamente piccole e dunque il *gap* si riduce fino ad annullarsi: quando si verifica ciò, il sistema forma un *Bose glass*. Recenti indagini sperimentali [20] hanno evidenziato con successo l'allargamento dello spettro di eccitazione di un gas unidimensionale di bosoni ultrafreddi in un reticolo bicromatico (cfr. § 1.6), in funzione dell'aumento dell'altezza del disordine locale: questi risultati costituiscono una prima realizzazione della fase di *Bose glass*.

L'assenza di un *gap* nello spettro energetico sembra contrastare con la natura di isolante, ma occorre notare che, nonostante lo spettro di energia sia continuo, le eccitazioni possono verificarsi esclusivamente fra siti vicini, sono quindi solo locali, e il sistema rimane globalmente isolante.

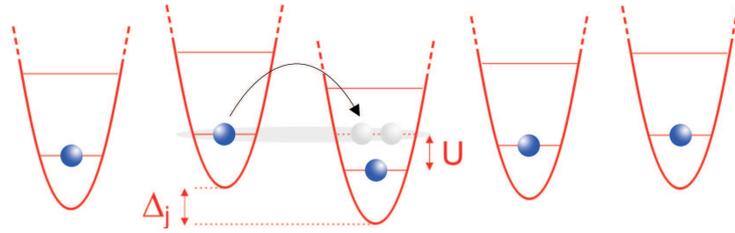


Figura 1.7: In presenza di disordine, l'energia di eccitazione di un atomo non è data dalla sola energia di interazione U , come nel caso di un isolante di Mott ordinato, ma è necessario considerare anche la differenza di energia locale fra sito e sito: $\Delta E = U \pm \Delta_i$.

1.4 Il potenziale dipolare

Gli effetti meccanici dell'interazione fra atomi ultrafreddi e radiazione laser possono essere descritti essenzialmente attraverso due tipi di forze, associate rispettivamente alle proprietà di assorbimento e di dispersione dell'interazione.

La forza di pressione di radiazione, dissipativa, è associata al trasferimento di impulso dalla luce agli atomi in un processo di scattering alla risonanza. Gli atomi assorbono fotoni risonanti e sono pompati in uno stato eccitato, dal quale decadono spontaneamente nello stato fondamentale con emissione isotropa: ad ogni ciclo corrisponde, in media, un impulso netto trasferito $\hbar\mathbf{k}$, con \mathbf{k} vettore d'onda della radiazione laser.

La forza di dipolo, conservativa, deriva invece dall'interazione dispersiva fra atomo e luce *fuori dalla risonanza*. Ad essa sono legati i processi di assorbimento non risonante e di emissione stimolata. Tale forza è inoltre proporzionale al gradiente di intensità del campo elettrico della luce laser.

L'espressione dei due contributi all'interazione può essere ricavata da una trattazione semiclassica [42], considerando un semplice modello in cui l'atomo, visto come sistema a due livelli, è soggetto ad un campo elettrico classico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ oscillante a frequenza ω . L'azione del campo elettrico sull'atomo è un effetto al second'ordine: il campo elettrico induce infatti sull'atomo un momento di dipolo $\mathbf{p}(\mathbf{r}, t)$ oscillante alla sua frequenza ω e proporzionale alla sua ampiezza mediante un coefficiente complesso α (detto polarizzabilità). Il momento di dipolo interagisce a sua volta con il campo elettrico: ne risulta il potenziale di dipolo V_{dip} che l'atomo poi sperimenta.

La parte reale della polarizzabilità α , che descrive la componente di $\mathbf{p}(\mathbf{r}, t)$ in fase con il campo, è responsabile delle proprietà dispersive dell'interazione; la parte immaginaria, che descrive la componente di $\mathbf{p}(\mathbf{r}, t)$ in opposizione di

fase rispetto a $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, è connessa con le proprietà di assorbimento. Si può dimostrare che entrambe le componenti dipendono fortemente dalla frequenza del campo.

Il potenziale di dipolo può essere quindi definito come l'energia di interazione fra il dipolo $\mathbf{p}(\mathbf{r}, t)$ e il campo elettrico, che risulta essere

$$V_{dip} = -\frac{1}{2} \langle \mathbf{p} \cdot \mathbf{E} \rangle = -\frac{1}{2\epsilon_0 c} \text{Re}(\alpha) I(\mathbf{r}), \quad (1.15)$$

dove $\langle \rangle$ rappresenta la media temporale su un numero elevato di oscillazioni ottiche e $I(\mathbf{r})$ l'intensità media del campo di radiazione.

Gli effetti dissipativi sono invece descritti dal numero medio di fotoni che vengono diffusi dall'atomo nell'unità di tempo attraverso cicli di assorbimento e di emissione spontane (Γ_{sc}). Questo si ottiene dal rapporto fra l'energia media assorbita da un atomo nell'unità di tempo, divisa per l'energia di un singolo fotone:

$$\Gamma_{sc} = \frac{\langle \dot{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{E} \rangle}{\hbar\omega} = \frac{1}{\hbar\epsilon_0 c} \text{Im}(\alpha) I(\mathbf{r}) \quad (1.16)$$

Supponiamo che il *detuning* ($\Delta = \omega - \omega_0$) dalla frequenza di risonanza ω_0 della transizione atomica sia molto maggiore della larghezza di riga Γ dello stato eccitato e della frequenza di Rabi $\Omega = \mu |\mathbf{E}| / \hbar$, dove μ è il momento di dipolo elettrico della transizione. Le eq. (1.15) e (1.16) possono allora essere semplificate come in [42] ottenendo:

$$V_{dip} = \frac{3\pi c^2}{2\omega_0^3} \left(\frac{\Gamma}{\Delta} \right) I(\mathbf{r}) \quad (1.17)$$

$$\Gamma_{sc} = \frac{3\pi c^2}{2\hbar\omega_0^3} \left(\frac{\Gamma}{\Delta} \right)^2 I(\mathbf{r}) \quad (1.18)$$

Dalle eq. (1.17) e (1.18) si evince che, allontanandosi dalla risonanza, il contributo dissipativo (che peraltro è la principale causa di riscaldamento del campione) diventa trascurabile, poiché decresce con $1/(\Delta^2)$, mentre il potenziale di dipolo decresce più lentamente, come $1/\Delta$. Pertanto scegliendo lunghezza d'onda e intensità della radiazione tali da ottenere valori grandi di detuning ($\Delta \gg \Gamma, \Omega$) mantenendo costante il rapporto I/Δ , si può rendere dominante il contributo della forza di dipolo, e sopprimere il fenomeno di scattering spontaneo.

Dall'eq. (1.17) si nota anche che il segno del potenziale di dipolo dipende dal segno del detuning. In particolare se $\Delta < 0$ (*red-detuning*) il potenziale di dipolo è negativo, quindi ad un massimo di intensità corrisponde un minimo di potenziale: gli atomi tendono a localizzarsi nelle regioni dove la luce

è più intensa. Se viceversa $\Delta > 0$ (*blue-detuning*) gli atomi tendono a localizzarsi nelle regioni dove l'intensità è minore. Risulta quindi evidente che la dipendenza spaziale del profilo di intensità $I(\mathbf{r})$ rende possibile la creazione di una trappola ottica per atomi neutri.

Si consideri ad esempio un fascio laser gaussiano che si propaghi lungo l'asse z , il cui profilo di intensità sarà dato da:

$$I(r, z) = \frac{2P}{\pi w^2(z)} e^{-2r^2/w^2(z)}, \quad (1.19)$$

dove r è la distanza dell'asse di propagazione. Si noti che con P si è indicata la potenza totale del fascio, e con $w(z) = w_0 \sqrt{1 + z^2/z_R^2}$ il raggio del fascio, dove w_0 è il *waist* e $z_R = \pi w_0^2/\lambda$ è la lunghezza di Rayleigh (λ è la lunghezza d'onda della radiazione). Per radiazione *detunata* verso il rosso, in corrispondenza del massimo di intensità del fascio si presenta un minimo del potenziale dipolare. Tale potenziale può essere espresso come uno sviluppo in serie di Taylor, il cui termine principale è il termine armonico:

$$V_{dip} \approx -V_{trap} \left\{ 1 - 2 \left(\frac{r}{w_0} \right)^2 - \left(\frac{z}{z_R} \right)^2 \right\} \quad (1.20)$$

dove $V_{trap} = \frac{3\pi c^2}{2\omega_0^3} \left(\frac{\Gamma}{|\Delta|} \right) \frac{2P}{\pi w_0^2}$ dipende linearmente dalla potenza del laser. Il confinamento armonico è caratterizzato dalle frequenze di intrappolamento radiale ω_r e assiale ω_z , date rispettivamente dalle espressioni $\omega_r = (4V_{trap}/mw_0^2)^{1/2}$ e $\omega_z = (aV_{trap}/mz_R^2)^{1/2}$, con m massa dell'atomo.

1.5 Il reticolo ottico

Il potenziale periodico che deriva dall'interazione fra un campione di atomi e un'onda elettromagnetica stazionaria è generalmente detto *reticolo ottico*.

Nella configurazione sperimentale più semplice, il reticolo è ottenuto da un'onda stazionaria di periodo $\lambda/2$ data dall'interferenza di due fasci laser contropropaganti di ugual frequenza e vettore d'onda $k = 2\pi/\lambda$. Se invece si fanno interferire due fasci laser sotto un angolo minore di 180° si realizza un potenziale con periodicità maggiore di $\lambda/2$.

La descrizione di tale sistema può essere fatta, in prima istanza, considerando i due fasci laser contropropaganti semplicemente come due onde piane di frequenza ω che viaggiano in verso opposto lungo la direzione \hat{z} ed entrambe polarizzate linearmente lungo l'asse \hat{e} ,

$$\vec{E}_1(z, t) = \hat{e} E_1 \sin(kz + \omega t + \delta) \quad (1.21)$$

$$\vec{E}_2(z, t) = \hat{e} E_2 \sin(kz - \omega t - \delta). \quad (1.22)$$

L'intensità istantanea è data dal modulo quadro del campo totale:

$$I(z, t) = \epsilon_0 c \left| \vec{E}_1(z, t) + \vec{E}_2(z, t) \right|^2 \quad (1.23)$$

da cui si ricava l'intensità media

$$I(z) = \frac{1}{2} \epsilon_0 c \left[(E_1 - E_2)^2 + 4E_1 E_2 \sin^2(kz) \right] \quad (1.24)$$

che nel caso $E_1 = E_2 = E_0$ si riduce semplicemente a

$$I(z) = I_0 \sin^2(kz) \quad (1.25)$$

dove $I_0 = 2\epsilon_0 c E_0^2$ è il massimo dell'intensità. Dunque nel caso di radiazione *detunata* verso il rosso, il potenziale di dipolo in eq. (1.17) assume la forma:

$$V_{dip}(z) = -V_0 \sin^2(kz). \quad (1.26)$$

dove V_0 è l'altezza massima del potenziale periodico, che è data da

$$V_0 = \frac{3\pi c^2}{2\omega_0^3} \left(\frac{\Gamma}{|\Delta|} \right) I_0 \quad (1.27)$$

e che viene solitamente espressa in unità dell'energia di rinculo E_R (per esempio, per il ^{87}Rb in un reticolo con $\lambda = 830$ nm, $E_R = h \times 3.3$ kHz). L'altezza del potenziale periodico è quindi espressa mediante il parametro adimensionale

$$s = \frac{V_0}{E_R}. \quad (1.28)$$

Si considerino adesso due fasci gaussiani contropropaganti. In tal caso l'eq. (1.26) diviene:

$$V_{dip}(r, z) = -V_0 e^{-2r^2/w^2(z)} \sin^2(kz) \quad (1.29)$$

In aggiunta al confinamento assiale che si ha in corrispondenza dei massimi di intensità periodici, il reticolo produce anche un confinamento radiale di tipo gaussiano intorno all'asse di propagazione del fascio, similmente a quanto visto nel paragrafo precedente.

Nel caso di potenziali periodici sufficientemente profondi, il confinamento assiale degli atomi in un singolo sito del reticolo è in prima approssimazione armonico, e molto più forte di quello radiale. In approssimazione armonica la frequenza di intrappolamento nel singolo sito si può esprimere in funzione degli altri parametri caratteristici del reticolo:

$$\omega_{lat} \approx 2\sqrt{s} \frac{E_R}{\hbar}. \quad (1.30)$$

Il valore tipico della frequenza di confinamento radiale è di ≈ 10 kHz, contro una frequenza assiale di ≈ 100 Hz.

Analogamente al caso del reticolo unidimensionale fin qui trattato, è possibile realizzare reticoli in due o in tre dimensioni, semplicemente utilizzando coppie di fasci laser contropropaganti, ortogonali fra loro.

Nel caso di reticolo bidimensionale lungo gli assi x e y , prodotto da due coppie di fasci contropropaganti con la stessa frequenza ω , la forma del potenziale periodico è descritta dalla seguente espressione:

$$V(x, y) = -V_0 [\sin^2(kx) + \sin^2(ky) + 2\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y \sin \varphi \sin(kx) \sin(ky)]. \quad (1.31)$$

Si noti che si è trascurato il profilo gaussiano dei fasci: ciò è valido se l'estensione radiale del campione atomico è molto minore del *waist* del fascio. I vettori \mathbf{e}_x ed \mathbf{e}_y rappresentano i vettori di polarizzazione e φ lo sfasamento fra i due reticoli. Appare evidente dall'eq. (1.31) che, se i vettori di polarizzazione delle coppie di fasci che si propagano lungo x e y sono ortogonali fra loro, il potenziale risultante è semplicemente la somma dei potenziali generati dalle singole onde stazionarie unidimensionali.

In presenza di un reticolo ottico bidimensionale, gli atomi sono intrappolati in un *array* di tubi unidimensionali fortemente confinanti e, se il reticolo è sufficientemente alto, possono muoversi unicamente lungo l'asse dei tubi. Questa configurazione è stata utilizzata per produrre e studiare sistemi unidimensionali [43].

Per i reticoli tridimensionali, infine, la descrizione è analoga al caso bidimensionale. Per eliminare i termini di interferenza fra le diverse onde stazionarie, si impiegano generalmente tre coppie di fasci laser contropropaganti, con vettori di polarizzazione mutuamente ortogonali. Il potenziale risultante è semplicemente dato dalla somma dei potenziali generati dalle singole onde stazionarie unidimensionali che, trascurando come sopra la dipendenza radiale, è della forma:

$$V(x, y, z) = - [V_x \sin^2(kx) + V_y \sin^2(ky) + V_z \sin^2(kz)]. \quad (1.32)$$

Un reticolo sufficientemente profondo può essere quindi descritto in prima approssimazione come un *array* cubico semplice di buche di potenziale armoniche fortemente confinanti, in corrispondenza di ciascun sito reticolare. In aggiunta al potenziale periodico omogeneo, il potenziale della trappola ottica produce generalmente anche un confinamento radiale dovuto al profilo gaussiano del fascio laser, anch'esso armonico in prima approssimazione. Nelle configurazioni sperimentali tipiche, a tutto ciò si somma un confinamento armonico ulteriore dovuto alla presenza di una trappola magnetica. Il potenziale

risultante assume quindi la forma:

$$V(\mathbf{r}) = - [V_x \sin^2(kx) + V_y \sin^2(ky) + V_z \sin^2(kz)] + \frac{m}{2} (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2). \quad (1.33)$$

dove $\omega_{x,y,z}$ sono le frequenze di trappola efficaci del confinamento armonico esterno, che comprende il confinamento magnetico e quello ottico radiale dovuto ai fasci laser.

1.6 Reticoli disordinati e quasi-periodici

Sorprendentemente, la perfetta periodicità dei reticoli ottici fa sì che essi rappresentino strumenti eccellenti anche per l'indagine di sistemi atomici disordinati. Proprio perché i reticoli ottici sono liberi da difetti e impurezze incontrollabili e indesiderate, a differenza dei reticoli cristallini, essi si prestano all'aggiunta di un disordine preciso e controllato.

Come un potenziale periodico può essere ottenuto da una distribuzione di intensità periodica, così un potenziale disordinato può essere ottenuto dall'interazione degli atomi con una distribuzione di intensità di radiazione arbitrariamente complessa, realizzabile mediante l'utilizzo delle cosiddette *speckles* ottiche [44, 45, 46, 47] o, in alternativa, mediante reticoli bicromatici [20, 23, 24, 48, 49, 50, 51, 52].

Nel primo caso è un potenziale puramente disordinato e può essere realizzato sfruttando il profilo di interferenza prodotto da radiazione diffusa da una superficie irregolare o trasmessa attraverso una lamina diffusiva. Il potenziale che gli atomi sperimentano varia spazialmente in maniera casuale ma è costante nel tempo. Tipicamente, nelle applicazioni sperimentali, il potenziale disordinato viene sovrapposto ad un reticolo ottico regolare. Nel nostro apparato sperimentale, non ottimizzato in questo senso, la scala caratteristica del disordine così ottenuto è di circa $10 \mu\text{m}$, essenzialmente dovuto alla risoluzione del sistema di ottiche usato per indirizzare il fascio sugli atomi. Tale potenziale produce quindi delle disomogeneità su una scala di lunghezza che comprende molti siti reticolari, la cui spaziatura è invece $\simeq 0.4 \mu\text{m}$.

Un potenziale che simula gli effetti del disordine, ma su una scala di lunghezze anche molto più piccola a quella data dalle *speckles*, si può realizzare mediante reticoli ottici bicromatici, ottenuti dalla sovrapposizione di onde stazionarie di diversa frequenza, ognuna delle quali è prodotta da una coppia di fasci laser contropropaganti. Nell'ambito di questo lavoro di tesi si è utilizzata appunto questa soluzione, che permette di ottenere disomogeneità su una scala di lunghezze di un'ordine di grandezza inferiore a quella tipica delle *speckles*. Se le lunghezze d'onda sono incommensurate, cioè se il loro rapporto

è un numero irrazionale, il potenziale risultante non è più periodico: essendo caratterizzato da uno spettro discreto di frequenze spaziali e dall'assenza di invarianza discreta per traslazioni, rientra nella classe dei potenziali quasi-periodici. Chiaramente le lunghezze d'onda sono sperimentalmente misurate con un numero finito di cifre significative, pertanto non risulta possibile verificare la loro reale incommensurabilità. Tuttavia dal punto di vista sperimentale, per effetto della taglia finita del sistema atomico, si può dare una definizione di incommensurabilità delle lunghezze d'onda dei reticoli più debole, ma utile in pratica: il rapporto fra le lunghezze d'onda dev'essere abbastanza distante da un rapporto fra numeri interi semplici in modo tale che il potenziale risultante sia non periodico su distanze dell'ordine dell'estensione della nuvola atomica, in modo tale che gli atomi sperimentino una serie di buche di potenziale di altezza non periodica. Un potenziale che soddisfi questa condizione può essere considerato in buona approssimazione un potenziale disordinato. Nel seguito di questo lavoro di tesi si userà dunque la parola disordine anche in riferimento alle disomogeneità introdotte da un reticolo bicromatico.

Considerando per semplicità il caso unidimensionale, il potenziale risultante può essere espresso nella seguente forma:

$$V(x) = - [V_1 \sin^2(k_1 x) + V_2 \sin^2(k_2 x)] + \frac{m}{2} \omega_x^2 x^2, \quad (1.34)$$

dove V_1 e V_2 sono le altezze dei due reticoli, k_1 e k_2 i rispettivi vettori d'onda, e ω_x è la frequenza di trappola efficace del confinamento armonico esterno, analogamente all'eq. (1.33).

Nel limite in cui l'altezza dei reticoli sia tale che $V_2 \ll V_1$, il reticolo con vettore d'onda k_2 può essere trattato come una perturbazione sul reticolo con vettore d'onda k_1 : nella seguente discussione essi saranno quindi rispettivamente denominati reticolo secondario e principale. Nel limite qui considerato, i minimi del potenziale complessivo $V(x)$ possono essere identificati in prima approssimazione con i minimi del potenziale imperturbato V_1 , corrispondenti a $x_n = n\pi/k_1$, dove n è l'indice dei siti occupati ed è quindi un intero compreso nell'intervallo $n \in [1, n_{MAX}]$. La deviazione da tali valori dovuta alla presenza del secondo reticolo può essere ricavata mediante una semplice espansione in serie di Taylor del secondo membro dell'eq. (1.34), intorno a x_n (trascurando per il momento il confinamento armonico efficace)

$$V(x_n + \xi) = - \left[V_2 \sin^2(\tilde{k}n) + \xi k_2 V_2 \sin(2\tilde{k}n) + \xi^2 \left(k_1^2 V_1 + V_2 \sin(2\tilde{k}n) \right) \right] \quad (1.35)$$

nella quale $\tilde{k} = \pi k_2/k_1$. La correzione al primo ordine sulla posizione dei

minimi si trova richiedendo la stazionarietà di $V(x_n + \xi)$ rispetto a ξ :

$$\xi_n = -\frac{1}{2k_2} \frac{\sin(2\tilde{k}n)}{\cos(2\tilde{k}n) + (k_1^2 V_1 / k_2^2 V_2)} \simeq -a \frac{k_2 V_2}{k_1 V_1} \frac{\sin(2\tilde{k}n)}{2\pi} \quad (1.36)$$

dove con a si è definita la spaziatura fra i minimi di potenziale del reticolo principale, data da $a = x_n/n$. Tale correzione è tipicamente molto piccola: per i parametri sperimentali adottati nell'ambito di questo lavoro di tesi (cfr. § 3.4) risulta al massimo dell'ordine dello 4% rispetto alla spaziatura del reticolo principale. Il reticolo bicromatico introduce quindi una disomogeneità sulla distribuzione dei bosoni nei siti reticolari (illustrate nel § 1.1), piuttosto che una disomogeneità topologica del reticolo.

I minimi del potenziale complessivo possono dunque essere calcolati come:

$$\epsilon_n = V(x_n + \xi_n) \simeq V_2 \sin^2(\tilde{k}n) \left(1 - 2 \frac{k_2^2 V_2}{k_1^2 V_1} \cos^2(\tilde{k}n) \right) \simeq V_2 \sin^2(\tilde{k}n), \quad (1.37)$$

trascurando le correzioni dell'ordine di ξ_n in quanto $V_2 \ll V_1$.

Con un semplice calcolo analitico si può inoltre ricavare la differenza di energia fra due siti reticolari primi-vicini:

$$\delta_n = \epsilon_{n+1} - \epsilon_n = V_2 \sin(2\tilde{k}) \sin(2\tilde{k}(n+1)). \quad (1.38)$$

Dalla precedente espressione si deduce che, nel caso che i vettori d'onda dei due reticoli k_1 e k_2 siano incommensurati secondo la definizione data in precedenza, l'insieme $\{\delta_i\}$ delle differenze di energia corrisponde ad un campionamento non periodico di una funzione sinusoidale.

È infine possibile calcolare la distribuzione delle differenze di energia dei siti reticolari, nel limite in cui $n_{MAX} \gg 1$, come ricavato in [54]:

$$p(\delta) = \frac{1}{\pi A} \frac{1}{\sqrt{1 - (\delta^2/A^2)}}, \quad (1.39)$$

dove A è dato da $A = V_2 \sin \tilde{k}$.

Capitolo 2

L'effetto Hanbury Brown e Twiss

In questo capitolo descriveremo l'effetto Hanbury Brown e Twiss, su cui è basata l'indagine sperimentale svolta in questo lavoro di tesi.

In un esperimento pionieristico, R. Hanbury Brown e R. Q. Twiss osservarono che la luce incoerente proveniente da una scarica in un gas presentava forti correlazioni nelle fluttuazioni di intensità, misurate in due punti distinti [25]. L'effetto, che fu inizialmente interpretato in termini dell'ottica ondulatoria classica, presenta importanti risvolti quando se ne cerchi un'interpretazione in termini della meccanica quantistica: esso implica infatti che fotoni provenienti da punti separati di una sorgente incoerente, come può essere una stella, siano legati, ovvero presentino un comportamento agglomerato detto di *bunching*. L'aspetto più sorprendente è che, invece, fotoni provenienti da una sorgente coerente non soddisfano questa proprietà [55].

Come si illustrerà in questo capitolo, tale fenomeno può essere spiegato mediante una teoria di campo, come sovrapposizione delle ampiezze di probabilità di due cammini indistinguibili che interferiscono [27] o con gli strumenti dell'analisi statistica di tipo quantistico, applicata alla popolazione bosonica dei fotoni.

L'interferometria Hanbury Brown e Twiss su particelle bosoniche - come anche il suo corrispettivo fermionico - può trovare una feconda applicazione nell'ottica atomica. Correlazioni delle fluttuazioni sono state infatti osservate per la prima volta con atomi neutri freddi in [56] e con un fascio di elettroni in [57]. Recentemente un esperimento di questo tipo, effettuato su un sistema costituito da atomi di elio metastabili ultrafreddi [31] ha evidenziato l'effetto della statistica quantistica sul segnale di correlazione: l'osservazione eseguita sull'isotopo bosonico (^4He) ha dato come risultato un segnale di *bunching*, mentre per l'isotopo fermionico (^3He) ha dato un segnale di *antibunching*.

Infine la proposta teorica in [32] ha messo in luce come le correlazioni delle fluttuazioni di densità in un campione atomico, inizialmente confinato e poi osservato dopo l'espansione dalla trappola, possano dare importanti informazioni sullo stato del sistema prima dell'espansione). La prima dimostrazione sperimentale della fattibilità di questo metodo è stata ottenuta per bosoni in un reticolo ottico tridimensionale in fase di Mott in [33]. In questo lavoro di tesi abbiamo esteso questo metodo per l'analisi di una fase di Mott che venga perturbata dalla presenza di disordine, introdotto utilizzando un reticolo ottico bicromatico (cfr. § 1.6).

2.1 L'esperimento di Hanbury Brown e Twiss

L'esperimento originale di R. Hanbury Brown e R. Q. Twiss, descritto nei due lavori [25, 26], è nato come evoluzione dei metodi di interferometria stellare. L'effetto è stato dapprima osservato in laboratorio sulla luce incoerente di una lampada spettrale [25], e ha poi trovato la sua prima applicazione nella misura del diametro angolare ¹ della stella Sirio [26]: si descriverà qui brevemente tale esperimento. L'apparato sperimentale è essenzialmente schematizzato in Fig. 2.1, ricavata da [25]. La radiazione luminosa proveniente dalla stella è raccolta da due rivelatori indipendenti, costituiti da celle fotoelettriche, che forniscono dei segnali elettrici proporzionali all'intensità luminosa ricevuta da ciascuno di essi. I segnali elettrici presentano delle fluttuazioni, di cui si analizza la correlazione. Questa procedura di misura è insensibile alla fase relativa dei due segnali, come accade invece per un interferometro come quello di Michelson; l'informazione che se ne ricava è invece la correlazione sulle fluttuazioni dell'intensità. Il segnale di correlazione è quindi misurato in funzione della separazione dei due specchi che raccolgono la radiazione (l'apparato originale consentiva una separazione massima di 10 m). Si osserva che oltre una data distanza il segnale si estingue: in tal modo si può determinare l'area di coerenza della radiazione, definita appunto come l'area A_C entro la quale le due sorgenti secondarie, costituite dai rivelatori, devono trovarsi, affinché le correlazioni siano osservabili. L'osservazione della funzione di correlazione ha quindi permesso di determinare il diametro angolare α della sorgente, data la sua relazione con l'area di coerenza

$$A_C = \frac{\lambda^2}{\pi\alpha^2} \quad (2.1)$$

¹Il diametro angolare è l'angolo sotto il quale la dimensione trasversa della stella è sottesa, quando quest'ultima è osservata dalla Terra. Esso è dato da $\alpha = D/R$, dove D è la distanza della stella e R il suo raggio.

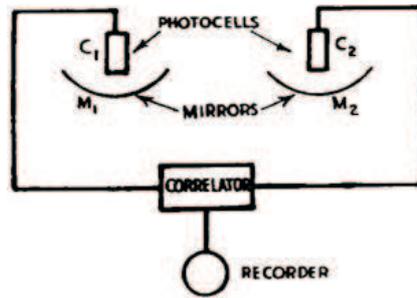


Figura 2.1: Schema dell'apparato usato nell'esperimento di R. Hanbury Brown e R. Q. Twiss per la misura delle correlazioni delle intensità luminose misurate dai due rivelatori illuminati da una sorgente incoerente [25]. C_1 e C_2 sono i rivelatori, M_1 e M_2 gli specchi. L'esperimento consiste nell'osservazione del segnale in uscita dal correlatore in funzione della distanza fra i due specchi.

dove λ è la lunghezza d'onda della radiazione incidente. Si noti che è essenziale, ai fini della misura, che l'intervallo di tempo fra l'incidenza della luce sugli specchi di raccolta e l'arrivo dei fotoelettroni al correlatore sia compreso entro il tempo di correlazione τ_C caratteristico della radiazione².

2.2 Analisi del fenomeno

Il fenomeno alla base dell'effetto Hanbury Brown e Twiss è descrivibile nei termini di una teoria di campo, che qui riassumiamo in termini semplici. Date due sorgenti incoerenti A e B , che emettono un campo che è poi rivelato in due punti diversi C e D , si possono individuare due possibili cammini di rivelazione: $A \rightarrow C$ e $B \rightarrow D$, oppure $A \rightarrow D$ e $B \rightarrow C$. La grandezza misurata sperimentalmente è la probabilità congiunta che due particelle emesse indipendentemente dalle sorgenti A e B siano rivelate nei due punti C e D : si devono quindi sommare le due ampiezze di probabilità per i due possibili processi. Se questi due processi sono indistinguibili la sovrapposizione delle ampiezze di probabilità fra diversi cammini di rivelazione dà luogo ad un fenomeno di interferenza. La probabilità congiunta della rivelazione dipende quindi dalla distanza dei due punti di rivelazione, ed è indipendente dalla fase relativa iniziale dei campi che rappresentano le due particelle. Nel caso di bosoni l'interferenza è costruttiva e quindi la probabilità congiunta risulta aumentata rispetto al caso di due eventi statisticamente indipendenti; mentre se le par-

² τ_C è definita come la lunghezza temporale del treno d'onda che descrive la radiazione emessa dalla sorgente, rappresentata come sovrapposizione di onde piane.

ticelle sono fermioni l'interferenza è distruttiva. All'aumentare della distanza fra i due rivelatori, la differenza di fase delle ampiezze dei due processi cresce tanto che una media su tutti i possibili punti A e B della sorgente cancella l'interferenza e si ritrova la situazione che si avrebbe per la rivelazione di eventi scorrelati. Per la trattazione approfondita del fenomeno in questi termini, si rimanda a [27].

Una semplice spiegazione dell'effetto può essere anche data con l'ausilio degli strumenti della fisica statistica applicati allo studio delle popolazioni bosoniche dei fotoni: nell'ambito di questa analisi risulta inoltre chiaro come possa essere definito anche un suo corrispettivo per popolazioni fermioniche.

Partiamo quindi dall'espressione delle fluttuazioni del numero di particelle, nel caso classico e nel caso quantistico, ricavata da un calcolo condotto sull'insieme canonico (cfr. per es.[28]). Nel caso classico la fluttuazione quadratica media del numero di particelle appartenenti allo stesso dominio i -esimo nello spazio delle fasi (ovvero ad una regione dello spazio delle fasi caratterizzata da un valore costante dell'energia, entro l'incertezza data dall'indeterminazione quantistica) è semplicemente la radice del numero medio di particelle all'equilibrio \bar{N}_i in quel dominio:

$$\sqrt{\langle(\Delta N_i)^2\rangle} = \sqrt{\bar{N}_i}. \quad (2.2)$$

Il calcolo nel caso quantistico conduce invece alla seguente espressione:

$$\sqrt{\langle(\Delta N_i)^2\rangle} = \sqrt{\bar{N}_i(1 \pm \bar{n}_i)}, \quad (2.3)$$

dove \bar{n}_i è il numero medio di particelle per ogni cella elementare dello spazio delle fasi nel dominio i -esimo, ovvero $\bar{n}_i = \bar{N}_i/g$, con g numero di celle del dominio.

Calcoliamo adesso la funzione di correlazione delle fluttuazioni C per le diverse statistiche, quantistica e classica. Si consideri quindi in primo luogo un insieme di bosoni, ad esempio fotoni, che viene rivelato in due punti R_1 ed R_2 : siano dunque N_1 ed N_2 il numero di fotoni che arrivano in un intervallo di tempo Δt rispettivamente ai rivelatori R_1 e R_2 , ed \bar{N}_1 , \bar{N}_2 i relativi valori medi. Il segnale di correlazione C sarà dato da

$$C = (N_1 - \bar{N}_1)(N_2 - \bar{N}_2). \quad (2.4)$$

Si noti che sperimentalmente viene osservata la media di tale segnale su un intervallo di tempo di integrazione finito T , che si può scrivere come

$$\bar{C} = \overline{(N_1 - \bar{N}_1)(N_2 - \bar{N}_2)}. \quad (2.5)$$

Se i due rivelatori sono posti nella stessa area di coerenza, definita nel § 2.1 i fotoni che vi giungono appartengono allo stesso dominio nello spazio delle fasi. Utilizzando l'eq. (2.3) la varianza della popolazione di ognuno dei due fasci di fotoni (indicati con l'indice $i = 1, 2$) possono essere scritte come

$$\overline{(N_i - \bar{N}_i)^2} = \bar{N}_i + \frac{(\bar{N}_i)^2}{g}, \quad (2.6)$$

in quanto il numero di celle è lo stesso per i due fasci. Si noti che il primo termine a secondo membro è legato alle fluttuazioni delle particelle classiche, mentre il secondo termine è dovuto ad un contributo prettamente quantistico. Dalla precedente espressione, con alcuni semplici calcoli [28], si può ottenere la correlazione media:

$$\bar{C} = \frac{\bar{N}_1 \bar{N}_2}{g}. \quad (2.7)$$

La relazione appena ricavata si riferisce all'ampiezza della correlazione delle fluttuazioni associate ai bosoni. Da un analogo calcolo svolto per particelle fermioniche, si ricava invece

$$\bar{C} = -\frac{\bar{N}_1 \bar{N}_2}{g}, \quad (2.8)$$

mentre per particelle classiche vale

$$\bar{C} = 0. \quad (2.9)$$

Dal calcolo effettuato si deduce quindi che i bosoni presentano una correlazione positiva, che si può spiegare in termini di comportamento agglomerato, comunemente detto *bunching*. I fermioni presentano invece un'anticorrelazione. Essa è legata al comportamento di *antibunching*, essenzialmente dovuto al principio di Pauli, che proibisce che fermioni identici occupino lo stesso stato quantistico, e ciò induce una repulsione fra di essi.

Dall'eq. (2.7) si ricava inoltre che quando i due rivelatori sono identici, per cui $\bar{N}_1 = \bar{N}_2$, la correlazione fra di essi è uguale alla differenza fra la fluttuazione media di particelle quantistiche e quella di particelle classiche. Risulta quindi evidente che la misura della funzione di correlazione delle fluttuazioni consente di isolare il contributo quantistico al rumore, eliminando quello classico.

2.3 Applicazione all'ottica atomica

L'effetto Hanbury Brown e Twiss trova sua naturale applicazione nell'ottica atomica. In particolare, possono essere individuati due filoni principali.

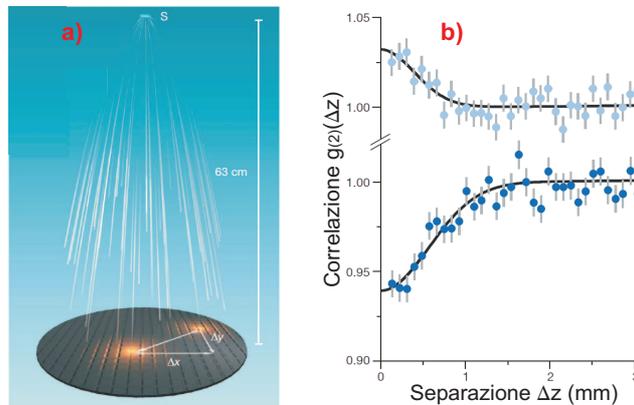


Figura 2.2: Apparato per la rivelazione delle correlazioni di bosoni e fermioni: una nuvola atomica inizialmente confinata viene lasciata espandere sotto l'effetto della gravità, e gli eventi di arrivo vengono registrati su un rivelatore ad alta risoluzione spaziale e temporale. **b)** Funzioni di correlazione per un gas di ^4He e di ^3He in funzione della posizione sul rivelatore [31].

In primo luogo, tale tecnica interferometrica è stata infatti applicata a sistemi bosonici [29, 30] e fermionici [31] mediante l'osservazione della correlazione sulle posizioni di arrivo delle particelle su punti diversi di un rivelatore. Nello specifico, questi esperimenti sono stati effettuati su un sistema atomico inizialmente confinato, che viene poi lasciato espandere in presenza della gravità dopo lo spegnimento del potenziale di trappola (o in seguito all'estrazione di atomi dal campione), e osservato dopo un certo intervallo di tempo. Per misure di questo tipo, è necessario un rivelatore assai sofisticato, che risolva spazialmente e temporalmente gli eventi di arrivo dei singoli atomi, come in Fig. 2.2a), ricavata da [31]). La funzione di correlazione così ottenuta in funzione della distanza \mathbf{d} fra i punti del rivelatore presenta un picco in corrispondenza di $\mathbf{d} = 0$, positivo per i bosoni e negativo per i fermioni: in Fig. 2.2b) è rappresentato il risultato dell'esperimento svolto su un campione di ^4He (bosonico) e di un ^3He (fermionico) in funzione della posizione sul rivelatore [31]. Un'altra applicazione dell'effetto Hanbury Brown e Twiss è stato suggerito da un lavoro teorico di E. Altman, E. Demler e M. D. Lukin [32], proprio per ottenere informazioni sulla struttura spaziale di sistemi fortemente correlati di atomi ultrafreddi in reticoli ottici. Essa consiste nell'osservazione della funzione di correlazione delle fluttuazioni di densità fra diverse repliche di un sistema atomico osservato dopo un tempo di espansione, mediante una tecnica di rivelazione in assorbimento (che sarà illustrata nel § 4.2).

Poiché l'esperimento che abbiamo effettuato riprende proprio tale proposta,

esaminiamola più in dettaglio.

Si consideri in particolare il caso di particelle bosoniche, d'interesse nell'ambito di questo lavoro di tesi, confinate in un potenziale di trappola, e si supponga per semplicità che il sistema si trovi inizialmente in uno stato puro $|\Phi\rangle$. Quando, come accade tipicamente negli esperimenti, il potenziale confinante viene spento, gli atomi espandono sotto l'effetto del propagatore libero $\hat{U}_0(t)$. Il valore di aspettazione della densità del sistema, dopo un tempo di espansione t è dato da

$$\langle \hat{n}(\mathbf{r}) \rangle_t = \left\langle \Phi \left| \hat{U}_0^\dagger(t) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}) \hat{U}_0(t) \right| \Phi \right\rangle, \quad (2.10)$$

dove $\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{r})$ è l'operatore di campo per particelle bosoniche. Dopo un tempo di espansione t sufficientemente lungo, tale che sia lecito utilizzare l'approssimazione balistica, la distribuzione di densità diventa proporzionale alla distribuzione di impulso degli atomi nello stato iniziale in trappola:

$$\langle \hat{n}(\mathbf{r}) \rangle_t \approx \frac{m}{\hbar t} \langle \hat{n}_{Q(\mathbf{r})} \rangle \quad (2.11)$$

dove il vettore d'onda $Q(\mathbf{r}) = m\mathbf{r}/(\hbar t)$ definisce una corrispondenza fra la posizione nella nuvola atomica dopo l'espansione e l'impulso in trappola. Si noti che nelle immagini sperimentali si osserva una singola realizzazione del profilo di densità, e tale realizzazione presenta delle fluttuazioni intorno al profilo medio. Si supponga di dividere l'immagine in piccoli riquadri σ , ognuno dei quali conterrà il segnale di assorbimento associato ad un numero finito di atomi N_σ : poiché N_σ non è macroscopico, le fluttuazioni nel numero di particelle rivelate nel riquadro, dell'ordine di $\sqrt{N_\sigma}$, sono visibili³. La correlazione spaziale di tali fluttuazioni, detta anche correlazione di rumore atomico, è descritta dalla funzione

$$C(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \langle \hat{n}(\mathbf{r}) \hat{n}(\mathbf{r}') \rangle_t - \langle \hat{n}(\mathbf{r}) \rangle_t \langle \hat{n}(\mathbf{r}') \rangle_t, \quad (2.12)$$

che può inoltre essere messa in relazione con la funzione di correlazione nello spazio degli impulsi

$$C(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \left(\frac{m}{\hbar t} \right)^{2d} \langle \hat{n}_{Q(\mathbf{r})} \hat{n}_{Q(\mathbf{r}')} \rangle - \langle \hat{n}_{Q(\mathbf{r})} \rangle \langle \hat{n}_{Q(\mathbf{r}')} \rangle \quad (2.13)$$

dove d è la dimensionalità del sistema.

³Questa suddivisione non è un artificio matematico: sperimentalmente, l'immagine della densità atomica viene acquisita con una telecamera CCD, costituita da una matrice bidimensionale di *pixel*, ciascuno dei quali può essere pensato come un rivelatore indipendente che raccoglie il segnale corrispondente a ≈ 10 atomi.

Consideriamo adesso il caso specifico di un sistema di bosoni confinati in un reticolo ottico. Il calcolo di $\langle \hat{n}(\mathbf{r}) \rangle_t$ coinvolge un valore di aspettazione sullo stato $|\Phi\rangle$ dell'operatore $\hat{U}_0^\dagger(t)\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r})\hat{\psi}(\mathbf{r})\hat{U}_0^\dagger(t)$ come in eq. (2.10): esso può essere però sostituito dal proiettore sulla prima banda di Bloch

$$A(\mathbf{r}, t) = \sum_i w_i(\mathbf{r}, t)\hat{b}_i, \quad (2.14)$$

dove $w_i(\mathbf{r}, t)$ sono i propagatori liberi delle funzioni d'onda di Wannier, inizialmente centrate su singoli siti reticolari. Dopo tempi di espansione lunghi

$$w_i(\mathbf{r}, t) \propto \exp(-i\mathbf{Q}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{R}_i), \quad (2.15)$$

con \mathbf{R}_i posizione di un atomo nel sito reticolare i -esimo. Si noti che l'espressione completa di $w_i(\mathbf{r}, t)$ è ottenuta moltiplicando il secondo membro in eq. (2.15) per un involuppo gaussiano, che possiamo approssimare con il quadrato della sua larghezza W . Per un simile sistema si ricava che

$$\langle \hat{n}(\mathbf{r}) \rangle_t \approx \langle \hat{n}_{Q(\mathbf{r})} \rangle = \frac{1}{W^d} \sum_{n,j} \exp[i(\mathbf{R}_n - \mathbf{R}_j) \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{r})] \langle \hat{b}_n^\dagger \hat{b}_j \rangle, \quad (2.16)$$

e l'espressione della funzione di correlazione diviene

$$\begin{aligned} C(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &\approx \frac{1}{W^d} \sum_{n,n',j,j'} e^{i[\mathbf{R}_{nn'} \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{r}) + \mathbf{R}_{jj'} \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{r}')] } \langle \hat{b}_n^\dagger \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_{j'} \hat{b}_{n'} \rangle + \\ &+ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \langle \hat{n}(\mathbf{r}) \rangle_t - \langle \hat{n}(\mathbf{r}) \rangle_t \langle \hat{n}(\mathbf{r}') \rangle_t. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Per un gas di bosoni in fase superfluida, $\langle \hat{n}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rangle$ esibisce i caratteristici picchi di interferenza Bragg in corrispondenza dei vettori d'onda del reticolo reciproco. Quindi nella fase superfluida, il profilo di densità dopo l'espansione fornisce direttamente informazioni sulla modulazione di densità degli atomi nel reticolo, e quindi sulla struttura del reticolo. Nella fase di Mott non si ha un simile profilo di interferenza e $\langle \hat{n}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rangle$ risulta piatta, tuttavia la sua funzione di correlazione al secondo ordine non banale, associata alle fluttuazioni quantistiche sul numero di atomi, contiene informazioni.

Nel caso semplificato di due atomi in una doppia buca considerato nel § 1.1.1 e rappresentato in Fig. 2.3a), per uno stato iniziale di Fock $|\Phi\rangle = a_1^\dagger a_2^\dagger |0\rangle$, la funzione di correlazione è data da

$$C(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{2}{W^{2d}} \cos \left[\frac{m}{\hbar t} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right]. \quad (2.18)$$

Questa espressione descrive delle oscillazioni che riflettono l'effetto di interferenza a due corpi legato al *bunching*. La Fig. 2.3b) mostra come queste oscillazioni evolvano in picchi di correlazione ben definiti all'aumentare del numero

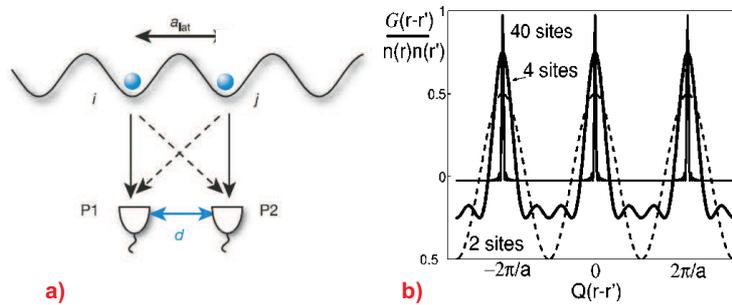


Figura 2.3: **a)** Applicazione dell'effetto Hanbury Brown e Twiss ad un sistema atomico in un reticolo ottico. **b)** Calcolo della funzione di correlazione di tale sistema, quando esso è in fase di isolante di Mott, nel caso di 2 , 4 e 40 siti reticolari [32].

di siti reticolari occupati. Si noti che i picchi di correlazione non riflettono le fluttuazioni del numero di atomi nel singolo sito, che sono molto ridotte nella fase di isolante di Mott (v. § 1.1.1), ma piuttosto le permutazioni di simmetria della funzione d'onda. In una fase come quella di Mott, caratterizzata da un ordine interno non banale, lo studio della correlazione di rumore può quindi essere usato per descrivere l'ordine del sistema.

Nell'ambito di questa tesi si dimostrerà inoltre come tale metodo di indagine, se applicato a sistemi disordinati, riveli di essere in grado di fornire informazioni sull'effettiva distribuzione degli atomi nei reticoli, e quindi anche sull'occupazione dei siti reticolari (v. cap. 4).

Capitolo 3

L'apparato sperimentale

In questo capitolo si descrive l'apparato sperimentale usato per effettuare la misura della correlazione delle fluttuazioni di densità degli atomi ultrafreddi nei reticoli ottici, attualmente attivo presso il LENS di Firenze.

Tale studio sperimentale è stato effettuato su un campione di atomi di ^{87}Rb , che viene innanzitutto portato in fase di condensato di Bose-Einstein, e successivamente caricato in maniera adiabatica in reticoli ottici periodici o quasi-periodici. Saranno qui presentate, innanzitutto, le principali caratteristiche del campione atomico di ^{87}Rb . Si illustrerà quindi brevemente l'apparato sperimentale utilizzato per la produzione del condensato, ed il suo funzionamento. Maggiori dettagli in tal proposito possono essere reperiti in [58, 59, 60, 61].

Sarà quindi descritto l'apparato utilizzato specificamente per la realizzazione del reticolo ottico principale, tridimensionale, e del reticolo ottico bicromatico dato dalla sovrapposizione di un reticolo secondario su una delle direzioni del reticolo principale.

3.1 Il campione atomico: il ^{87}Rb

Il rubidio è un metallo alcalino ed ha quindi la struttura elettronica tipica di tutti gli atomi idrogenoidi, caratterizzata unicamente dai numeri quantici dell'elettrone debolmente legato. Gli elettroni del *core*, infatti, possono essere eccitati unicamente da fotoni fortemente energetici, ben al di là dello spettro del visibile.

Il rubidio si presenta in due isotopi naturali, con numeri di massa 85 e 87 la cui abbondanza relativa è rispettivamente del 72% e del 28%. Il ^{87}Rb e il ^{85}Rb sono entrambi bosoni, ma la specie atomica qui studiata è il ^{87}Rb . Esso consente infatti di ottenere una fase di condensato stabile indipendentemente

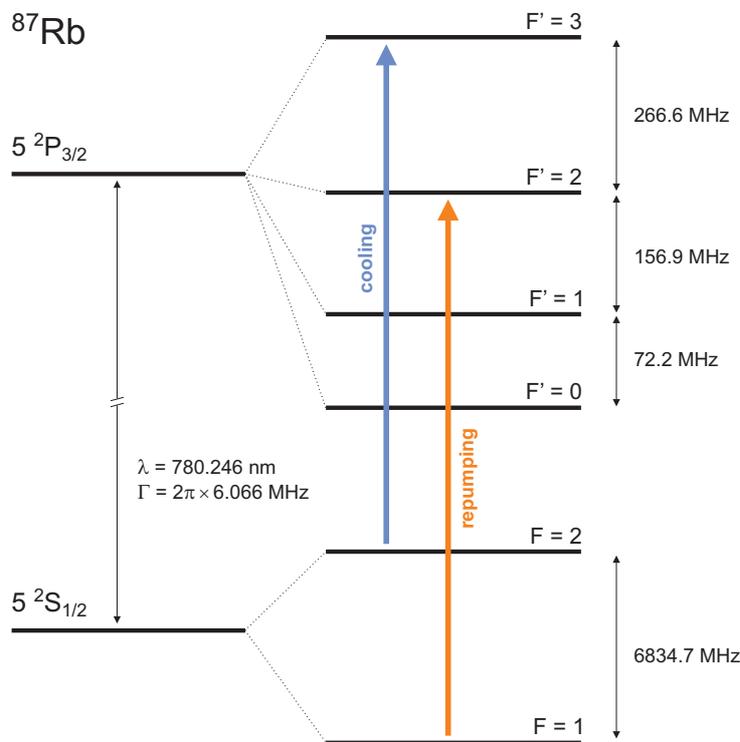


Figura 3.1: Struttura iperfine della transizione D2 del ^{87}Rb . Le frecce indicano le transizioni $F=2 \rightarrow F'=3$ e $F=1 \rightarrow F'=2$ utilizzate nella fase di MOT (v. § 3.2).

dal numero di atomi del campione, in quanto l'interazione fra gli atomi è repulsiva.

Entrambi gli isotopi hanno inoltre spin nucleare diverso da zero e presentano quindi una struttura iperfine. Il ^{87}Rb possiede spin nucleare $I = 3/2$, quindi lo stato fondamentale $5^2\text{S}_{1/2}$ è separato in due sottolivelli di momento angolare totale $F=1$ e $F=2$, fra i quali intercorre un intervallo in frequenza di $\sim 6.8\text{GHz}$.

In particolare, la transizione del ^{87}Rb di interesse nella procedura sperimentale per ottenere il condensato è la D2 fra i livelli $5^2\text{S}_{1/2}$ e $5^2\text{P}_{3/2}$, con $\lambda = 780.25\text{nm}$ (vedi Fig. 3.1).

3.2 Realizzazione del condensato di Bose-Einstein

La realizzazione sperimentale del regime di degenerazione quantistica e cioè, per un campione di bosoni, la condensazione di Bose-Einstein, avviene general-

mente attraverso diversi stadi, che hanno lo scopo di aumentare la densità nello spazio delle fasi, riducendo la temperatura e contemporaneamente aumentando la densità numerica degli atomi. La condensazione si raggiunge infatti se è soddisfatta la condizione

$$n\lambda_{dB}^3 \geq 2.612 \quad (3.1)$$

dove n è la densità numerica del campione e $\lambda_{dB} = \frac{h}{\sqrt{2\pi mk_B T}}$ è la lunghezza d'onda di De Broglie termica. Nella prima fase sperimentale si sfrutta l'effetto combinato del campo magnetico e della luce laser per intrappolare e rallentare gli atomi, nonché indurre un primo raffreddamento (trappola magneto-ottica). Nella seconda fase si opera una compressione degli atomi, al fine di accrescerne la densità, e si sfrutta la forza di dipolo della luce laser per ottenere un ulteriore rallentamento e conseguente raffreddamento degli atomi (melassa ottica sub-Doppler). Nella terza fase si utilizza una trappola puramente magnetica, in cui è possibile indurre l'evaporazione forzata degli atomi maggiormente energetici, e dunque più caldi. Al termine della procedura, il raggiungimento del regime di degenerazione viene controllato mediante un sistema di rivelazione in assorbimento, come illustreremo in dettaglio nel § 4.2: la transizione del sistema è evidenziata da una modificazione della distribuzione di densità del campione, che nel caso di un gas termico presenta un profilo gaussiano, descritto dalla statistica di Maxwell-Boltzmann, mentre nel caso di un condensato in regime di Thomas-Fermi (v. [62]) esibisce un profilo spaziale che ricalca la forma del potenziale di trappola.

3.2.1 La trappola magneto ottica (MOT)

Il primo stadio di produzione del condensato è il raffreddamento laser del campione: si sfrutta l'effetto di rinculo dell'atomo nel processo di assorbimento di luce laser quasi-risonante con una delle transizioni atomiche e di successiva emissione spontanea. Lo schema sperimentale utilizzato è quello della *trappola magneto-ottica* (MOT).

La trappola magneto-ottica induce il raffreddamento e il confinamento degli atomi grazie alla loro interazione con luce *detunata* verso il rosso. Al confinamento spaziale contribuisce la presenza del campo magnetico disomogeneo $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r})$ che sposta i sottolivelli energetici di struttura iperfine, per effetto Zeeman, della quantità

$$\Delta E(\mathbf{r}) = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = -g_F m_F \mu_B B(\mathbf{r}) \quad (3.2)$$

dove g_F è il fattore di Landé, μ_B è il magnetone di Bohr, m_F è la proiezione del momento angolare totale sull'asse di quantizzazione.

In particolare viene utilizzata una configurazione costituita da tre coppie di fasci laser contropropaganti con polarizzazione circolare opposta, in presenza di un campo magnetico di quadrupolo. Esso è generato da una coppia di bobine uguali disposte in configurazione anti-Helmholtz (nelle quali circola corrente della stessa intensità ma in verso opposto). L'opportuna scelta del *detuning* e dello stato di polarizzazione della luce, insieme alle regole di selezione per le transizioni di dipolo, fa sì che gli atomi assorbano preferenzialmente fotoni dal fascio laser che li spinge verso il centro della trappola, risultando così confinati.

La forza risultante sugli atomi, dovuta all'interazione con la radiazione laser, ha una componente di tipo viscoso (originata dall'effetto Doppler) che produce il raffreddamento, ed una componente di richiamo che intrappola gli atomi nello zero del campo magnetico. La forza sperimentata da un atomo è pertanto:

$$F = -kx - \gamma v, \quad (3.3)$$

che descrive un oscillatore armonico smorzato, dove x è la posizione e v la velocità di un atomo, k la sua costante di richiamo verso il centro della trappola e γ quella di smorzamento. Per una spiegazione semplice dell'effetto, rimandiamo alla descrizione già svolta nel lavoro di Tesi di Laurea Triennale [63].

Al termine della prima fase di raffreddamento fin qui descritta si raggiunge una temperatura $T \sim 200 \mu\text{K}$ e una densità numerica $n \sim 10^{10} \text{atomi}/\text{cm}^3$: ciò corrisponde ad una densità nello spazio delle fasi di $\sim 10^{-6}$.

3.2.2 La compressione e la melassa ottica

La fase intermedia prevede due operazioni successive, il cui scopo è incrementare la densità del campione e ridurre la temperatura. In primo luogo viene diminuito il gradiente del campo magnetico di quadrupolo, in modo tale da massimizzare la densità degli atomi nella trappola; la durata di questa fase è di circa 20ms. Successivamente il campo magnetico viene spento, si diminuisce la potenza del laser e si aumenta il *detuning*. In tal modo si ottiene un incremento dell'effetto viscoso, introdotto nel precedente paragrafo: per questa ragione questa fase viene definita di *melassa ottica*.

In questa fase è possibile diminuire ulteriormente la temperatura fino a $\sim 50 \mu\text{K}$: la densità nello spazio delle fasi raggiunta è di $\sim 10^{-7}$.

3.2.3 La trappola magnetica e il raffreddamento evaporativo

Il terzo stadio è quello di *raffreddamento evaporativo*, ottenuto rimuovendo selettivamente gli atomi più energetici. Innanzitutto il campione viene confinato in una trappola magnetica armonica, che è ottenuta con una configurazione di campo magnetico più complessa rispetto a quella di quadrupolo.

L'intrappolamento magnetico si basa ancora sullo spostamento dei livelli energetici indotto da un campo magnetico non omogeneo, come descritto in eq. (3.2). Se gli atomi sono polarizzati e allineati con la direzione del campo, possiamo scrivere un'energia potenziale della forma

$$U(\mathbf{r}) = -g_F m_F \mu_B |B(\mathbf{r})| \quad (3.4)$$

Per il teorema di Wing in una regione dello spazio priva di sorgenti non è possibile avere un massimo del campo, ma solo un minimo. Quindi si dovrà creare un minimo di campo, in modo da intrappolare in un minimo di potenziale gli atomi per i quali il prodotto $g_F m_F$ è positivo. Siccome il fattore di Landé vale $g_1 = -1/2$ per lo stato con $F = 1$ e $g_2 = +1/2$ per $F = 2$, gli stati della struttura iperfine del ^{87}Rb che possono essere intrappolati sono $|F, m_F\rangle = |1, -1\rangle, |2, 1\rangle, |2, 2\rangle$. Nel caso specifico, vengono usati per l'intrappolamento magnetico atomi nello stato $|1, -1\rangle$.

Il campo è generato da quattro bobine percorse da corrente in modo tale da ottenere un campo statico che vari armonicamente intorno ad un minimo diverso da zero. Il minimo deve essere diverso da zero per evitare perdite legate al fenomeno di *spin flip*¹ di Majorana verso stati non intrappolati, quando gli atomi sono dove il campo si azzerava. In approssimazione al secondo ordine il campo magnetico vicino al centro della trappola si può scrivere come:

$$|B(x, y, z)| = B_0 + \frac{1}{2}B_{(x)}x^2 + \frac{1}{2}B_{(y)}y^2 + \frac{1}{2}B_{(z)}z^2. \quad (3.5)$$

Sperimentalmente si è usata una corrente $I = 235\text{A}$, il campo di bias è $B_0 = 2.5\text{G}$, e le frequenze di trappola calcolate per il ^{87}Rb nello stato $|F, m_F\rangle = |1, -1\rangle$ risultano

$$\omega_z = 2\pi \times 8.8 \text{ Hz} \quad (3.6)$$

$$\omega_{\perp} = 2\pi \times 90 \text{ Hz} \quad (3.7)$$

Dopo aver trasferito in trappola magnetica gli atomi già raffreddati dalla fase di melassa, si procede allo stadio finale di raffreddamento evaporativo,

¹Quando gli atomi si avvicinano ad uno zero del campo magnetico, il loro momento magnetico può cambiare di segno ed essi possono passare in uno stato Zeeman non intrappolato.

realizzato usando un campo a radiofrequenza, che induce processi di *spin-flip* degli atomi verso livelli non intrappolati (cioè con $m_F = 0$, che non sono spostati in energia per la presenza del campo magnetico, come mostrato in eq. (3.4). Poiché la frequenza della transizione di *spin-flip* dipende dal valore del campo magnetico (non omogeneo) si può scegliere la radiofrequenza (RF) in modo tale da eliminare dalla trappola armonica soltanto gli atomi più energetici, che riescono a raggiungere zone del campo magnetico più lontane dal centro della trappola. All'equilibrio termico le velocità degli atomi nella trappola armonica obbediscono alla distribuzione di Maxwell: l'eliminazione delle particelle più energetiche equivale dunque a tagliare le code di tale distribuzione, corrispondenti alle velocità più alte. Il sistema poi si ritermalizza, mediante urti elastici, ad una temperatura più bassa di quella di partenza: la distribuzione risultante è sempre una maxwelliana, ma di minor larghezza.

Riducendo la frequenza del campo RF è possibile eliminare dalla trappola atomi con energia cinetica sempre più bassa; ciò viene fatto mediante una rampa evaporativa lenta per garantire di volta in volta la ritermalizzazione del sistema. Il risultato totale è dunque un aumento di densità degli atomi e un abbassamento della temperatura del campione e, conseguentemente, una crescita della densità nello spazio delle fasi fino al valore critico in eq. (3.1), in corrispondenza del quale si ottiene la condensazione.

Al fine di ottimizzare i diversi stadi di confinamento e di raffreddamento, l'apparato sperimentale qui descritto consta di due celle da vuoto comunicanti: gli atomi vengono dapprima raccolti nella prima cella, dove avviene un primo intrappolamento e raffreddamento magneto-ottico, quindi sono trasferiti nella seconda cella dove si attua ancora uno stadio d'intrappolamento mediante la tecnica della MOT, a cui seguono la compressione e la fase di melassa, quindi l'intrappolamento magnetico e il raffreddamento evaporativo.

Le due celle differiscono per il regime di vuoto che ivi è mantenuto: la prima cella necessita di un regime di vuoto non eccessivamente spinto per consentire la raccolta di un numero elevato di atomi; la seconda cella è invece ottimizzata per il raffreddamento degli atomi, che richiede chiaramente un regime di vuoto più spinto, al fine di diminuire le collisioni con il gas a temperatura ambiente che possono produrre un riscaldamento indesiderato del campione.

Le due celle sono connesse da un tubo di dimensioni tali da consentire la creazione di un gradiente di pressione fra le due celle. Il trasferimento degli atomi dalla prima trappola alla seconda è ottenuto mediante un fascio laser di spinta, impulsato e quasi-risonante con la transizione $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$, allineato lungo il tubo di collegamento delle due celle. Si noti che le successive fasi di produzione del condensato, nonché gli esperimenti che coinvolgono i reticoli ottici, sono effettuati nella seconda cella da vuoto.

3.3 Il reticolo ottico principale

Il reticolo ottico principale è un reticolo tridimensionale, costituito da tre coppie di fasci laser contropropaganti. Le tre coppie di fasci lungo x , y , z hanno vettori di polarizzazione mutuamente ortogonali per evitare che fasci diretti lungo assi diversi interferiscano, come illustrato nel § 1.5. Tuttavia per evitare contributi spuri che potrebbero originarsi dalla non perfetta ortogonalità delle polarizzazioni, la lunghezza d'onda del laser è leggermente diversa per i diversi assi (tipicamente la distanza in frequenza è dell'ordine delle decine di MHz), in modo che gli eventuali termini di interferenza residua (v. eq. (1.31)) oscillino ad una frequenza molto più elevata dei tempi di risposta degli atomi (che li vedono pertanto a media nulla).

3.3.1 La sorgente laser

La sorgente utilizzata per ottenere il reticolo è un laser a Titanio Zaffiro (Ti:Sa) commerciale Coherent 899-21 con cavità ad anello, pompato da un laser a stato solido (a Nd-YVO₄) duplicato, Coherent Verdi V18. Il laser di pompa emette una potenza di circa 18 W in un singolo modo intorno ai 532 nm (nel verde). La curva di guadagno del Ti:Sa si estende da circa 1100 nm fino ai 600 nm, ma la frequenza di emissione è limitata all'intervallo 760 ÷ 850 nm dalla riflettività delle ottiche presenti nella cavità laser. L'emissione in singolo modo è ottenuta mediante due *etalon* di diverso spessore, mentre una lamina birifrangente consente inoltre di accordare il modo di emissione a passi di 0.5 nm. La larghezza spettrale di emissione è tipicamente inferiore al MHz. La potenza massima prodotta in corrispondenza del centro della curva di guadagno è 3 W. Il fascio in uscita è polarizzato linearmente e presenta una divergenza di circa 2mrad.

La lunghezza d'onda selezionata per la realizzazione dei reticoli nell'ambito di questo esperimento è $\lambda_1 = 830.32$ nm: il reticolo è *detunato* verso il rosso rispetto alle transizioni D1 e D2 del rubidio (rispettivamente $\lambda = 794.766$ nm e $\lambda = 780.246$ nm).

3.3.2 Lo schema ottico

Lo schema ottico generale per il reticolo principale è riportato in Fig. 3.2.

All'uscita della sorgente laser, prima della suddivisione dei fasci, è posto un otturatore meccanico, comandato anch'esso via *software*, che consente di bloccare contemporaneamente tutti i fasci durante la fase di produzione del condensato: l'otturatore è caratterizzato da un tempo di commutazione abbas-

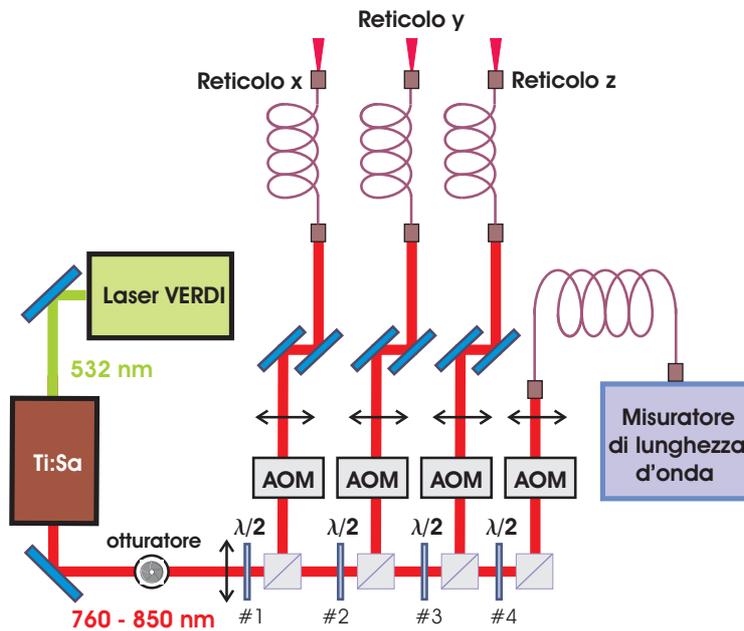


Figura 3.2: Schema delle ottiche per la produzione del reticolo principale tridimensionale.

tanza lungo (~ 1 ms) ma garantisce la completa estinzione del fascio quando il reticolo deve essere spento.

Il fascio laser prodotto dal Ti:Sa viene suddiviso in quattro fasci, tre dei quali sono utilizzati per realizzare il reticolo tridimensionale, mentre il quarto viene invece indirizzato verso un misuratore di lunghezza d'onda (Coherent, WaveMaster) che ha una precisione assoluta di 0.005 nm. La suddivisione è effettuata mediante un serie di lamine $\lambda/2$, che ruotano la polarizzazione lineare del fascio, e di cubi polarizzatori, che separano il fascio in due componenti di polarizzazione fra loro ortogonali; questo sistema di ottiche permette inoltre di variare in maniera indipendente la potenza su ciascuno dei quattro fasci.

I fasci del reticolo passano poi attraverso un modulatore acusto-ottico (AOM) e quindi una fibra ottica.

I modulatori rivestono un duplice compito: in primo luogo essi regolano i tempi di accensione e spegnimento dei singoli fasci, in quanto sono caratterizzati da un tempo di commutazione molto breve ($\sim 1 \mu\text{s}$), e in secondo luogo permettono di accordare i singoli fasci ad una frequenza diversa, nell'intervallo di qualche decina di MHz, in modo tale da evitare che essi interferiscano quando si incrociano per formare il reticolo tridimensionale.

Il principio di funzionamento di tali dispositivi è il seguente. All'interno

del modulatore è presente un cristallo (generalmente biossido di tellurio) a contatto con un attuatore guidato da un'onda radio di frequenza ω_0 che comprime periodicamente il cristallo in direzione ortogonale al cammino ottico del fascio laser (di frequenza ω): la radiofrequenza induce sul cristallo una modulazione periodica della densità, che simula la struttura di un reticolo di diffrazione. Il passaggio di un fascio laser attraverso il cristallo produce quindi una separazione del fascio stesso in diversi ordini diffratti, separati spazialmente, ognuno dei quali ha una frequenza ad $\omega \pm n\omega_0$, a seconda dell'ordine di diffrazione. In particolare, ai fini dell'esperimento, viene sempre prelevato il primo ordine di diffrazione, di frequenza $\omega + \omega_0$. Risulta dunque evidente che variando la frequenza dell'onda RF è possibile modificare la frequenza del fascio laser; inoltre il modulatore può essere usato come attenuatore variabile del fascio diffratto, attraverso la variazione dell'intensità della radiofrequenza, che provoca una modulazione della potenza sul primo ordine. Vedremo nel § 4.1 che questa caratteristica sarà particolarmente importante per l'accensione lenta dei fasci e il loro spegnimento.

Nel caso specifico, sono stati usati AOM Crystal Technology 3080-122, con una frequenza operativa di 80 MHz e un'efficienza massima al primo ordine di oltre l'80% a 830 nm. Anch'essi, come del resto tutta la tempistica dell'esperimento, sono comandati via software.

L'uso della fibra ottica (Oz Optics, Polarization maintaining) è reso necessario data la sensibilità del reticolo ottico all'allineamento, poiché i fasci dovrebbero propagarsi attraverso distanze dell'ordine di qualche metro dalla sorgente laser alla cella da vuoto, poste peraltro su banchi ottici diversi; la fibra ottica consente inoltre di migliorare il profilo spaziale dei fasci, e mantiene inalterata la polarizzazione.

All'uscita dalle fibre un sistema di specchi indirizza i tre fasci verso la cella da vuoto dove viene prodotto il condensato, lungo tre direzioni ortogonali passanti per il centro della cella, due delle quali giacciono nel piano orizzontale mentre la terza è quella verticale. I fasci vengono focalizzati in corrispondenza del centro della cella con lenti di focale $f = 500$ mm e poi retroriflessi per creare l'onda stazionaria che forma il reticolo ottico.

Nella regione del condensato i fasci hanno un raggio² di $\sim 200 \div 250$ μm , ed inducono un confinamento in buona approssimazione armonico principalmente in direzione radiale (v. § 1.5), che si somma al confinamento magnetico armonico definito nel § 3.2.3.

La propagazione dei fasci fuori dalla fibra ottica è ottenuta mediante specchi diecrici, la cui massima riflettività è intorno agli 830 nm. La scelta di ottiche

²Definiamo con raggio del fascio la distanza dell'asse di propagazione a cui l'intensità diminuisce di un fattore $1/e^2$ (vedi § 1.5).

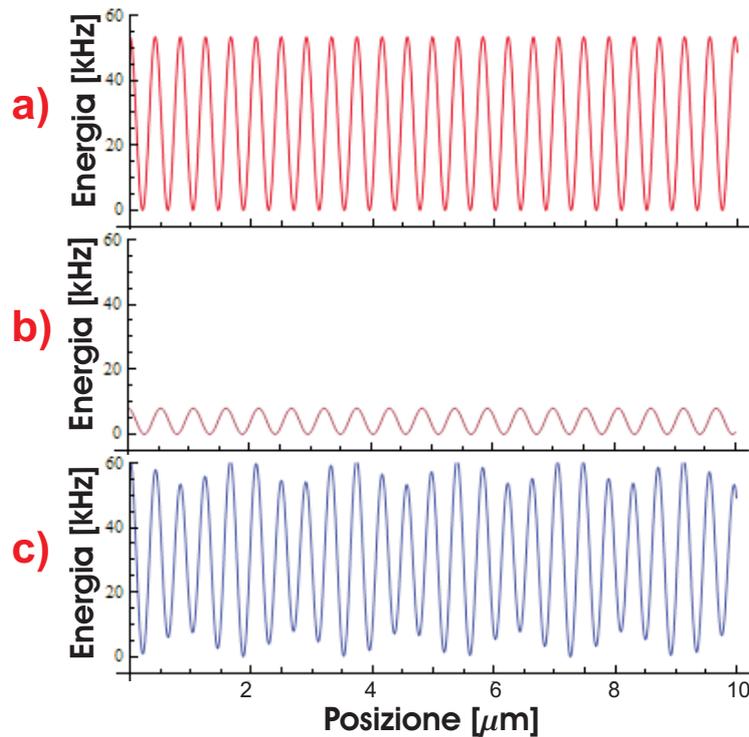


Figura 3.3: a) Reticolo principale, di lunghezza d'onda $\lambda = 830.32$ nm. b) Reticolo secondario, con $\lambda = 1076.7$ nm. c) Reticolo bicromatico, realizzato dalla sovrapposizione dei due precedenti reticoli.

dicroiche, cioè selettive in lunghezza d'onda, è dettata dal fatto che nella fase di preparazione del condensato sono presenti sul cammino ottico altri fasci laser a diversa lunghezza d'onda, che invece non devono essere riflessi.

3.4 Il reticolo bicromatico

Come già detto, l'approccio ai sistemi disordinati adottato nell'ambito di questo lavoro di tesi si basa sulla realizzazione di potenziali quasi-periodici ottenuti mediante reticoli bicromatici (v. § 1.6). La configurazione sperimentale scelta prevede che il disordine sia aggiunto su un'unica direzione del reticolo principale tridimensionale, che sarà da qui in avanti definita come y . Tale scelta è dettata essenzialmente dalla limitata potenza disponibile per il secondo reticolo, e dalla difficoltà di accesso ottico alla cella da vuoto dove viene prodotto il condensato, causata dalla presenza di un elevato numero di fasci laser (e dunque di ottiche) impiegati per la realizzazione del condensato, per

la procedura di rivelazione (che sarà illustrata nel § 4.2) e per la generazione del reticolo ottico principale.

Lungo la direzione y sono quindi sovrapposti il reticolo principale e il reticolo secondario, la cui lunghezza d'onda è scelta in modo tale che il rapporto fra le frequenze dei due fasci che si sovrappongono sia un numero incommensurato, secondo la definizione operativa fornita nel § 1.6: $\lambda_1 = 830.32$ nm e $\lambda_2 = 1076.7$ nm. In tal modo che l'eventuale periodicità del reticolo bicromatico sia molto maggiore dell'estensione del condensato ($\simeq 100$ μm), che sperimenta una serie di buche di potenziale la cui altezza è distribuita in maniera non periodica.

In Fig. 3.3 è rappresentato il potenziale periodico del reticolo principale e del reticolo secondario, ed inoltre il potenziale disordinato che risulta dalla sovrapposizione dei due. Le altezze dei reticoli (espresse in kHz) che sono riportate in figura rappresentano dei valori tipici dell'esperimento.

Poiché il reticolo principale è stata già oggetto dei precedenti paragrafi, nel seguito si descriverà unicamente il reticolo secondario.

3.4.1 La sorgente laser del reticolo secondario

La sorgente del reticolo secondario è un diodo laser a semiconduttore (Toptica, modello LD-1050-0050-AR-2) montato in cavità estesa in modo da migliorarne le caratteristiche spettrali. La cavità estesa è costituita da un reticolo di diffrazione Edmund di 1200righe/2500Å.

Le caratteristiche del diodo laser sono riportate in Tabella1:

Diodo Toptica, modello LD-1050-0050-AR-2 @T=25 °C	
Potenza in uscita	50 mW
Temperatura operativa	15.0-40.0°C
Corrente di soglia	20.0mA
Corrente operativa @P ₀ = 50.0 mW	130.0-160.0 mA
Efficienza	0.7W/A
Intervallo di lunghezza d'onda	1030.0-1065.0 nm
Divergenza del fascio (//) @P ₀ = 50.0 mW	10.0 deg
Divergenza del fascio (\perp) @P ₀ = 50.0 mW	30.0 deg

Tabella 1. Caratteristiche del diodo laser che produce il reticolo secondario.

La lunghezza d'onda utilizzata per il reticolo secondario ($\lambda_2 = 1076.7$ nm) è al di fuori dell'intervallo di lunghezze d'onda riportato in Tab.1 e cade sulla coda della curva di guadagno del diodo laser: in corrispondenza della lunghezza d'onda d'interesse la potenza massima in uscita è ~ 20 mW.

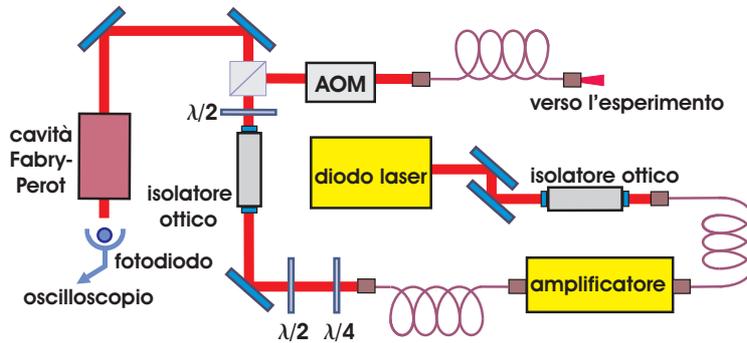


Figura 3.4: Schema ottico per la realizzazione del reticolo secondario.

Per raggiungere le potenze richieste per l'esperimento risulta necessario l'utilizzo di un'amplificatore. In particolare, è stato utilizzato un amplificatore a stato solido (NBM Ytterbium Amplifier, modello YAM-1000). L'amplificatore è iniettato mediante fibra ottica, e anche la luce amplificata si propaga in fibra.

La potenza massima complessiva che si ottiene è ~ 600 mW, con un'amplificazione di più di un ordine di grandezza. Ciò consente la realizzazione di reticoli di altezza fino a 9 energie di rinculo dell'atomo per assorbimento di un singolo fotone, (vedi eq. (1.28)).

La lunghezza d'onda del laser viene generalmente accordata modificando semplicemente la corrente operativa del diodo, e l'emissione in singolo modo è garantita attraverso un controllo mediante un interferometro Fabry-Perot. Esso ci ha permesso inoltre di verificare che lo stadio di amplificazione mantiene inalterate le proprietà spettrali della sorgente, almeno entro la risoluzione dell'interferometro (che a questa lunghezza d'onda è limitata ad alcuni MHz).

3.4.2 Lo schema ottico

Lo schema ottico generale utilizzato per la realizzazione del reticolo secondario è illustrato in Fig. 3.4.

Poiché lo stadio di amplificazione rende leggermente ellittica la polarizzazione lineare della radiazione prodotta dal diodo laser, è necessario porre, dopo la fibra di uscita dell'amplificatore, due lamine $\lambda/4$ e $\lambda/2$, in modo da indurre una polarizzazione lineare e poterne controllare la direzione. Inoltre, al fine di eliminare il *feed-back* ottico al quale sia il diodo laser sia l'amplificatore sono particolarmente sensibili, sono stati utilizzati due isolatori ottici, il primo dei quali è posto dopo il diodo, mentre il secondo è posto all'uscita dell'amplificatore.

Una lamina $\lambda/2$ posta dopo il secondo isolatore produce poi una rotazione

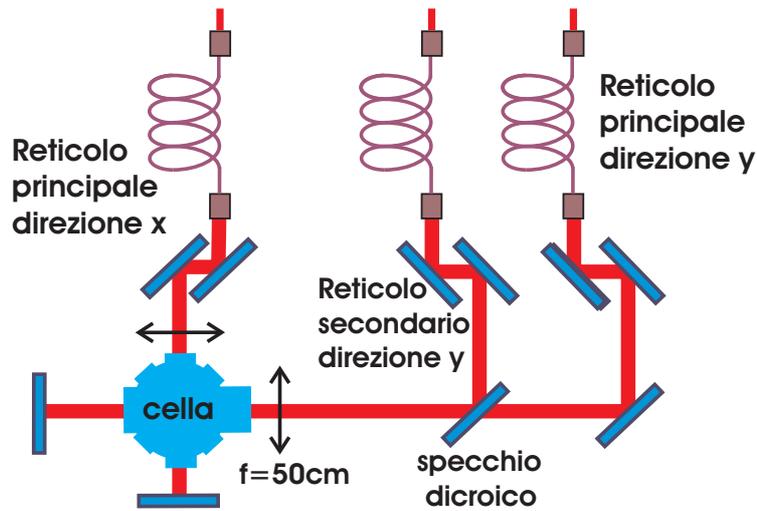


Figura 3.5: Schema del reticolo ottico bicromatico. Per semplicità sono riportate soltanto le due direzioni ortogonali x e y che giacciono sul piano orizzontale.

della polarizzazione in modo da regolare la frazione di potenza riflessa e trasmessa dal cubo *beam-splitter* polarizzatore che è posto in successione ad essa.

La frazione trasmessa dal cubo polarizzatore, viene infatti prelevata per il controllo del modo del laser, effettuato mediante la cavità Fabry-Perot, mentre la parte riflessa viene indirizzata all'esperimento. Sul cammino ottico di quest'ultimo fascio è posto un modulatore acusto-ottico, la cui funzione è quella di effettuarne l'accensione e lo spegnimento (v. § 3.3.2). Dopo l'AOM il fascio entra nuovamente in una fibra ottica, e all'uscita da essa viene sovrapposto al reticolo principale lungo la direzione y per formare il reticolo bicromatico, e quindi direzionato sulla cella da vuoto mediante un sistema di specchi, come è schematizzato in Fig. 3.5. La sovrapposizione dei fasci che producono i due reticoli di diverso colore avviene tramite ottiche selettive in frequenza e in particolare grazie uno specchio dicroico, che riflette la radiazione di lunghezza d'onda intorno a $\lambda \sim 1\mu\text{m}$ e trasmette quella intorno a $\lambda \sim 800\text{nm}$. La retroriflessione del fascio laser del reticolo secondario, necessaria per la formazione di un'onda stazionaria, è prodotta dallo stesso specchio che retroriflette il fascio del reticolo principale, come mostrato in Fig. 3.5.

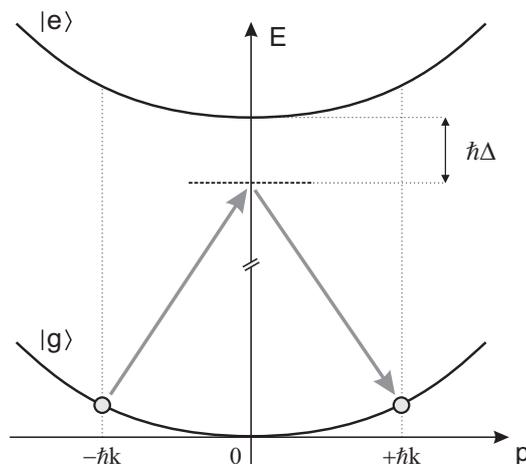


Figura 3.6: Schema delle transizioni di Bragg. Un atomo viene illuminato da due fasci laser contropropaganti di ugual frequenza, fuori risonanza. Se l'impulso iniziale dell'atomo è $-\hbar\mathbf{k}$ (con \mathbf{k} vettore d'onda della radiazione laser) può avvenire la transizione allo stato $+\hbar\mathbf{k}$, attraverso uno stato eccitato virtuale.

3.5 Calibrazione dei reticoli ottici

La calibrazione dell'altezza del reticolo costituisce la procedura preliminare ad ogni serie di misure.

In linea di principio il parametro s che definisce l'altezza del reticolo (v. eq. (1.28) può essere calcolato se si conoscono i parametri I_0 e Δ dei due fasci, come risulta dall'eq. (1.28). Tuttavia questo metodo comporta errori sistematici nella determinazione di s , dovuti all'impossibilità di misurare l'intensità effettiva agente sugli atomi, a causa della trasmissività solo parziale delle finestre della cella da vuoto e della difficoltà di misurare con precisione la dimensione e il grado di sovrapposizione dei fasci del reticolo.

Pertanto la calibrazione del reticolo deve essere effettuata sperimentalmente utilizzando gli atomi stessi come sonde, sfruttando cioè qualche effetto noto e misurabile quantitativamente che dipenda dall'altezza del reticolo.

Nel caso specifico, sono state adottate due diverse tecniche di calibrazione, che sfruttano entrambe il fenomeno della diffrazione Bragg del condensato di Bose-Einstein da parte di un reticolo ottico. Illuminando il campione atomico con due fasci laser contropropaganti, si induce un trasferimento di impulso quantizzato in multipli pari dell'impulso del fotone del reticolo $p = \hbar k$ [12, 16]. Pertanto, osservando il campione atomico dopo un intervallo di tempo t_{esp}

dalla fine dell'interazione, si vede che gli atomi si separano spazialmente in varie componenti, ognuna con diverso impulso: la loro distribuzione spaziale presenta i picchi caratteristici del fenomeno della diffrazione. Tale processo può essere anche trattato come una transizione Raman a due fotoni, che prevede l'assorbimento e la successiva emissione stimolata da parte degli atomi, come illustrato in Fig. 3.6 e commentato più estesamente nel § 3.5.2.

Poiché la larghezza della distribuzione di impulso del condensato è molto minore dell'impulso di rinculo degli atomi dovuto all'assorbimento di un fotone, i vari ordini di diffrazione risultano ben separati.

Come già detto, abbiamo adottato due metodi di calibrazione la cui differenza risiede essenzialmente nel regime di interazione fra gli atomi e il reticolo, legato alla durata dell'impulso laser con cui si illuminano gli atomi. In particolare, il discriminante fra impulso breve o lungo è fornito dal periodo di oscillazione caratteristico dell'atomo in un sito reticolare, come verrà illustrato più in dettaglio nel seguito.

3.5.1 Diffrazione di Bragg in regime Raman-Nath

Il regime di Raman-Nath, che si ottiene quando la durata dell'impulso laser è molto minore rispetto ai tempi caratteristici del moto degli atomi nei siti reticolari (comunemente ci si riferisce a ciò in termini di diffrazione da reticolo sottile). In questo caso, la calibrazione dei reticoli è stata effettuata sfruttando la relazione che sussiste, in tale regime, fra l'altezza del reticolo e la larghezza quadratica media della distribuzione di impulso degli atomi.

Si consideri un'onda stazionaria coerente e non risonante,

$$E(z, t) = 2E_0 f(t) \cos(kz) \sin(\omega t) \quad (3.8)$$

dove la funzione $f(t)$ descrive un'impulso quadrato di durata τ , k è il vettore d'onda e ω la frequenza. Si noti che la frequenza della radiazione deve essere molto lontana dalla frequenza di transizione atomica ω_0 : $\Delta = |\omega - \omega_0| \gg \Omega_0, \Gamma$, dove Γ è la larghezza naturale di riga e Ω_0 la frequenza di Rabi. L'interazione con la radiazione induce un moto oscillatorio degli atomi nelle buche di potenziale del reticolo, il cui periodo è, come in [16]:

$$t_v = \pi \sqrt{|\Delta| / \Omega_0^2 \omega_R}, \quad (3.9)$$

dove $\omega_R = \hbar k^2 / 2m$ è la frequenza di rinculo di un atomo per assorbimento di un fotone e m la massa. In un regime in cui $\tau \ll t_v$, si ricava, come in [12], l'impulso quadratico medio trasferito:

$$p_{rms} = 2^{1/2} z \hbar k, \quad (3.10)$$

in cui z è definita dall'espressione

$$z = (\pi/8)^{1/2} \tau \Omega_0^2 / \Delta. \quad (3.11)$$

Tale variabile è dunque legata all'altezza V_0 del reticolo, che può essere scritta come

$$V_0 = \hbar \Omega_0^2 / \Delta. \quad (3.12)$$

Ne segue che l'altezza del reticolo e l'impulso quadratico medio sono legati da una relazione lineare,

$$p_{rms} = \sqrt{\frac{\pi}{4}} \tau k V_0. \quad (3.13)$$

L'impulso quadratico medio si ricava sperimentalmente, in maniera semplice, misurando il raggio quadratico medio r_{rms} della distribuzione spaziale degli atomi dopo un tempo di espansione t_{esp} . Queste grandezze sono infatti legate dalla relazione:

$$r_{rms} = \frac{p_{rms}}{m} t_{esp}. \quad (3.14)$$

In pratica la calibrazione del reticolo principale è stata effettuata nel modo seguente. Il campione atomico condensato, inizialmente confinato nella trappola magnetica, viene illuminato per $\tau = 2.5 \mu s$ dai fasci laser contropropaganti del reticolo, impulsati mediante AOM. Dopo l'interazione con la luce laser lo spegnimento della trappola provoca l'espansione degli atomi, che vengono poi osservati con la tecnica di rivelazione in assorbimento che sarà descritta nel § 4.2. Immagini tipiche del campione atomico illuminato dal reticolo impulsato in regime Raman-Nath sono riportate in Fig. 3.7a), per varie altezze del reticolo stesso, e per una durata degli impulsi di $2.5 \mu s$. L'impulso quadratico medio p_{rms} viene determinato calcolando il momento secondo della distribuzione di densità misurata r_{rms} .

In realtà nel nostro caso l'impulso laser non è perfettamente descrivibile mediante un'onda quadra, a causa della banda passante finita del circuito elettrico che comanda gli AOM, quindi l'eq. (3.13) non può più essere direttamente applicata per misurare l'altezza del reticolo. Per poter effettuare ugualmente la calibrazione dei reticoli con questo metodo è stato in primo luogo necessario ricavare la curva fenomenologica della larghezza quadratica media della distribuzione di densità atomica r_{rms} in funzione dell'altezza del reticolo. A tal fine si è innanzitutto effettuata una calibrazione preliminare con un metodo diverso, ovvero l'osservazione delle oscillazioni di Rabi in regime di impulso lungo, che sarà descritto nel seguito: ciò ha permesso di ricavare la relazione fra la potenza del laser e l'altezza del reticolo. Sono state quindi effettuate diverse misure della larghezza r_{rms} , in corrispondenza di differenti valori dell'altezza del reticolo. La curva di taratura è stata ottenuta per interpolazione

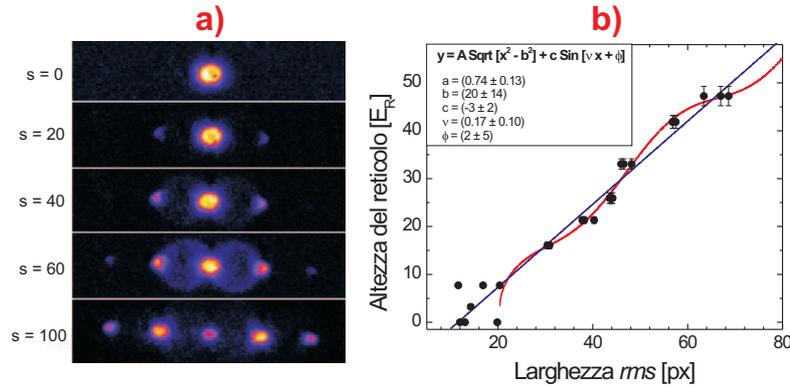


Figura 3.7: **a)** Immagini del condensato illuminato da un reticolo impulsato (in regime Raman-Nath), di diverse altezze. **b)** Altezza del reticolo y in funzione della larghezza r_{rms} dopo 20 ms di espansione. Sui punti sperimentali è stato eseguito un *fit* lineare (curva in blu) e un *fit* con una funzione fenomenologica (curva rossa) descritta nel riquadro della Figura, dove si riporta anche il risultato di tale *fit*.

dei punti sperimentali ed è rappresentata in Fig. 3.7b), per il reticolo principale in direzione y .

La tecnica fin qui descritta fornisce una calibrazione rapida del reticolo, ma necessita di potenze abbastanza alte.

3.5.2 Osservazione delle oscillazioni di Rabi

Per la calibrazione del reticolo secondario, nonché per la calibrazione della relazione fra l'impulso rms e l'altezza del reticolo nel regime Raman-Nath, è stato utilizzato un metodo diverso che si basa comunque sul medesimo principio della diffrazione di Bragg. La scelta è stata dettata dal fatto che la potenza della radiazione laser del reticolo secondario non è sufficiente da consentire l'utilizzo della prima tecnica. In questo secondo metodo si misura l'evoluzione temporale della popolazione relativa dei picchi di diffrazione, al variare del tempo di interazione con i fasci del reticolo. Se tale tempo di interazione τ è confrontabile o maggiore rispetto al periodo di vibrazione degli atomi definito in eq. (3.9), si osservano delle oscillazioni di Rabi fra stati di impulso diversi, la cui popolazione viene nuovamente rivelata dopo un tempo di espansione t_{esp} .

La calibrazione avviene in questo caso sfruttando la semplice relazione fra l'altezza del reticolo e la frequenza di Rabi Ω_B della transizione di Bragg a due fotoni, schematicamente illustrata in Fig. 3.6, la cui misura può essere

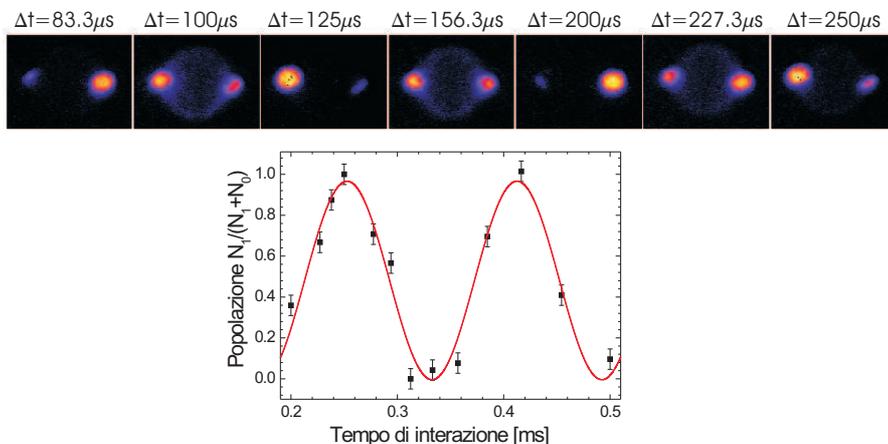


Figura 3.8: In alto: evoluzione temporale della popolazione dei due stati di impulso $p_1 = +\hbar k$ e $p_0 = -\hbar k$ corrispondenti ai picchi di diffrazione Bragg, separati spazialmente dopo l'espansione del condensato. In basso: popolazione relativa del primo picco $+\hbar k$ in funzione della durata dell'impulso laser: esso presenta un andamento sinusoidale (oscillazione di Rabi).

effettuata sperimentalmente con buona precisione [63]:

$$V_0 = 2\hbar\Omega_B \quad (3.15)$$

La calibrazione sar  quindi effettuata misurando Ω_B .

Nella prima fase della misura il reticolo   spento e il campione condensato   confinato nella trappola magnetica armonica. Dal momento che l'impulso Bragg   ottenuto con due fasci laser aventi la stessa frequenza ω , per prima cosa occorre imprimere al campione la velocit  necessaria ($v_B = \hbar k/m$) affinche il processo sia risonante. Ci  si ottiene spostando il centro della trappola armonica lungo la direzione dell'asse y di una distanza $\Delta y = \hbar k/m\omega_y$, al fine di indurre un'oscillazione del centro di massa del condensato. Quando il campione raggiunge il centro della trappola (cio  quando la sua velocit    $v_B = \hbar k/m$) il reticolo viene acceso per un tempo Δt . Dopo l'interazione con il reticolo, si lascia espandere il condensato sufficientemente a lungo perch  le varie componenti di impulso si separino spazialmente.

Dopo l'espansione si rileva l'immagine del condensato, e si misura la popolazione dei due stati di impulso $p_1 = +\hbar k$ e $p_0 = -\hbar k$: in Fig. 3.8   riportata una serie di immagini che sono state ottenute con questa procedura. In Fig. 3.8   anche riportata l'oscillazione della popolazione relativa nello stato $+\hbar k$, al

variare della durata Δt dell'impulso laser del reticolo. Dal *fit* dei dati con una sinusoide si ricava la frequenza di Rabi delle oscillazioni Ω_B , e dall'eq. (3.15) l'altezza del reticolo ottico. Per ulteriori dettagli sulla calibrazione Bragg dei reticoli ottici in questo esperimento si rimanda anche al precedente lavoro di Tesi di Laurea Triennale [63].

In generale la tecnica di calibrazione Bragg è valida nel limite in cui s è piccolo (dell'ordine delle unità), quando cioè sono presenti solo due componenti di impulso, cioè si osservano esclusivamente i picchi di diffrazione di ordine 0 e 1. Per campi molto intensi, viceversa, l'approssimazione a due livelli fallisce: iniziano a popolarsi stati di impulso addizionali (ovvero si osservano gli ordini di diffrazione successivi), per cui la trattazione teorica del fenomeno si complica.

Capitolo 4

Studio sperimentale delle correlazioni di rumore

L'indagine sperimentale della correlazione spaziale delle fluttuazioni di densità in espansione, su modello dell'effetto Hanbury Brown e Twiss, è partita dall'osservazione di un sistema in fase di isolante di Mott, già effettuata in [33]. Nella fase di Mott la funzione di correlazione esibisce dei picchi caratteristici, la cui posizione è legata alla periodicità del reticolo ottico. Le misure da noi effettuate su tale sistema, già studiato in letteratura, hanno consentito di verificare l'efficacia sia dell'apparato sperimentale per l'indagine della correlazione sia delle tecniche di analisi adottate nell'ambito del lavoro di tesi, nonché la qualità delle immagini di correlazione ottenute sperimentalmente.

La parte originale e più importante dell'indagine sperimentale è tuttavia quella che riguarda l'applicazione di questa diagnostica su un sistema quasi-disordinato, dove si verifica la rottura controllata della fase di isolante di Mott. Tale sistema è stato ottenuto intrappolando il gas bosonico in un reticolo bicromatico unidimensionale, in aggiunta al reticolo principale che rimane nelle due direzioni ortogonali, come descritto nel § 3.4.

La caratteristica peculiare del sistema è in questo caso la comparsa di picchi aggiuntivi nel segnale di correlazione, legati alla periodicità del reticolo reciproco del potenziale secondario, nonché a quella del battimento fra le lunghezze d'onda dei due reticoli. È stata quindi effettuata una sistematica, in modo da evidenziare la nascita e l'evoluzione dei picchi di correlazione delle fluttuazioni, e ricavare in maniera quantitativa la loro dipendenza dai parametri fisici fondamentali.

Lo studio della correlazione spaziale del rumore di densità non ha solo permesso di ricavare informazioni sulla spaziatura dei minimi di energia del reticolo come in [33], ma si è soprattutto rivelata un'efficace tecnica di indagine dell'occupazione dei singoli siti reticolari. Si noti che la distribuzione delle po-

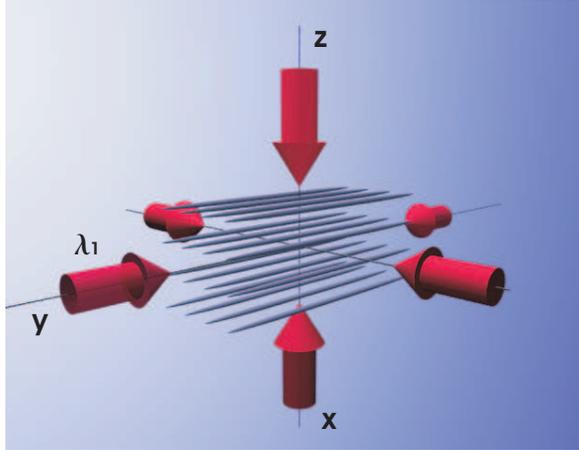


Figura 4.1: Configurazione sperimentale adottata per lo studio del sistema in fase di isolante di Mott. Il campione di ^{87}Rb è illuminato da un reticolo tridimensionale costituito da tre coppie ortogonali di fasci contropropaganti di $\lambda \sim 830.3$ nm, separate in frequenza da qualche MHz. I reticoli principali hanno altezza $s_{x,z} = 40$ mentre in direzione y si ha $s_y = 16$.

sizioni dei minimi del potenziale viene variata in maniera trascurabile dall'aggiunta del secondo colore, come descritto nel § 1.6, mentre l'effetto più cospicuo riguarda la variazione dell'energia di tali minimi, che produce la redistribuzione dei bosoni nei siti reticolari.

Per questo lavoro di tesi la fase di raccolta dati ha previsto l'acquisizione e l'elaborazione di più di 5000 immagini, ognuna delle quali è ottenuta con un ciclo sperimentale che comprende la realizzazione del condensato di Bose-Einstein, il suo caricamento nel reticolo e la procedura di rivelazione, che dura circa 150 secondi, per un totale di oltre 200h.

In questo capitolo si discuterà in dettaglio la procedura di misura e di analisi dei dati. Inoltre si presenteranno i risultati sperimentali, e si effettuerà il confronto con alcune simulazioni teoriche basate sul modello di Bose-Hubbard.

4.1 Procedura di misura

Per le misure svolte sul sistema in fase di isolante di Mott abbiamo utilizzato un reticolo tridimensionale, costituito da tre coppie di fasci laser contropropaganti di lunghezza d'onda $\lambda \simeq 830.3$ nm, come già descritto in dettaglio nel § 3.3. I reticoli nelle direzioni x e z hanno altezza $s_{x,z} = 40$ mentre in direzione y si ha $s_y = 16$ (dove l'altezza del potenziale è espressa in energie di rinculo atomico,

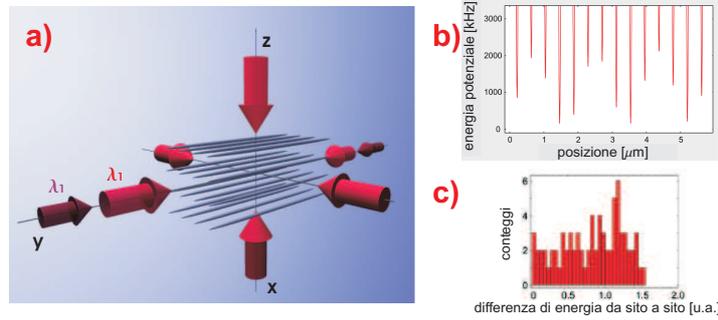


Figura 4.2: Configurazione sperimentale adottata per lo studio dei sistemi quasi-disordinati. Il reticolo ottico tridimensionale è costituito dall'unione di due reticoli monocromatici di lunghezza d'onda $\lambda = 830.32\text{nm}$ lungo le direzioni x e z , e di un reticolo bicromatico lungo y , dato dalla sovrapposizione di una coppia di fasci laser di lunghezza d'onda $\lambda = 830.3\text{nm}$ ed una coppia di fasci con $\lambda = 1076.8\text{nm}$. **b)** Andamento del potenziale bicromatico lungo la direzione y , dove l'altezza del reticolo principale è $s_y = 16$ e l'altezza del reticolo secondario è $s_2 = 1$. **c)** Istogramma delle differenze di energie fra siti primi-vicini, sempre nel caso in cui $s_y = 16$ e $s_2 = 1$.

secondo la definizione di s mostrata in eq. (1.28). Tali valori sono stati scelti per poter effettuare la nostra indagine su un sistema già caratterizzato in un lavoro sperimentale precedente [20].

Al potenziale reticolare si aggiunge la presenza della trappola magnetica descritta nel § 3.2.3, e l'effetto di confinamento ottico dovuto al profilo gaussiano dei fasci del reticolo, per cui le frequenze di trappola risultanti (sommando in quadratura i contributi del reticolo) sono $\omega_x = \omega_z = 2\pi \times 110\text{ Hz}$ e $\omega_y = 2\pi \times 76\text{ Hz}$.

Poiché l'altezza dei reticoli lungo le direzioni x e z è molto elevata, il *tunneling* fra sito e sito risulta praticamente soppresso rispetto all'energia di interazione, poiché si ha $U/J = 7 \times 10^3$; nella direzione y invece l'intrappolamento, sebbene sia sufficiente da indurre una localizzazione degli atomi in uno stato isolante di Mott, non elimina completamente il *tunneling*, infatti si ha $U/J = 150$. La nuvola atomica, che è composta complessivamente da circa 3×10^5 atomi, si distribuisce quindi in un *array* di tubi unidimensionali paralleli all'asse y e fortemente confinati nelle due direzioni ortogonali, come illustrato in Fig. 4.1. La popolazione dei singoli tubi varia spazialmente, da circa 200 atomi nella zona centrale fino a zero nelle zone esterne.

L'indagine dei sistemi disordinati è stata poi condotta su una configurazione sperimentale formata dal reticolo principale tridimensionale, a cui è

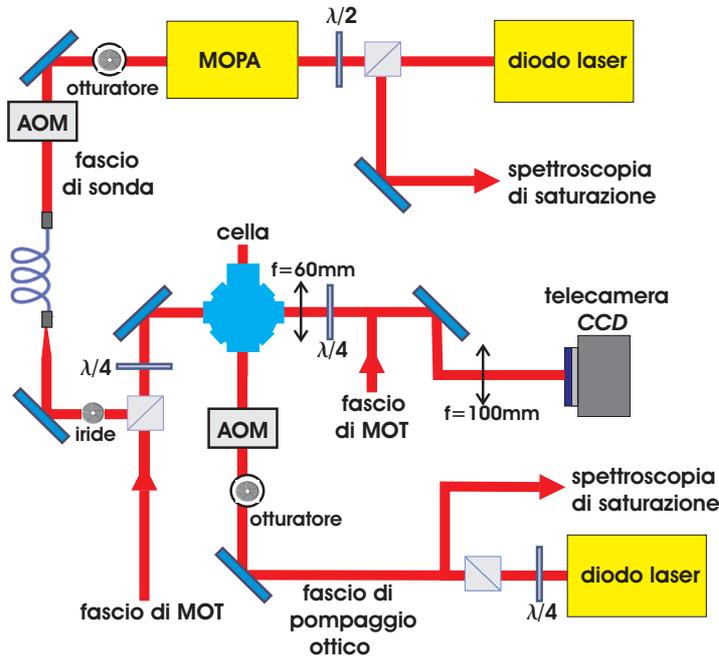


Figura 4.3: Schema del sistema ottico di rivelazione.

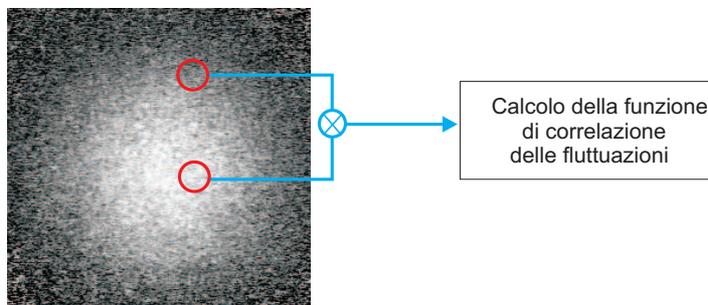


Figura 4.4: Profilo di densità di un gas bosonico nella fase di isolante di Mott dallo 20 ms di espansione dopo lo spegnimento della trappola magnetica e dei reticoli ottici. L'acquisizione di un numero elevato di queste immagini permette di calcolare la correlazione delle fluttuazioni di densità in funzione della separazione \mathbf{d} tra due punti dell'immagine mediante l'espressione in eq.4.8.

stato sovrapposto un reticolo secondario unidimensionale, lungo la direzione y : si è così ottenuto lungo tale direzione un potenziale quasi-disordinato, che induce la rottura della fase ordinata di isolante di Mott. Ricordiamo che i fasci laser dei reticoli sovrapposti hanno lunghezza d'onda non commensurata

($\lambda_1 \simeq 830.3$ nm, $\lambda_2 \simeq 1076.7$ nm), come si è descritto nel § 3.4. I parametri del reticolo principale e le frequenze di confinamento che ne derivano sono invariati rispetto alla configurazione precedentemente descritta. In Fig. 4.2a) è illustrata la configurazione sperimentale ottenuta aggiungendo il reticolo secondario lungo y . Si noti che il sistema gode di simmetrie che si riveleranno utili nel seguito. Nelle Fig. 4.2b) e Fig. 4.2c) sono inoltre rappresentati, rispettivamente, l'andamento del potenziale reticolare bicromatico in funzione della posizione lungo l'asse y ed un istogramma che riporta le differenze di energia fra siti primi-vicini per una configurazione in cui $s_y = 16$ e $s_z = 1$.

Al fine di evidenziare la dipendenza del sistema in esame dalle costanti di accoppiamento fondamentali che emergono dal modello di Bose-Hubbard, sono state effettuate diverse serie di misure cambiando l'altezza dei reticoli lungo y . Le prime serie sono state eseguite variando l'altezza del reticolo secondario e tenendo fissa l'altezza del reticolo principale: in questo modo viene variata il rapporto fra il disordine e l'energia di interazione, ovvero la quantità Δ/U , mentre rimane costante il rapporto fra l'accoppiamento fra siti vicini e l'energia di interazione, cioè J/U . Dopodiché sono state eseguite altre misure in cui si è tenuta fissa l'altezza del reticolo secondario e si è variata l'altezza del reticolo principale lungo y : ciò significa variare J/U tenendo Δ/U circa costante (poiché U dipende debolmente dall'altezza del reticolo principale).

Al fine di osservare la funzione di correlazione di rumore del sistema, è necessario innanzitutto avere a disposizione un ampio numero di immagini del profilo di densità in espansione del gas bosonico che ha interagito con i reticoli ottici.

Il ciclo sperimentale per l'acquisizione di un'immagine si compone dei seguenti passi. Innanzitutto viene effettuato il confinamento e il raffreddamento del campione atomico, per raggiungere lo stadio di degenerazione quantistica e cioè produrre il condensato di Bose-Einstein (§ 3.2). Al termine della fase evaporativa, della durata di 53 s, la trappola magnetica armonica rimane accesa ancora per 1.5 s prima dell'accensione dei reticoli: questo tempo è necessario per garantire lo smorzamento di eventuali eccitazioni del condensato. A ciò segue l'accensione dei reticoli ottici. Si noti che nelle diverse configurazioni sperimentali adottate, l'altezza dei reticoli è sempre sufficientemente elevata da realizzare un sistema fortemente interagente in cui cioè $J/U \ll 1$.

L'accensione dei reticoli deve avvenire lentamente, in maniera adiabatica, perché gli atomi passino con continuità dalla fase superfluida, caratteristica del condensato, al regime di forte interazione che determina la localizzazione nei siti reticolari. Più precisamente, la variazione del potenziale deve essere sufficientemente lenta da connettere in maniera adiabatica il condensato con lo stato fondamentale del sistema atomico nel reticolo ottico. Tale operazione

viene effettuata aumentando l'intensità dei fasci laser dei reticoli da zero fino al valore massimo mediante una rampa esponenziale della durata di 140 ms, e con una costante di tempo $\tau = 30$ ms. A questo punto, quando l'intensità dei reticoli è giunta al valore finale, la nuvola atomica è distribuita nei siti reticolari. Dopo altri 20 ms viene effettuato lo spegnimento dei reticoli, che avviene in modo brusco, in pochi μs , perchè il sistema che poi viene osservato non deve aver compiuto la transizione inversa alla fase superfluida ma deve conservare le caratteristiche peculiari dello stato occupato nel reticolo ottico (essenzialmente, la distribuzione d'impulso).

Contemporaneamente viene anche spento il campo magnetico confinante; tale operazione richiede di variare la corrente che scorre nelle bobine che generano il campo magnetico armonico da 230 A a zero nel minimo tempo possibile, che risulta però limitato inferiormente a ≈ 1 ms a causa dell'induttanza finita delle bobine.

In seguito allo spegnimento dei potenziali confinanti la nuvola atomica espande per 20 ms e viene poi osservata mediante una tecnica di rivelazione in assorbimento, la cui descrizione sarà oggetto del § 4.2. Dal momento che lo spegnimento dei potenziali di confinamento è non adiabatico, ciò che si osserva dopo l'espansione è la distribuzione di impulso che il sistema bosonico aveva nel reticolo ottico. In particolare, il profilo che descrive la distribuzione di densità degli atomi nella fase di isolante di Mott dopo l'espansione è gaussiano sia in direzione y che nel piano $x - z$, anche se non è isotropo nelle diverse direzioni a causa delle diverse altezze dei reticoli.

4.2 La tecnica di rivelazione

La diagnostica degli atomi è effettuata mediante una tecnica di rivelazione in assorbimento: un fascio di luce laser risonante viene diretto sugli atomi, e dopo l'interazione con essi viene rivelato da una telecamera CCD (*Charge Coupled Device*). L'immagine risultante è quella dell'ombra prodotta sul profilo spaziale del fascio dall'assorbimento della luce da parte degli atomi.

Questa è la tecnica più comunemente usata per l'osservazione del condensato di Bose-Einstein, per la facilità di implementazione e perché garantisce un buon rapporto segnale/rumore. Tuttavia, per sua natura, tale metodo di osservazione è distruttivo poiché, a seguito dell'assorbimento ha un notevole riscaldamento del campione; dunque per effettuare più misure è necessario produrre nuovi campioni atomici ripetendo tutto il processo di intrappolamento e di raffreddamento.

L'assorbimento di luce risonante da parte di un gas atomico può essere

descritto mediante la legge di Lambert-Beer

$$dI = -\sigma n I(x) dx \quad (4.1)$$

dove dI è l'attenuazione dell'intensità nel tratto dx del campione atomico, n è la densità numerica e $\sigma = 3\lambda^2/(2\pi)$ è la sezione d'urto di assorbimento, data λ lunghezza d'onda della radiazione assorbita. Integrando sul cammino ottico si ottiene

$$I_t(y, z) = I_0 e^{-\int \sigma n(\mathbf{r}) dx} \quad (4.2)$$

dove I_0 è l'intensità di luce incidente e I_t quella trasmessa.

Dall'assorbimento della luce di analisi si possono ricavare informazioni quantitative sulla densità ottica del campione, data dall'integrale della densità lungo la direzione di propagazione del fascio:

$$O.D. = \int n(\mathbf{r}) dx = -\frac{1}{\sigma} \ln \left(\frac{I_t}{I_0} \right) \quad (4.3)$$

L'immagine finale del campione è in realtà ricavata sperimentalmente da una sequenza di quattro differenti immagini: in primo luogo si rileva l'intensità trasmessa del fascio di sonda dopo l'interazione con gli atomi, $I_t(y, z)$; poi, una volta rimossi gli atomi, si misura l'intensità trasmessa in assenza di assorbimento che corrisponde a $I_0(y, z)$; infine si rileva l'intensità della luce di fondo in due differenti immagini, $I_{d1}(y, z)$ e $I_{d2}(y, z)$, prese nelle stesse condizioni delle prime, ma senza il fascio di sonda. La densità ottica viene quindi calcolata come:

$$O.D. = -\frac{1}{\sigma} \ln \left(\frac{I_t - I_{d1}}{I_0 - I_{d2}} \right) \quad (4.4)$$

La telecamera CCD utilizzata per la rivelazione è una THETA-SYSTEM SIS1-S285/U2 dotata di un sensore Sony ICX285AL, ed è stata installata durante questo lavoro di tesi. Il sensore CCD è mantenuto a temperatura costante da una cella Peltier; le sue caratteristiche sono riportate nella seguente Tabella.

Sensore CCD Sony ICX285AL	
Dimensione dell'immagine	8.98 mm × 6.71 mm
Dimensioni del sensore in pixel	1392 × 1040
Dimensioni di un singolo pixel	6.45 μm × 6.45 μm
Efficienza quantica a 780 nm	> 65%
Corrente di buio a 15°C	2 e ⁻ / pixel / sec
Rumore di lettura	2.5 e ⁻

Tabella2. Caratteristiche del sensore della telecamera CCD.

La peculiarità di questa telecamera è che il sensore è di tipo *interline*, ovvero è costituito da colonne alternate di *pixel*, le une sensibili alla radiazione, le altre oscurate: la raccolta del segnale avviene chiaramente attraverso le colonne di *pixel* sensibili. Se la telecamera è utilizzata in modalità *double-shutter*, il segnale dopo l'acquisizione viene trasferito in tempi inferiori a $1 \mu\text{s}$ sulle colonne di *pixel* oscurati, e le colonne sensibili sono quindi subito pronte alla raccolta di una nuova immagine. Il trasferimento delle due immagini acquisite al calcolatore avviene poi in tempi più lunghi (900 ms). Questa modalità consente dunque l'acquisizione di due immagini differenti separate da un intervallo temporale brevissimo.

Proprio questo ha permesso di effettuare le misure di correlazione delle fluttuazioni di densità degli atomi. È risultato infatti necessario rivelare in rapida successione le due immagini del fascio di sonda in presenza degli atomi $I_t(y, z)$ e in assenza di essi $I_0(y, z)$: se le due immagini sono prese in tempi ravvicinati, è possibile ridurre effetti quali fluttuazioni nell'intensità del fascio di sonda e vibrazioni del sistema ottico, che possono portare ad una cattiva normalizzazione, nell'eq. (4.3), del profilo di intensità $I_0(y, z)$, il quale dovrebbe essere identico nelle due immagini. Le immagini del fondo possono essere acquisite invece dopo un intervallo di tempo più lungo (circa 900 ms), secondo la procedura tipica della modalità di acquisizione standard della telecamera.

La tempistica esatta che regola l'acquisizione delle diverse immagini sarà illustrata più in dettaglio nel § 4.2.1.

In questo esperimento si utilizza come fascio di sonda un fascio laser collimato e diretto lungo l'asse \hat{x} (direzione radiale orizzontale), in modo tale da fornire un'immagine della distribuzione spaziale degli atomi nel piano $y - z$. La durata ($50 \mu\text{s}$) e l'intensità dell'impulso del fascio di sonda sono scelte in modo che l'impulso trasferito durante l'assorbimento non alteri sostanzialmente la distribuzione degli atomi. In particolare l'intensità del fascio di sonda I è sempre molto minore dell'intensità di saturazione I_s della transizione ($I \simeq 0.6 \text{mW/cm}^2$; $I_s = 1.67 \text{mW/cm}^2$) in modo da rimanere in regime di assorbimento lineare.

La luce laser è polarizzata σ^+ ed è risonante con la transizione chiusa fra i livelli di struttura iperfine $|F = 2, m_F = 2\rangle$ dello stato $5^2\text{S}_{1/2}$ e $|F = 3, m_F = 3\rangle$ dello stato $5^2\text{P}_{3/2}$: non è conveniente utilizzare transizioni aperte poiché in tal caso gli atomi dopo pochi cicli ottici decadrebbero in livelli diversi, non assorbenti. poiché inizialmente gli atomi del condensato si trovano nello stato $|F = 1, m_F = -1\rangle$, prima di accendere il fascio di sonda si applica un impulso di luce σ^+ accordata con la transizione fra i livelli $|F = 1, m_F\rangle$ dello stato $5^2\text{S}_{1/2}$ e $|F = 2, m_F\rangle$ dello stato $5^2\text{P}_{3/2}$: questo permette di effettuare il pompaggio ottico degli atomi nel livello $|F = 2, m_F = 2\rangle$.

Il fascio di sonda e di pompaggio sono prodotti da due laser a diodo SANYO DL7140-210 montati in cavità estesa. Ognuno dei due laser è stabilizzato in frequenza in corrispondenza di una specifica transizione del ^{87}Rb rispettivamente a $\lambda_S = 780.032$ nm e $\lambda_P = 780.247$ nm: a tal scopo parte dei fasci in uscita dalle sorgenti viene prelevata (mediante una coppia di ottiche formata da una lamina $\lambda/2$ e un cubo polarizzatore separatore di fascio) e mandata ad una cella contenente vapori di ^{87}Rb , dove si effettua spettroscopia di saturazione. La luce laser usata per il fascio di sonda subisce poi uno stadio di amplificazione operato mediante un amplificatore TOPTICA TA100, comunemente denominato MOPA (*master oscillator power amplifier*). Lo stadio di amplificazione non è in realtà necessario per la procedura di rivelazione, ma per la fase iniziale di raffreddamento laser in cui è utilizzata la stessa sorgente e in cui sono richieste potenze più elevate.

La regolazione dell'accensione e dello spegnimento dei fasci viene effettuata da due otturatori meccanici e da due AOM, i quali ne regolano anche la frequenza. Entrambi i fasci sono poi indirizzati alla cella da vuoto dove si trova il campione atomico; il fascio di sonda, in particolare, si propaga in fibra in quanto il suo allineamento è più critico. All'uscita della fibra è inoltre posta un'iride, la cui funzione è di filtro spaziale.

Dopo la cella è stato posto un sistema di ottiche che proietta sulla telecamera l'immagine del centro della cella dove si trova il campione atomico: si utilizzano due lenti, la prima di focale $f = 60$ mm, la seconda di focale $f' = 100$ mm, come schematicamente illustrato in Fig. 4.3.

4.2.1 Tempistica della rivelazione

Poiché la procedura di rivelazione si è rivelata critica per l'osservazione della correlazione delle fluttuazioni di densità degli atomi, si riporta qui la tempistica di acquisizione delle immagini, che viene stabilita via *software*, e che è stata sottoposta ad ottimizzazione.

La procedura di rivelazione ha inizio con lo spegnimento dei reticoli e del campo magnetico descritto nel § 3.2.3.

Come già detto, l'apertura dei fasci laser necessari alla rivelazione in assorbimento degli atomi è controllata sia da un otturatore meccanico sia da un AOM. Dopo 8 ms dallo spegnimento dei reticoli e del campo magnetico viene dunque comandata l'apertura dell'otturatore meccanico posto sul cammino ottico dei fasci. Si consideri che l'effettiva apertura dell'otturatore avviene dopo alcuni ms: in considerazione di ciò l'accensione effettiva del fascio di ripompaggio, effettuata mediante il modulatore acusto-ottico, è differita di 12 ms e l'immagine viene dunque presa dopo 20 ms di espansione. La durata dell'impulso di ripompaggio è di 250 μs .

A questo punto ha inizio la procedura di acquisizione della prima immagine, ossia quella dell'intensità del fascio di sonda in presenza degli atomi $I_t(y, z)$. Dopo 280 μs dalla fine dell'impulso di ripompaggio viene quindi inviato il segnale di *trigger* alla telecamera, che effettua la procedura di auto-pulitura dei *pixel* dell'*array* CCD, al fine di garantire che la nuova immagine da acquisire venga immagazzinata in *pixel* inizialmente vuoti. Segue l'accensione del fascio di rivelazione, della durata di 50 μs , e durante questo intervallo la telecamera registra l'assorbimento della luce di analisi ad opera della nuvola atomica espansa. In questa fase viene utilizzata solo metà delle colonne di *pixel* disponibili, come illustrato in precedenza.

L'acquisizione della seconda immagine, cioè quella del fascio in assenza di atomi $I_0(y, z)$, avviene dopo un intervallo di 6ms, calcolato in modo tale che gli atomi, continuando ad espandersi, possano nel frattempo cadere al di fuori del diametro del fascio e non essere quindi nuovamente rivelati. A questo punto viene nuovamente inviato il segnale di *trigger* alla telecamera, cosicché l'immagine precedentemente registrata nelle colonne di *pixel* attivi sia traslata nelle colonne oscurate, e ha inizio la seconda acquisizione. poiché si è osservato che l'intensità del fascio di sonda durante l'acquisizione della seconda immagine è sistematicamente minore che nella prima (per effetti termici sugli AOM che determinano una deriva dell'intensità, osservabile solo su intervalli di tempo dell'ordine di diversi ms), per bilanciare questo fenomeno la durata del secondo impulso di sonda è stata fissata a 55 μs .

Infine si ha il trasferimento dell'immagine dalla telecamera al calcolatore su cui è installato il programma di acquisizione e per tale operazione è necessario un intervallo di tempo di 900 ms. A questo punto avviene l'acquisizione delle immagini del fondo $I_{d1}(x, z)$ e $I_{d2}(x, z)$ con una tempistica identica a quella descritta per l'acquisizione della coppia di immagini precedenti, ma con il fascio di sonda spento.

Tutta la tempistica qui illustrata in dettaglio è stata definita in seguito a numerose prove, volte ad ottimizzare l'acquisizione delle diverse immagini necessarie a ricavare il profilo di densità degli atomi.

4.3 Le fonti sperimentali di rumore

Nella rivelazione in assorbimento della distribuzione di densità degli atomi in espansione, si possono individuare diverse fonti di rumore, la cui attenta valutazione è di fondamentale importanza nell'ambito della tecnica di diagnostica Hanbury Brown e Twiss. Tali fonti di rumore sono essenzialmente costituite dalle fluttuazioni della densità atomica - che è il segnale che ci proponiamo di

rivelare- e da altre fonti di rumore dannose alla misura, quali le fluttuazioni sul numero di fotoni e il rumore tecnico del sistema di rivelazione.

Le fluttuazioni nel numero degli atomi (che chiameremo anche rumore atomico di rivelazione), come illustrato nel § 2.2 sono causa dell'aspetto granulare della distribuzione di densità osservata. Analogamente, le fluttuazioni sul numero di fotoni (rumore fotonico) sono legate alla natura quantizzata della radiazione. Infine, il rumore tecnico è dovuto alla corrente di buio e al rumore di lettura della telecamera.

Ai fini della misura di correlazione è molto importante stabilire l'entità relativa di tali contributi, che dipendono fortemente dalle caratteristiche peculiari dell'apparato sperimentale. Si possono fare però alcune considerazioni generali [36]. Se si suppone ad esempio di utilizzare un fascio laser di rivelazione molto intenso, ogni *pixel* della telecamera è illuminato da un gran numero di fotoni N_p , e il rumore fotonico $\Delta N_p = \sqrt{N_p}$ prevalga sul rumore tecnico. Inoltre, definito N_a il numero di atomi rivelati da un *pixel* della telecamera, supponendo che ciascuno di questi atomi assorba un gran numero di fotoni, si può avere che il rumore atomico $\Delta N_a = \sqrt{N_a}$ domini sul rumore fotonico.

In particolare, la misura della funzione di correlazione del rumore di densità richiede, com'è evidente, che il rumore atomico prevalga sulle altre fonti di rumore nella rivelazione in assorbimento.

Il valore medio della densità ottica $O.D.(\mathbf{r})$ (definita nelle eq. (4.3) è connesso il numero di atomi rilevati da un singolo *pixel*, attraverso la relazione:

$$N_a = \frac{\langle O.D.(r) \rangle a_{px}}{\sigma}, \quad (4.5)$$

dove a_{px} è l'area di un *pixel* e σ la sezione d'urto di assorbimento, già definita nel § 4.2. Se le fluttuazioni sul numero di atomi seguono la statistica di Poisson, il rumore relativo su un singolo *pixel* sarà allora dato da

$$\frac{\delta O.D.}{O.D.} = \frac{\delta N_a}{N_a} = \frac{1}{\sqrt{N_a}}, \quad (4.6)$$

dove l'andamento delle fluttuazioni quadratiche medie sul numero di conteggi è legato alla radice del numero stesso di conteggi $\delta N_a \sim \sqrt{N_a}$. L'espressione in eq. (4.6) mostra come le fluttuazioni relative sulla densità ottica aumentino al diminuire del numero degli atomi rivelati su un singolo *pixel*.

Inoltre in [33] si mostra sperimentalmente che anche il segnale di correlazione aumenta di intensità al diminuire del numero di conteggi: risulta pertanto conveniente che il campione atomico sia composto da un numero abbastanza limitato di particelle. Questo argomento è tuttavia valido solo nel caso in cui il rumore tecnico sia pressoché nullo. In caso contrario, avendo un numero limitato di atomi le fluttuazioni di densità sono facilmente superate dalle

altre fonti di rumore. Questo è infatti ciò che avviene nell'esperimento che qui trattiamo, dove permangono delle sorgenti di rumore tecnico difficilmente eliminabili, nonostante i miglioramenti apportati sul sistema di rivelazione (dovute in parte al rumore elettronico e in parte alle fluttuazioni sul sistema ottico che portano a inomogeneità nel fondo dell'immagine). Si osserva infatti che il rumore atomico prevale sul rumore fotonico nelle regioni dell'immagine vicine al centro della nuvola atomica, mentre nelle regioni periferiche con pochi atomi avviene il contrario. Risulta allora opportuno realizzare campioni atomici con un numero relativamente consistente di atomi ($N_{TOT} \simeq 3 \times 10^5$).

Nello specifico, la nuvola di atomi espansi dal reticolo presenta tipicamente una densità ottica massima pari a $O.D = 0.35$, che corrisponde ad avere 350 conteggi al centro dell'immagine in assorbimento¹. Dall'eq. (4.5) si ricava un valore di circa 12 atomi per *pixel*, usando per a_{px} l'area efficace di un *pixel* sul piano coniugato al piano della telecamera (dove sono presenti gli atomi). Tenendo conto del fattore di ingrandimento del sistema ottico che precede la telecamera² la dimensione lineare effettiva di un *pixel* è

$$l = (3.0 \pm 0.1) \mu\text{m}/\text{pixel}. \quad (4.7)$$

Il valore di 12 atomi per *pixel* può essere considerato più che soddisfacente, infatti le fluttuazioni quadratiche medie relative associate alla densità ottica (v. eq. (4.6)) nel caso specifico possono essere stimate come $\approx 350/\sqrt{12} \simeq 100$ conteggi. Risulta quindi che le fluttuazioni sul numero di atomi prevalgono rispetto al rumore di fondo, dovuto al contributo elettronico e fotonico, che sono quantificabili nel nostro caso in ≈ 20 conteggi (rilevati misurando lo scarto quadratico medio dei conteggi nelle regioni dell'immagine lontane dalla nuvola atomica).

4.4 Procedura di analisi di dati

Una volta acquisito un elevato numero di immagini del profilo di densità, è possibile ricavare la funzione di correlazione spaziale normalizzata delle fluttuazioni di densità (v. Fig. 4.4), che è definita come

¹Le immagini sono digitalizzate a 16 bit in modo tale che una densità ottica di 1 corrisponda a 1000 conteggi.

²Il fattore di ingrandimento è stato precedentemente misurato osservando la caduta del condensato sotto l'effetto della gravità, ed eseguendo un *fit* quadratico sulle posizioni del condensato in volo, lasciando come parametro libero l'accelerazione g_{exp} . Il fattore di ingrandimento coincide quindi con il fattore di scala di g_{exp} rispetto all'accelerazione di gravità, il cui valore è noto con grande precisione.

$$C(\mathbf{d}) = \frac{\int d^2x \langle n(\mathbf{x} + \mathbf{d}/2) \cdot n(\mathbf{x} - \mathbf{d}/2) \rangle}{\int d^2x \langle n(\mathbf{x} + \mathbf{d}/2) \rangle \cdot \langle n(\mathbf{x} - \mathbf{d}/2) \rangle}. \quad (4.8)$$

Tale espressione è legata alla probabilità condizionata di trovare due particelle in due punti diversi separati dal vettore \mathbf{d} , mediata su tutte le possibili posizioni e su diverse realizzazioni sperimentali. In eq. (4.8) $n(\mathbf{x})$ è la densità locale ricavata da una singola immagine, mentre il *bracket* $\langle \rangle$ indica la media su diverse realizzazioni del medesimo sistema. Si noti quindi che al numeratore compare la media, su molte repliche del sistema, delle funzioni di autocorrelazione di densità mentre l'espressione a denominatore rappresenta la funzione di autocorrelazione della densità media.

In particolare, la funzione di correlazione viene calcolata su un riquadro dell'immagine di (200×200) *pixel* posizionato intorno al centro della nuvola atomica: come vedremo nel paragrafo dedicato alla discussione dei risultati, questo è il riquadro della dimensione minima che consente di estrarre i segnali di correlazione ai quali siamo interessati. In base alle considerazioni fatte nel precedente paragrafo, si evince infatti che, se il calcolo viene eseguito su un quadrato più grande e si considerano anche regioni dell'immagine lontane dal centro della nuvola, dove il rumore elettronico e fotonico prevalgono sulle fluttuazioni del numero di atomi, il segnale di correlazione risulta attenuato (v. § 4.3).

Si noti che il calcolo della funzione di correlazione definita in base all'eq. (4.8) richiede un notevole sforzo computazionale. In effetti, valutare tale funzione per un singolo valore di \mathbf{d} prevede innanzitutto un'integrazione su 4×10^4 *pixel*, quindi la media su un ampio numero di immagini (si assuma indicativamente 50 per ogni serie di misure), e ciò equivale nel calcolo a 2×10^6 passi. Per ottenere poi la mappatura della funzione di correlazione per tutti le possibili coppie di punti, occorre ripetere tale procedura per un numero di volte pari ancora al numero totale dei *pixel*: complessivamente l'operazione risulterà composta da 8×10^{10} passi. Questa procedura di calcolo della funzione di correlazione su una singola serie di misure richiede un tempo macchina di circa un'ora, facendo eseguire su un processore Intel Core2 Duo un programma dedicato, scritto in linguaggio C.

Tuttavia, sfruttando il teorema di Wiener-Khinchine, è possibile ricavare un'espressione alternativa della funzione di correlazione delle fluttuazioni di densità, che fornisce nella pratica sperimentale un metodo più rapido di analisi dei dati [33].

4.4.1 Il teorema di Wiener-Khinchine

L'uso del teorema di Wiener-Khinchine (v. ad esempio [28]) permette di ricondurre il calcolo della funzione di autocorrelazione delle fluttuazioni al calcolo di trasformate e antitrasformate di Fourier.

Si consideri una variabile soggetta a fluttuazioni stocastiche, sviluppata in integrale di Fourier

$$A(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{A}(k) \exp(2\pi i k x) dk \quad (4.9)$$

dove $\tilde{A}(k)$ è la componente spettrale alla frequenza spaziale k della variabile $A(x)$. Possiamo definire la densità spettrale $G(k)$ mediata su x e su tutte le possibili realizzazioni equivalenti del sistema

$$G(k)dk = \lim_{K \rightarrow +\infty} \frac{2}{K} \left\langle \left| \tilde{A}(k) \right|^2 \right\rangle dk, \quad (4.10)$$

in modo tale che essa soddisfi la seguente relazione:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk G(k) = \left\langle \overline{A(x)^2} \right\rangle \quad (4.11)$$

dove la variabile $A(x)$ è stata mediata sullo spazio degli x e su tutte le possibili repliche del sistema. Dal confronto di tale espressione con quella della funzione di autocorrelazione della variabile $A(x)$, mediata su x e sull'insieme,

$$\hat{C}(d) = \langle A(x)A(x+d) \rangle \quad (4.12)$$

il teorema di Wiener-Khinchine dimostra che la densità dello spettro di potenza in un processo casuale è la trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione del sistema:

$$\hat{C}(d) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(k) \cos(2\pi k x) dk \quad (4.13)$$

Tale teorema è applicabile anche nel nostro caso, tenendo conto che la grandezza stocastica in esame è la densità, soggetta al rumore quantistico di rivelazione, ed è una variabile discreta poiché ricavata da punti sperimentali. Si ottiene pertanto che la funzione di correlazione normalizzata del rumore di densità si può esprimere come

$$C(\mathbf{d}) = \frac{\langle FT^{-1} (|FT n(\mathbf{x})|^2) \rangle}{FT^{-1} (|FT \langle n(\mathbf{x}) \rangle|^2)}, \quad (4.14)$$

dove la media $\langle \rangle$ è fatta sulle diverse immagini acquisite, e dove $FTn(\mathbf{x})$ indica la trasformata di Fourier definita su un insieme discreto, data dall'espressione seguente:

$$FTn(\mathbf{x}) = n(\mathbf{k}) = \sum_{j=0}^{N-1} n(\mathbf{x}_j) \exp\left(\frac{-2i\pi}{N} \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_j\right), \quad (4.15)$$

con N numero totale di punti, e FT^{-1} indica invece l'antitrasformata di Fourier, sempre definita su un insieme discreto.

Per incrementare l'efficienza dell'analisi dei dati in termini di tempo, si è deciso di effettuare il calcolo della trasformata di Fourier discreta mediante un algoritmo *fast Fourier transform* (*FFT*). La *FFT* permette di calcolare in modo rapido la trasformata di Fourier discreta e la sua inversa in quanto riduce il numero delle operazioni aritmetiche necessarie a calcolare la sommatoria da $O(N^2)$ a $O(N \log N)$.

4.4.2 I filtri

Il calcolo della funzione di correlazione mediante l'espressione in eq. (4.14), come anche con l'eq. (4.8), è sensibile alle fluttuazioni del numero totale di atomi da immagine a immagine. Nel nostro apparato sperimentale il numero totale degli atomi nel campione varia di circa il 25% da realizzazione a realizzazione, principalmente a causa di fluttuazioni non controllabili del minimo della trappola magnetica. Queste fluttuazioni nel numero di atomi inficiano la normalizzazione della funzione di correlazione data dal termine al denominatore in eq. (4.14), necessario per rimuovere il profilo gaussiano che la nuvola atomica presente in seguito all'espansione dalla fase isolante. Per una corretta normalizzazione le immagini dovrebbero essere repliche equivalenti dello stesso sistema, dovrebbero cioè presentare in un singolo punto \mathbf{x} solo delle piccole fluttuazioni di densità fra le diverse realizzazioni, centrate intorno al valore della media sull'insieme.

In caso contrario i segnali di correlazione che si vogliono osservare risultano mascherati da un intenso fondo gaussiano, come mostrato in Fig. 4.5a).

Una possibile soluzione al problema può essere data dalla sottrazione dei rispettivi *fit* gaussiani dalle singole immagini in assorbimento. In tal caso il calcolo della funzione di correlazione deve essere poi eseguito sui residui dei *fit*: ciò dovrebbe, in linea di principio, eliminare l'effetto delle fluttuazioni sul numero totale di atomi.

Questa procedura tuttavia non è più efficace se il profilo di densità della singola immagine non è ben descritto da una gaussiana. In particolare ciò si verifica per valori intermedi dell'altezza del reticolo principale, cioè quando

l'energia di interazione su singolo sito supera l'accoppiamento fra siti primiviciini ma il loro rapporto è un numero finito ($U/J \gtrsim 1$). In tal caso il sistema è costituito da regioni superfluide alternate a regioni in fase di isolante di Mott, come discusso nel § 1.2: il profilo di densità in assorbimento dopo l'espansione sarà quindi dato dall'involuppo della gaussiana, dato dal contributo degli atomi in fase di Mott, con il profilo di interferenza dovuto alla frazione superfluida. Per questa ragione la sottrazione dei *fit* gaussiani dalle singole immagini in assorbimento dà luogo a dei residui che in alcune regioni si discostano in maniera sistematica dallo zero: ciò comporta il persistere di un fondo modulato sull'immagine di correlazione dei residui, come rappresentato in Fig. 4.5b). Nonostante ciò, iniziano ad emergere, rispetto al fondo dell'immagine, delle strutture su scala spaziale più piccola, corrispondenti a segnali fisici di correlazione.

Viceversa, la soluzione che si è rivelata ottimale è l'applicazione di un filtro direttamente sull'immagine della correlazione di rumore. Il filtro in questione, definito sullo spazio dei vettori d'onda (reciproco dello spazio reale), è un passa-alto, comunemente applicato per i segnali elettrici e ivi denominato *Butterworth*, la cui forma è definita dalla seguente espressione, che rappresenta il coefficiente di trasmissione del segnale nello spazio dei vettori d'onda:

$$F(k) = \frac{1}{1 + (k_C/k)^\alpha} \quad (4.16)$$

dove α è la pendenza del filtro (che chiameremo anche ordine del filtro) e $k_C = 2\pi n_C/L$ è la frequenza di taglio, con L dimensione dell'immagine e n_C indice intero. Data l'analogia con i filtri usati in elettronica, nel corso di questo paragrafo per semplicità ci riferiremo ai vettori d'onda anche come frequenze spaziali.

Com'è intuitivo, l'attenuazione delle componenti di frequenza spaziale bassa, effettuata mediante il filtro, corrisponde, nello spazio reale delle posizioni, ad una soppressione delle modulazioni a lungo raggio. Pertanto, con un'adeguata scelta dei parametri k_C e α , un filtro così fatto è in grado di eliminare il fondo gaussiano, lentamente variabile su una scala di molte decine *pixel* (ciascuno dei quali, come già detto, ha una dimensione efficace di $6.45 \mu\text{m}$), mentre non attenua i picchi di correlazione, visibili sulla scala di qualche *pixel*.

Nello specifico, perché il filtro sia applicabile sullo spazio delle posizioni, sul quale la funzione di correlazione del rumore di densità $C(\mathbf{d})$ è definita (eq. (4.14)), è necessario effettuare la seguente procedura. Innanzitutto si calcola la trasformata di Fourier della funzione di correlazione, per ottenere una funzione definita sullo spazio dei vettori d'onda, su questa si applica quindi il filtro mediante una moltiplicazione della trasformata per l'espressione in eq. (4.5), infine si calcola l'antitrasformata della funzione così ottenuta. In

questo modo si sono ottenute immagini in cui i picchi di correlazione sono ben visibili, come in Fig. 4.5c).

Per ottenere la massima visibilità dei picchi di correlazione, la procedura di applicazione del filtro è stata sottoposta ad ottimizzazione, in relazione ai due parametri k_C e α , come mostrato in Fig. 4.5d). Come si può osservare, la scelta di una frequenza di taglio troppo piccola ($k_C \lesssim 4 \times (2\pi/L) \text{ pixel}^{-1}$) comporta il persistere delle frange di modulazione che degradano la visibilità dei picchi di correlazione; viceversa una frequenza di taglio troppo alta ($k_C \gtrsim 10 \times (2\pi/L) \text{ pixel}^{-1}$) induce la sparizione dei picchi stessi. Per ottenere un filtro efficiente, è inoltre necessario scegliere un valore di α sufficientemente elevato, tenendo però conto che l'aumento dell'ordine di filtraggio induce la comparsa di artefatti: si noti in particolare l'anello scuro che circonda il picco centrale, presente per $\alpha \gtrsim 3$. In base all'ottimizzazione svolta, si sono dunque scelti i seguenti valori dei parametri: $\alpha = 6$ e $k_C = 6 \times (2\pi/L) \text{ pixel}^{-1}$. Ciò corrisponde ad eliminare nello spazio reale le modulazioni di lunghezza d'onda maggiore di $d_C = 2\pi/k_C$, ovvero $\simeq 33 \text{ pixel} = 215 \text{ }\mu\text{m}$.

4.4.3 Simmetrie delle immagini della correlazione di rumore

Mostriamo adesso come le proprietà di simmetria della funzione di correlazione delle fluttuazioni possano essere sfruttate nell'elaborazione delle immagini per migliorare il rapporto segnale-rumore.

Innanzitutto, in base alla definizione della funzione di correlazione $C(\mathbf{d})$ data in eq. (4.14), notiamo come essa esibisca una simmetria per inversione spaziale delle coordinate: lo scambio $\mathbf{d} \rightarrow -\mathbf{d}$ lascia infatti invariata tale funzione. Si consideri quindi di dividere tale immagine in quattro quadranti: solo due di essi risultano significativi.

A ciò si aggiunge una simmetria ulteriore: dal momento che gli assi del reticolo ottico sono tra loro ortogonali e due di essi sono paralleli ai lati dell'*array* CCD, il sistema è naturalmente invariante per inversione $z \rightarrow -z$ e $y \rightarrow -y$, e di conseguenza anche la sua funzione di correlazione. Per questo motivo, l'immagine di correlazione presenta essenzialmente un unico quadrante significativo.

Sulla base di queste considerazioni, risulta pertanto giustificato eseguire su ciascuna immagine di correlazione un'operazione di ribaltamento $y \rightarrow -y$ e successivamente una media fra l'immagine originale e la sua simmetrica. Tale procedura è vantaggiosa in quanto produce un aumento del rapporto segnale-rumore, e dunque della visibilità dei picchi di correlazione. In Fig. 4.6 sono riportate due elaborazioni della funzione di correlazione delle fluttuazioni, la

prima delle quali è ricavata secondo l'espressione in eq. (4.14), applicando in aggiunta solo il filtro illustrato nel § 4.4.2, mentre la seconda è ottenuta applicando il filtro ed eseguendo l'operazione di ribaltamento e media qui descritti.

4.4.4 Selezione delle immagini

Aspetti critici per il calcolo della funzione di correlazione di rumore si sono rivelati lo spostamento del centro del profilo gaussiano degli atomi espansi e la presenza di disomogeneità del fondo delle singole immagini in assorbimento, che inducono la comparsa di strisce orizzontali e verticali sull'immagine di correlazione, come mostrato in Fig. 4.7. In particolare la striscia orizzontale altera la visibilità del segnale di correlazione sull'asse y , su cui ci si attende di osservare l'effetto del disordine, essendo questa la direzione lungo la quale verrà posto il reticolo bicromatico. Per questo motivo le immagini in assorbimento che presentano simili fenomeni sono state escluse dalla successiva analisi.

Per quanto riguarda il primo aspetto, ovvero lo spostamento del centro della nuvola atomica, esso è probabilmente legato a fluttuazioni non controllabili sul tempo di spegnimento della trappola magnetica in cui gli atomi sono inizialmente confinati. Al fine di eliminare gli artefatti in Fig. 4.7 e di ottimizzare la visibilità del segnale di correlazione, si è stabilito di comprendere nell'analisi di ogni serie di misure solo le immagini in cui tale spostamento cadesse entro ± 2 *pixel* dalla posizione media calcolata sulla serie. Ciò comporta l'eliminazione di circa il 25% delle immagini da ciascuna serie.

L'omogeneità del fondo delle singole immagini in assorbimento si è rivelata un secondo requisito importante per l'osservazione della funzione di correlazione. Le disuniformità possono essere rivelate dall'osservazione diretta delle immagini di assorbimento, lontano dalla regione occupata degli atomi: in Fig. 4.7c) è rappresentata a titolo d'esempio un'immagine che manifesta evidenti disomogeneità. Per effettuare però un'analisi quantitativa si è scelto di considerare lo scarto quadratico medio σ dei conteggi, calcolato su una cornice quadrata dello spessore di 2 *pixel* e di lato 300 *pixel* (quindi più grande della nuvola atomica): $\sigma = \sqrt{\langle s^2 \rangle - \langle s \rangle^2}$, dove s è il numero di conteggi su un singolo *pixel*. Mentre l'intervallo tipico dei valori assunti da σ sulle immagini con fondo omogeneo è centrato intorno ai 25 – 35 conteggi, le immagini con un fondo disomogeneo presentano un valore di σ intorno ai 50 conteggi. È stato quindi scelto come discriminante il valore di 35 conteggi, oltre il quale rigettare le immagini.

4.4.5 Il programma di elaborazione dei dati

L'elaborazione delle immagini del profilo di densità degli atomi per il calcolo della funzione di correlazione di rumore è stata effettuata mediante un programma scritto in linguaggio C.

La funzione principale richiama diverse altre funzioni, la prima delle quali prende in entrata un *file* di testo, strutturato in modo da riassumere le principali informazioni inerenti una singola serie di immagini: il numero totale di immagini, il nome e il percorso del *file* sul quale ognuna è salvata e il centro del profilo gaussiano della nuvola atomica in ogni immagine. La lista dei centri è prodotta da un secondo programma di supporto, che legge i *files* contenenti le immagini, effettua un *fit* gaussiano e registra le informazioni.

La seconda funzione richiamata effettua l'inizializzazione cioè alloca la memoria necessaria per contenere le singole immagini di assorbimento, l'immagine data dalla loro media, e l'immagine della correlazione, tutte rappresentate da numeri in doppia precisione.

Segue una funzione che effettua l'analisi del fondo: essa calcola la varianza dei conteggi su una cornice di ogni immagine dello spessore di 2pixel come illustrato nel § 4.4.4.

A questo punto si richiama la funzione che calcola la correlazione delle immagini, secondo una procedura che ricalca l'espressione in eq. (4.14), nella quale compare la trasformata di Fourier discreta. Segue l'applicazione del filtro che è effettuata, come già illustrato nel § 4.4.2, eseguendo la trasformata di Fourier della funzione di correlazione, moltiplicando per la funzione di attenuazione e effettuando l'antitrasformata.

Tutte le trasformate di Fourier necessarie al calcolo sono eseguite mediante l'algoritmo FFT contenuto nella libreria *FFTW* versione 3.1.2 reperita attraverso il sito www.fftw.org.

4.5 Risultati sperimentali

La tecnica di elaborazione delle immagini, fin qui illustrata, ha permesso di calcolare la funzione di correlazione delle fluttuazioni di densità nel nostro sistema.

4.5.1 Considerazioni sulla correlazione nella fase di Mott

In primo luogo si è osservata la funzione di correlazione su un sistema bosonico in fase di isolante di Mott. Tale sistema, come descritto nel § 4.1, è stato ottenuto caricando un condensato di Bose-Einstein in un reticolo ottico tridi-

mensionale formato da tre coppie ortogonali di fasci laser contropropaganti, le cui altezze sono rispettivamente $s_{x,z} = 40$ e $s_y = 16$.

La misura della funzione di correlazione su un sistema in fase di Mott è già stata eseguita in [33], e ciò ha permesso di verificare, nelle fasi preliminari della misura, l'efficacia della tecnica diagnostica implementata.

Il risultato ottenuto sperimentalmente è mostrato in Fig. 4.8a). L'immagine mostra dei picchi di correlazione positivi a distanze regolari, che rivelano l'ordine dei bosoni confinati nel reticolo prima dell'espansione e della rivelazione. Si noti che, oltre al picco centrale che corrisponde a $d = 0$, sono ben evidenti quattro picchi laterali "primi-vicini" posti agli esterni della mediana dei lati dell'immagine, e sono inoltre abbastanza visibili i picchi diagonali "secondi-vicini". In seguito all'operazione di ribaltamento e media dell'immagine, lecita in base alle simmetrie esibite dal sistema, e che è stata descritta nel § 4.4.3, i picchi visibili nelle immagini sono simmetrici rispetto allo scambio $y \rightarrow -y$ e $z \rightarrow -z$. Ricordiamo che l'anello nero centrale è un artefatto introdotto dal filtro passa-alto, necessario per rendere visibili i picchi di correlazione.

L'analisi dell'immagine è stata effettuata selezionando innanzitutto un rettangolo di dimensioni 190×10 *pixel* centrato in $y = 0$ e sul valore di z corrispondente alla posizione dei picchi nella parte alta dell'immagine (v. Fig. 4.8a)). In Fig. 4.8b) è riportato il segnale ottenuto integrando la funzione di correlazione di rumore lungo la direzione z di questo rettangolo: sul profilo dell'integrale così definito, $\tilde{C}(y)$, si è eseguito il *fit* con una funzione composta dalla somma di tre gaussiane centrate sui singoli picchi, e da un fondo gaussiano che tiene conto dell'effetto di una modulazione residua indotta dal filtro (l'analisi non è stata effettuata lungo l'asse $z = 0$ perché qui gli artefatti risultano ben più evidenti).

Dal risultato del *fit* si è quindi ricavata la distanza dal centro dei picchi laterali, simmetrici rispetto all'asse y , che vale

$$d_1 = (82.53 \pm 0.14) \text{ pixel} = (248 \pm 9) \mu\text{m}. \quad (4.17)$$

L'errore sulla misura espressa in *pixel* è fornito dal *fit*. L'errore relativo sulla misura espressa in μm comprende anche l'incertezza sulla dimensione efficace del *pixel* dovuta all'ingrandimento del sistema ottico, il cui valore è riportato in (4.7).

Dalla teoria presentata nel § 2.3 risulta che la distanza fra questi picchi è legata alla periodicità del reticolo ed è data da

$$\tilde{d}_1 = 2\hbar k_1 t_{esp}/m, \quad (4.18)$$

dove k_1 è il vettore d'onda della radiazione laser che costituisce il reticolo. Nel nostro caso ci aspettiamo

$$\tilde{d}_1 = (227 \pm 6) \mu\text{m}, \quad (4.19)$$

avendo considerato che la lunghezza d'onda $\lambda_1 = 2\pi/k_1$ é pari a (830.32 ± 0.01) nm e il tempo di espansione é $t_{esp} = (20.5 \pm 0.5)$ ms, ed avendo effettuato la propagazione degli errori relativi.

Il valore ricavato sperimentalmente, riportato in (4.17), e il valore teorico, in (4.19), non coincidono entro le barre di errore, e ciò é probabilmente dovuto a una sottostima dell'errore sul tempo di espansione, essenzialmente legato a fluttuazioni poco controllabili sul tempo di spegnimento del campo magnetico confinante o ad una sottostima dell'errore sull'ingrandimento del sistema ottico di rivelazione. Si noti tuttavia che lo scarto é compreso entro un intervallo pari a due volte l'errore su \tilde{d}_1 .

4.5.2 Correlazione di atomi in un reticolo quasi-disordinato: rottura della fase di Mott

Il risultato piú importante e originale ottenuto in questo lavoro di tesi é lo studio della correlazione su un sistema quasi-disordinato. La tecnica diagnostica precedentemente descritta é stata infatti applicata per indagare il sistema illustrato nel § 4.1, dove si verifica la rottura controllata della fase di isolante di Mott. Come già detto, ciò si ottiene sovrapponendo alla direzione y del reticolo principale, un secondo reticolo di lunghezza d'onda incommensurata rispetto al primo.

Il calcolo della funzione di correlazione su questo sistema ha mostrato la nascita di nuovi picchi lungo la direzione y (corrispondente all'asse orizzontale, nelle immagini), che nel seguito chiameremo picchi secondari.

Anche in questo caso, a causa delle simmetrie del sistema, l'immagine presenta un unico quadrante significativo. poiché é stata effettuata l'operazione di ribaltamento e media descritta nel § 4.4.3, i picchi visibili nelle immagini sono simmetrici rispetto allo scambio $y \rightarrow -y$ e $z \rightarrow -z$.

Per un sistema in cui l'altezza del reticolo secondario é $s_2 = 9$, mentre l'altezza del reticolo principale lungo la direzione y é $s_y = 16$ e nelle altre direzioni $s_{x,z} = 40$, sia i picchi di correlazione principali sia i secondari sono ben visibili, come mostra la Fig. 4.9a). Su tale sistema é stato quindi eseguito un *fit* del profilo di correlazione lungo l'asse y , in modo analogo a quello descritto nel § 4.5.1, con sette gaussiane che descrivono i picchi di correlazione piú un fondo gaussiano aggiuntivo. Dal risultato del *fit* (v. Fig. 4.9b)) si é ricavata la distanza dal centro del picco principale, che risulta

$$d_1 = (82.69 \pm 0.09) \text{ pixel} = (248 \pm 9) \mu\text{m}, \quad (4.20)$$

e dei picchi secondari

$$d_2 = (63.54 \pm 0.15) \text{ pixel} = (191 \pm 7) \mu\text{m}, \quad (4.21)$$

$$d_3 = (18.97 \pm 0.09) \text{ pixel} = (57 \pm 2) \mu\text{m}.$$

dove l'errore sulla misura é valutato come descritto in precedenza.

Dal confronto con la teoria presentata nel § 2.3, il valore previsto della distanza dal centro del picco legato alla periodicit  del reticolo secondario, analogamente al caso precedente, é data da

$$\tilde{d}_2 = 2\hbar k_2 t_{esp}/m, \quad (4.22)$$

dove k_2 é il vettore d'onda della radiazione laser che costituisce il secondo reticolo. Ci  corrisponde, nel caso specifico, a

$$\tilde{d}_2 = (175 \pm 4) \mu\text{m}, \quad (4.23)$$

in cui si é considerato che la lunghezza d'onda del secondo reticolo $\lambda_2 = 2\pi/k_2$ é pari a $(1076.7 \pm 0.1)\text{nm}$. In base alle medesime considerazioni, é inoltre prevista la comparsa di un picco legato al battimento fra le lunghezze d'onda dei due reticoli, in corrispondenza di

$$\tilde{d}_3 = 2\hbar(k_1 - k_2)t_{esp}/m,$$

ovvero, nel caso specifico,

$$\tilde{d}_3 = (51.9 \pm 1.3) \mu\text{m}. \quad (4.24)$$

Come si pu  osservare, la distanza del picco principale cade entro un intervallo pari a due volte l'errore sul valore teorico, mentre la distanza del picco secondario e del picco legato al battimento cade entro tre volte l'errore sul valore teorico, e ci  é probabilmente dovuto a una sottostima dell'errore sul tempo di espansione degli atomi dalla trappola o da una sottostima dell'errore sull'ingrandimento del sistema ottico di rivelazione.

Al fine di caratterizzare adeguatamente la nascita di questi nuovi picchi, si sono eseguite diverse serie di misure in cui si é variata, dall'una all'altra, l'altezza del reticolo secondario s_2 , mantenendo fissa l'altezza del reticolo principale lungo y e lungo le altre direzioni. L'intervallo di altezze s_2 che é stato oggetto dell'indagine sperimentale é $s_2 = 0 \div 9$, limitato superiormente dalla potenza laser disponibile per realizzare il reticolo del secondo colore.

In particolare, variare l'altezza del reticolo s_2 tenendo costante l'altezza del reticolo principale significa indurre una variazione sulla scala del disordine Δ che descrive l'offset di energia variabile da sito a sito (v. § 1.3.2), rispetto alla scala dell'energia di interazione su singolo sito U (definita nel § 1.1) che rimane praticamente inalterata.

Al variare del disordine, si é dunque studiata l'altezza dei picchi di correlazione secondari: la loro comparsa é stata osservata in corrispondenza di

$s_2 = 2.5$, e il progressivo aumento della loro ampiezza é strettamente legato all'aumento dell'intensità del secondo reticolo, e quindi del disordine.

In Fig. 4.10 sono rappresentate, per varie altezze del reticolo secondario, le immagini del profilo di densità degli atomi rivelato in assorbimento e le funzioni di correlazione, ciascuna delle quali é ottenuta da una serie di immagini in assorbimento ricavate su realizzazioni equivalenti dello stesso sistema. Si noti che il profilo di densità non cambia sensibilmente al variare dell'altezza del reticolo secondario, mentre le funzioni di correlazione risultano molto diverse. In corrispondenza di $s_2 = 0$ sono visibili unicamente i picchi di correlazione legati alla periodicità del reticolo principale. Il sistema si trova in fase di Mott. Ad $s_2 = 2.5$ iniziano a delinearsi i picchi di correlazione secondari, che risultano ben visibili per $s_2 = 5$. In corrispondenza di $s_2 = 9$, massimo valore realizzabile sperimentalmente con il nostro apparato, si osservano anche dei picchi di correlazione ulteriori, evidenziati in figura con un cerchio, posti a distanza $d_3 \approx 2\hbar(k_2 - k_1)t_{esp}/m$ e quindi legati al battimento fra le lunghezze d'onda dei due reticoli sovrapposti. A causa del rumore di fondo non é stato quindi possibile effettuare una caratterizzazione sistematica di tali picchi.

Per ciascuna immagine di correlazione é stata eseguita un'analisi quantitativa dell'ampiezza dei picchi secondari e di quella dei picchi principali. Tale analisi non é stata eseguita mediante un *fit* gaussiano in quanto per valori bassi di s_2 , cioè quando l'effetto del secondo reticolo é poco rilevante, i picchi secondari non sono nettamente delineati rispetto al rumore di fondo. Per eseguire l'analisi in maniera uniforme su tutte le immagini, l'osservabile fisica che si é considerata é l'altezza di ciascun picco di correlazione.

Tale altezza é stata ricavata come media $\overline{N_s}$ dei conteggi³ su un quadrato di lato 5 *pixel* (a cui corrisponde un'area efficace $a_s \simeq 225 \mu\text{m}^2$) centrato sul picco; a questo numero di conteggi é stata sottratta la media $\overline{N_f}$ dei conteggi del fondo, ricavata su un rettangolo di area $a_f = 15 \times 60 \text{ pixel}^2 (\simeq 8 \times 10^4 \mu\text{m}^2)$ lontano dai picchi: l'errore é complessivamente dato dalla somma delle deviazioni standard della media dei conteggi di ciascun riquadro. Inoltre é stato ricavato il rapporto fra i conteggi del picco secondario e del picco principale.

In Fig. 4.11a) sono riportati gli andamenti sperimentali dell'altezza del picco principale e di quella del picco secondario (definite come appena descritto), in funzione dell'altezza del reticolo secondario, che introduce il dis-

³La scala di intensità della funzione di correlazione non é univocamente definita. In ciascuna immagine in assorbimento é presente un offset diverso da zero, per evitare divergenze nel calcolo dovute a *pixel* con zero conteggi. Durante l'analisi dei dati si é verificato che l'offset sulle immagini in assorbimento equivale ad un fattore di scala sulla funzione di correlazione ridotta $C(\mathbf{d}) - 1$. Questo però non influenza né la forma della funzione di correlazione né l'altezza relativa dei picchi. Nel seguito il segnale di correlazione verrà espresso genericamente in conteggi.

ordine nel sistema. All'aumentare dell'altezza del secondo reticolo, l'altezza del picco principale diminuisce mentre quella del picco secondario aumenta. In Fig. 4.11b) é riportato invece l'andamento del rapporto fra il picco secondario e il picco principale di correlazione, sempre in funzione dell'altezza del secondo reticolo responsabile del disordine. Tale grandezza é più significativa, in quanto non risente in alcun modo di eventuali errori sistematici introdotti nell'esperimento, da cui invece possono essere affette le misure dell'altezza dei singoli picchi di correlazione.

Ogni punto in Fig. 4.11 é la media pesata di $5 \div 6$ valori ricavati sperimentalmente, ognuno dei quali é ottenuto dal calcolo della funzione di correlazione su una serie di $50 \div 100$ immagini in assorbimento che sono realizzazioni equivalenti dello stesso sistema.

Le barre di errore orizzontali sono dovute alle fluttuazioni in intensità del laser che produce i fasci del secondo reticolo, quantificate come il 10% dell'intensità totale.

L'indagine sperimentale é stata poi estesa all'analisi della dipendenza del sistema dal parametro J_y , che quantifica l'accoppiamento degli atomi fra siti reticolari vicini lungo la direzione y . A tal fine é stata effettuata un'osservazione sistematica della funzione di correlazione del sistema per diversi valori dell'altezza del reticolo principale lungo la direzione y , dove é presente il disordine, compresi nell'intervallo⁴ fra $s_y = 8$ e $s_y = 16$. La variazione di s_y in linea di principio modifica sia J_y sia U , ma come si osserva nelle eq. (1.7) e (1.8) la dipendenza di J dall'altezza del reticolo é di tipo esponenziale, mentre U dipende da essa attraverso una legge di potenza, dunque per piccole variazioni di s_y l'energia di interazione su singolo sito U resta circa costante⁵.

Nell'ambito di queste serie di misure l'altezza del reticolo secondario non é stata variata, in modo da fissare la scala di energia del disordine Δ : in particolare, il valore scelto é stato $s_2 = 4$, in corrispondenza del quale sono già visibili i picchi secondari di correlazione, come mostrato in Fig. 4.11. Anche le altezze dei reticoli x e z sono state mantenute costanti, ai valori già utilizzati $s_{x,z} = 40$.

Come in precedenza, per ogni valore dei parametri, sono state effettuate $5 \div 6$ serie di misure, ognuna delle quali consta di $50 \div 100$ immagini; ciascuna serie ha dato poi luogo ad una immagine di correlazione. Le osservabili fisiche prese in esame sono state, ancora una volta, il numero di conteggi sul picco secondario e principale e il rapporto fra i due.

⁴La transizione da superfluido a isolante di Mott con $s_{x,z} = 40$ si ha in corrispondenza di $s_y \simeq 6$.

⁵Questa affermazione é ancor più giustificata tenendo conto del fatto che, per altezze diverse del reticolo nelle tre direzioni, l'altezza efficace s da includere nella eq. (1.8) per il calcolo di U é la media geometrica $(s_x s_y s_z)^{1/3}$.

Il risultato ottenuto é illustrato in Fig. 4.12: nel grafico in Fig. 4.12a) é riportato il segnale di correlazione del picco secondario e del picco principale, espressi in unità arbitrarie, e in Fig. 4.12b) il loro rapporto, in funzione dell'altezza del reticolo principale lungo y . Le barre di errore sono state ricavate come illustrato in precedenza per i grafici in Fig. 4.11.

4.6 Confronto con le simulazioni

Si presenta qui il confronto dei risultati sperimentali con quelli ottenuti con una simulazione teorica, eseguita sulla base del modello di Bose-Hubbard.

Tale simulazione é stata effettuata partendo dalla considerazione che, in un'approssimazione all'ordine zero, un gas bosonico in un reticolo ottico in regime di forte interazione può essere trattato nel limite in cui l'accoppiamento fra siti vicini sia completamente trascurabile rispetto all'energia di interazione di due atomi in un singolo sito, supponendo cioè che $U/J \rightarrow \infty$. In questo limite, l'Hamiltoniana di Bose-Hubbard risulta diagonale sugli stati di Fock locali, autostati del numero di occupazione di un singolo sito, come già illustrato in eq. (1.10).

Nel caso specifico del nostro sistema sperimentale, il *tunneling* nel piano $x - z$ é effettivamente del tutto trascurabile, dato che le altezze del reticolo principale nelle due direzioni ortogonali di questo piano sono $s_{x,z} = 40$: il rapporto $U/J \simeq 7 \times 10^3$. In direzione y invece, se si considera la configurazione sperimentale in cui l'altezza del reticolo principale é $s_y = 16$, il valore del rapporto U/J vale $\simeq 1.5 \times 10^2$, pertanto l'ipotesi effettuata risulta ancora una buona approssimazione.

Sulla base di queste considerazioni, si é simulato un sistema di taglia finita costituito da $N = 3 \times 10^5$ atomi, soggetti ad un potenziale periodico tridimensionale, imponendo che il *tunneling* fra sito e sito sia completamente assente in tutte le direzioni. Il sistema si presenta complessivamente come una matrice di atomi posti sui nodi di un reticolo cubico tridimensionale.

La simulazione consiste nel calcolo dell'occupazione dei siti reticolari che minimizza l'energia totale del sistema.

La prima parte della simulazione riguarda un sistema costituito da un numero finito di atomi in un reticolo tridimensionale ordinato (di periodicità $\lambda = 830.32$ nm), in presenza di un potenziale aggiuntivo armonico confinante, come quello analizzato nel § 1.3.1, con frequenze di trappola $\omega_{x,z} = 110$ Hz e $\omega_y = 79$ Hz. Si noti che i valori scelti per la simulazione ricalcano i parametri dell'esperimento.

Imponendo $J = 0$ lo stato fondamentale del sistema assume naturalmente la forma di un isolante di Mott: l'occupazione dei siti può essere calcolata

partendo da un reticolo vuoto e disponendo un atomo alla volta nei siti che portano all'aumento minimo dell'energia totale. Più precisamente, se si considera un singolo atomo, esso si dispone in un sito reticolare corrispondente al minimo della trappola armonica; l'aggiunta di un eventuale secondo atomo in quel sito comporterà un incremento dell'energia pari a U . Aumentando progressivamente il numero di atomi, essi tendono a disporsi in prossimità del minimo del potenziale esterno, uno in ciascun sito reticolare. Oltre un certo numero di atomi tuttavia risulta poco conveniente, dal punto di vista dell'energia totale del sistema, realizzare l'occupazione di ulteriori siti sempre più lontani dal minimo della trappola armonica: la configurazione che minimizza l'energia totale prevede invece un'occupazione multipla dei siti prossimi al minimo del potenziale addizionale. L'occupazione dei siti che minimizza l'energia totale è illustrata in Fig. 4.13a) per $s_2 = 0$.

La seconda parte della simulazione rende conto degli effetti dell'introduzione del disordine: il sistema esaminato è un insieme di particelle in un potenziale quasi-periodico, risultante dalla sovrapposizione di due potenziali periodici che ricalcano i parametri dell'esperimento ($\lambda_1 = 830.32$ nm, $\lambda_2 = 1076.7$ nm), a cui si aggiunge il confinamento armonico esterno prima illustrato. La simulazione è stata eseguita in corrispondenza di diversi valori dell'altezza del potenziale che induce il disordine s_2 . Si riportano in Fig. 4.13 i risultati ottenuti per $s_2 = 0, 2, 5, 9$: l'introduzione del disordine distrugge la fase ordinata di Mott, e induce lo sgretolamento della struttura a gradini delineata dal profilo di occupazione dei siti reticolari. In Fig. 4.13a) è rappresentato il diagramma dell'occupazione dei siti reticolari lungo la direzione y , ottenuta prendendo in esame la fila centrale degli atomi, denotata da $x = 0$ e $z = 0$. Nelle Fig. 4.13b) e c) è invece riportata la funzione di correlazione che si ottiene dallo stato prodotto dalla teoria utilizzando l'eq. (2.17): in b) è raffigurata la mappatura la funzione di correlazione sul piano $y - z$ e in c) il profilo dei picchi di correlazione lungo l'asse y (sul quale viene introdotto il disordine). Si noti che la scala in ascissa ai grafici in c) è in unità $2h/(m\lambda)t_{esp}$.

In Fig. 4.14, infine, si confronta il rapporto fra i picchi di correlazione ricavati dalla simulazione numerica e il risultato dell'esperimento per $s_y = 16$. La curva tratteggiata rappresenta il risultato della simulazione eseguita per un sistema costituito da 3×10^5 atomi. Si noti che tale curva, essendo ricavata da una simulazione numerica che ricalca i parametri sperimentali, non ha parametri liberi. Inoltre, poiché il numero totale degli atomi varia sperimentalmente da una realizzazione del sistema all'altra, e le fluttuazioni giungono al 25% del numero totale, è risultato necessario riferirsi non ad una sola curva ma ad un insieme di curve ottenute dalla simulazione per diversi valori del numero di atomi: l'insieme di tali curve è rappresentato in figura dalla regione eviden-

ziata in grigio. Il grafico in Fig. 4.14 mostra un buon accordo fra i risultati sperimentali e quelli della simulazione numerica. Se ne deduce che le misure sperimentali ottenuti con $s_y = 16$ sono descritte con buona approssimazione da un modello in cui il *tunneling* J sia trascurabile. I risultati mostrati in Fig. 4.12 mostrano però anche un andamento in funzione di s_y che non può essere descritto dal modello a $J = 0$. Per valutare quantitativamente gli effetti dell'accoppiamento fra siti reticolari vicini, sono in corso alcune simulazioni numeriche su sistemi con J finito [65, 66].

In conclusione, lo studio sperimentale e la simulazione numerica della funzione di correlazione di rumore in densità hanno permesso di evidenziare le caratteristiche peculiari di un sistema disordinato, rispetto alla fase di Mott. In un sistema in fase di Mott, realizzato in presenza di un reticolo ordinato, la funzione di correlazione esibisce infatti dei picchi di correlazione solo in corrispondenza della periodicità del reticolo stesso, ovvero dei minimi del potenziale che gli atomi sperimentano. Per un sistema in cui sia stato introdotto del disordine, invece, la funzione di correlazione del sistema esibisce nuovi picchi legati alla periodicità del secondo reticolo, e ai battimenti fra le lunghezze d'onda dei fasci laser che lo compongono, a cui non corrispondono tuttavia dei minimi del potenziale bicromatico. Essi danno quindi informazioni non solo sulla distribuzione dei minimi di energia, ma soprattutto sull'effettiva occupazione dei siti reticolari, che in un sistema disordinato è non triviale. Attraverso i risultati sperimentali, confermati dalla simulazione numerica, si è potuto anche evidenziare la relazione fra la funzione di correlazione del sistema disordinato e i parametri fisici fondamentali che lo descrivono, e quindi caratterizzare la progressiva rottura della fase di Mott.

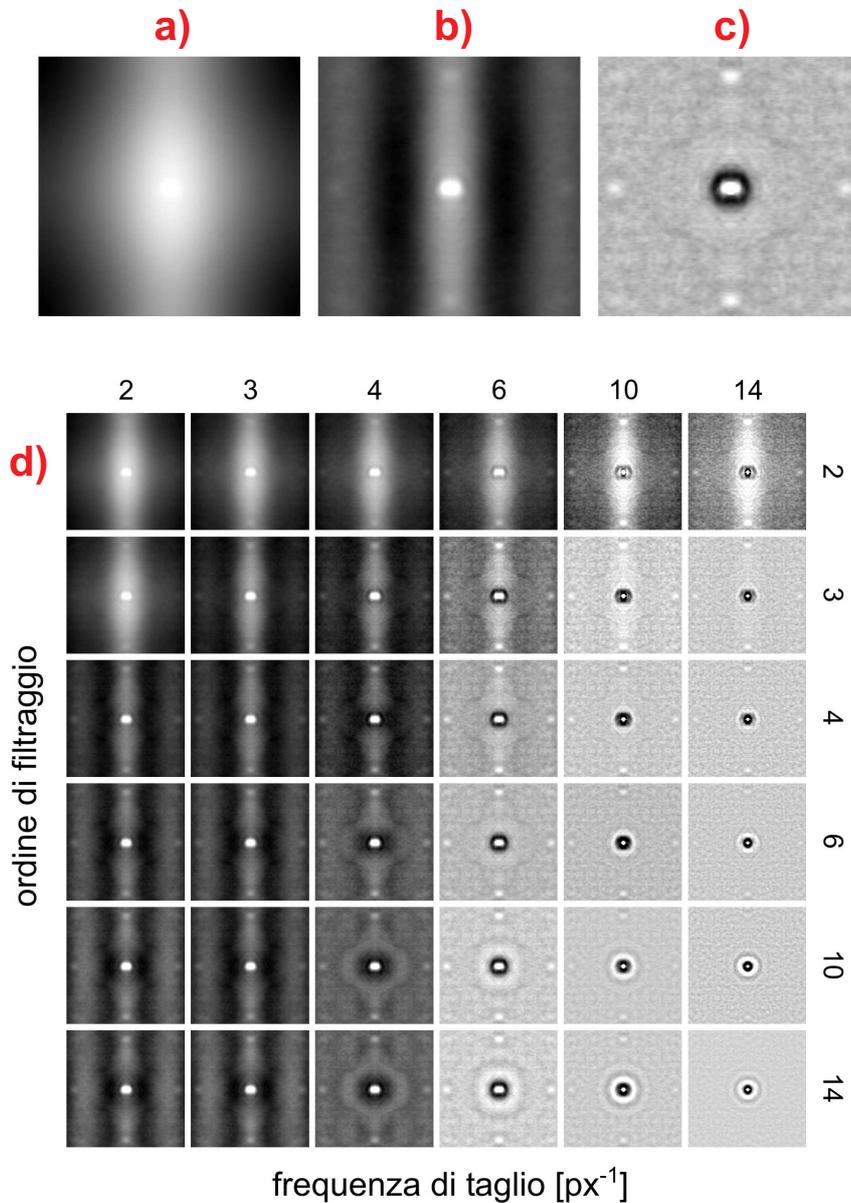


Figura 4.5: **a)** Funzione di correlazione di rumore di un sistema in fase di Mott ricavata applicando la formula della correlazione riportata in eq.4.14, senza l'utilizzo di filtri. **b)** Funzione di correlazione calcolata sui residui dei *fit* gaussiani eseguiti sulle singole immagini in assorbimento. **c)** Risultato ottenuto senza sottrazione dei rispettivi *fit* sulle immagini in assorbimento, ma applicando un filtro *Batterworth* con $k_C = 6 \text{ pixel}^{-1}$ e $\alpha = 6$. **d)** Immagini ottenute con l'applicazione di filtri con diversi valori di k_C e α . Tutte le immagini sono state trattate con la tecnica descritta nel § 4.4.3 per aumentare il rapporto segnale/rumore.

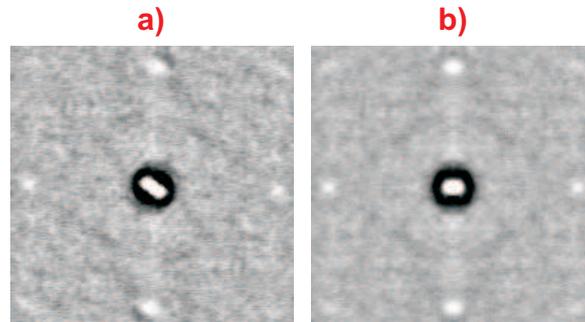


Figura 4.6: **a)** Funzione di correlazione di rumore in densità degli atomi, calcolata secondo l'espressione in eq.4.14, applicando solamente il filtro descritto nel § 4.4.2. **b)** Funzione di correlazione ricavata applicando il filtro ed eseguendo in aggiunta un'operazione di ribaltamento rispetto all'asse y e la media dell'immagine originale con quella così ottenuta.

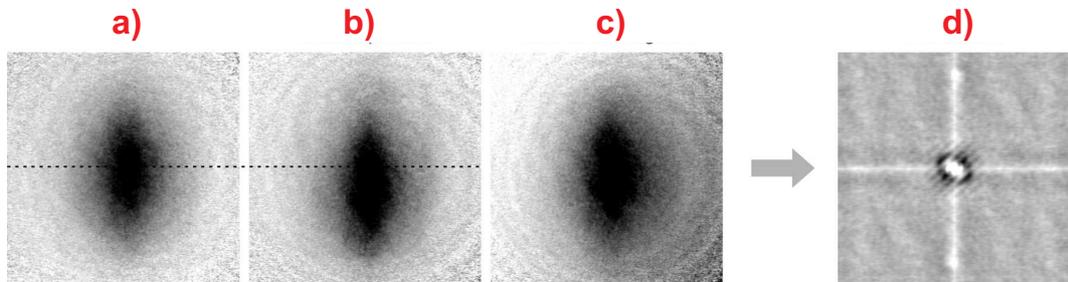


Figura 4.7: Confronto fra tre immagini del profilo della nuvola atomica ricavate con la tecnica rivelazione in assorbimento: **a)** immagine centrata in $\mathbf{d} = 0$ e con fondo omogeneo lontano dalla regione occupata dagli atomi la seconda **b)** immagine con centro spostato lungo l'asse z **c)** immagine con evidenti disomogeneità. **d)** Funzione di correlazione calcolata su una serie che comprende le immagini **b)** e **c)**.

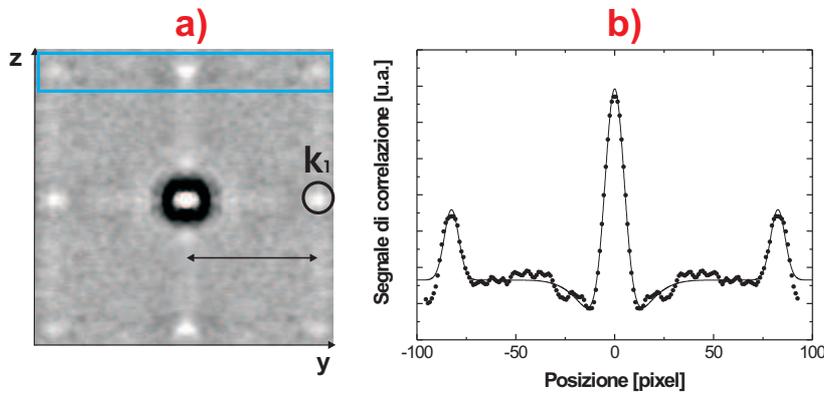


Figura 4.8: **a)** Funzione di correlazione di rumore di densità di un sistema atomico in fase di isolante di Mott. **b)** *Fit* del profilo di correlazione lungo la direzione y con una funzione composta da tre gaussiane centrate sui tre picchi di correlazione (centrale e laterali) più un fondo gaussiano di ampiezza negativa dovuto ad una modulazione residua non eliminata dal filtro. Il fit è eseguito sul rettangolo evidenziato in blu in **a)** dopo un'integrazione lungo z .

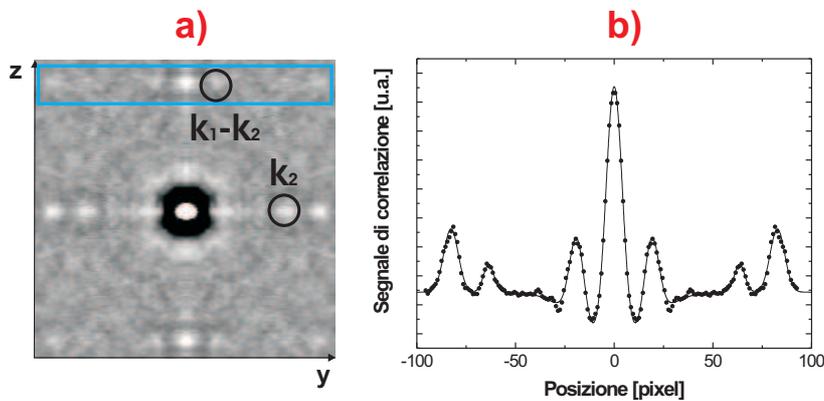


Figura 4.9: **a)** Funzione di correlazione di rumore di densità di un sistema quasi-disordinato, con altezze dei reticoli principali $s_{x,z} = 40$ e $s_y = 16$, ed altezza del reticolo secondario (posto lungo y) $s_2 = 9$. **b)** *Fit* composto da sette gaussiane centrate sui picchi di correlazione più un fondo gaussiano negativo.

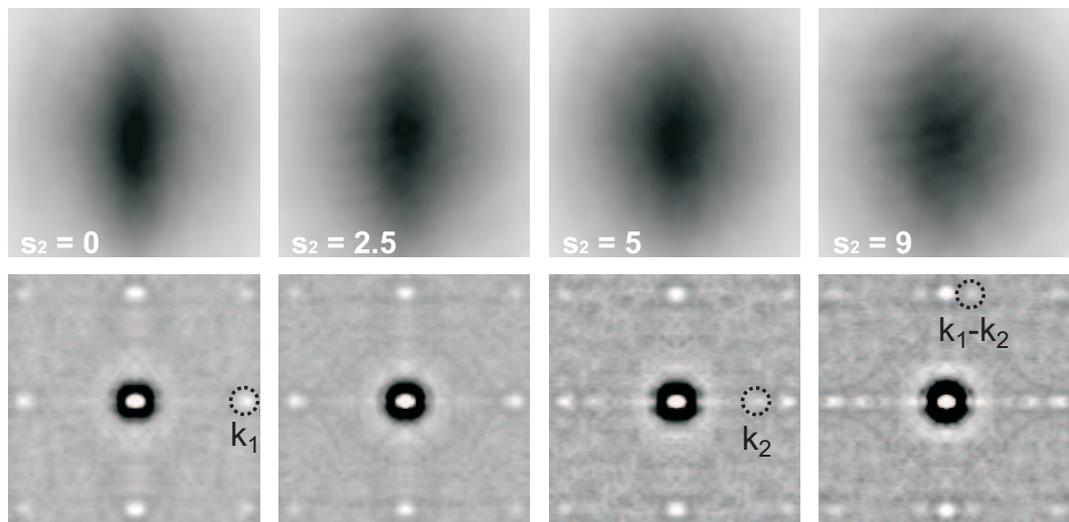


Figura 4.10: Media delle immagini del profilo di assorbimento degli atomi (in alto) e funzione di correlazione di rumore (in basso), ricavate per diversi valori dell'altezza del reticolo secondario s_2 .

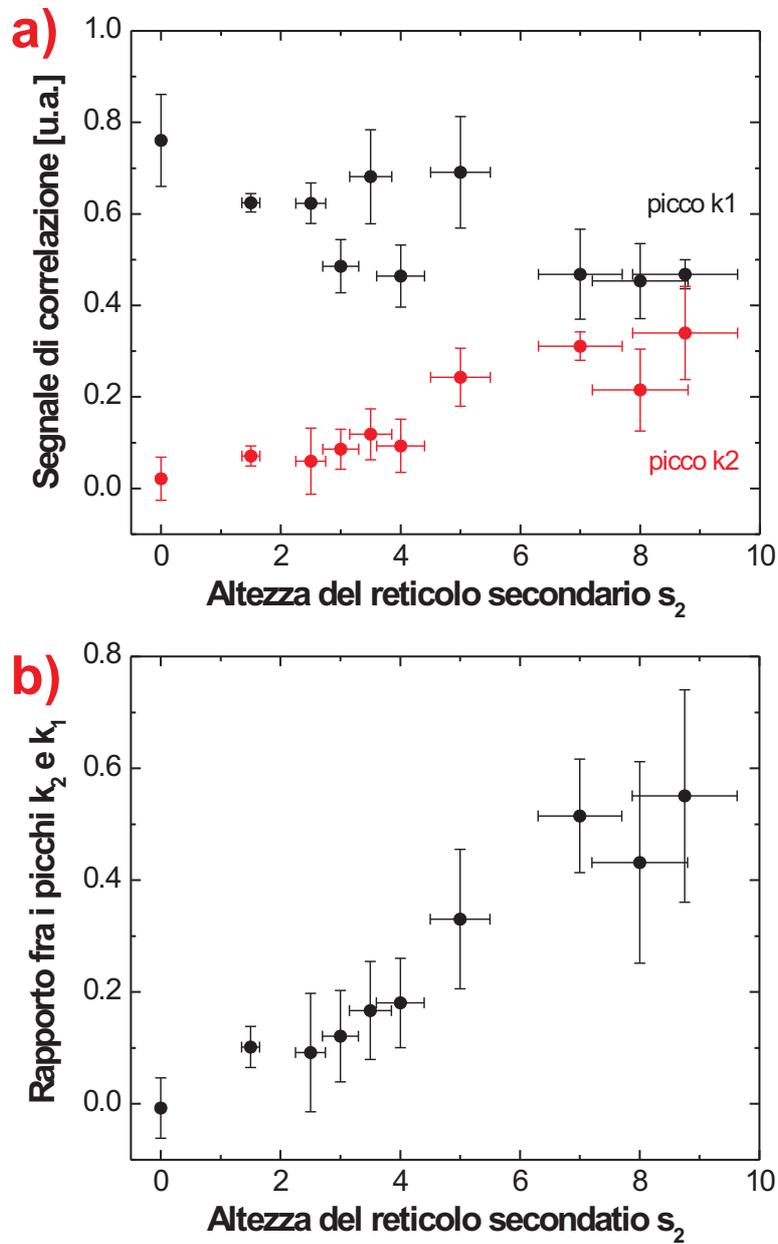


Figura 4.11: **a)** Altezza del picco di correlazione principale (in nero) e del picco secondario (in rosso), espressa in unità arbitrarie, in funzione dell'altezza del secondo reticolo, a cui è dovuto il disordine. **b)** Rapporto fra il picco secondario e il picco principale di correlazione, in funzione dell'altezza del secondo reticolo.

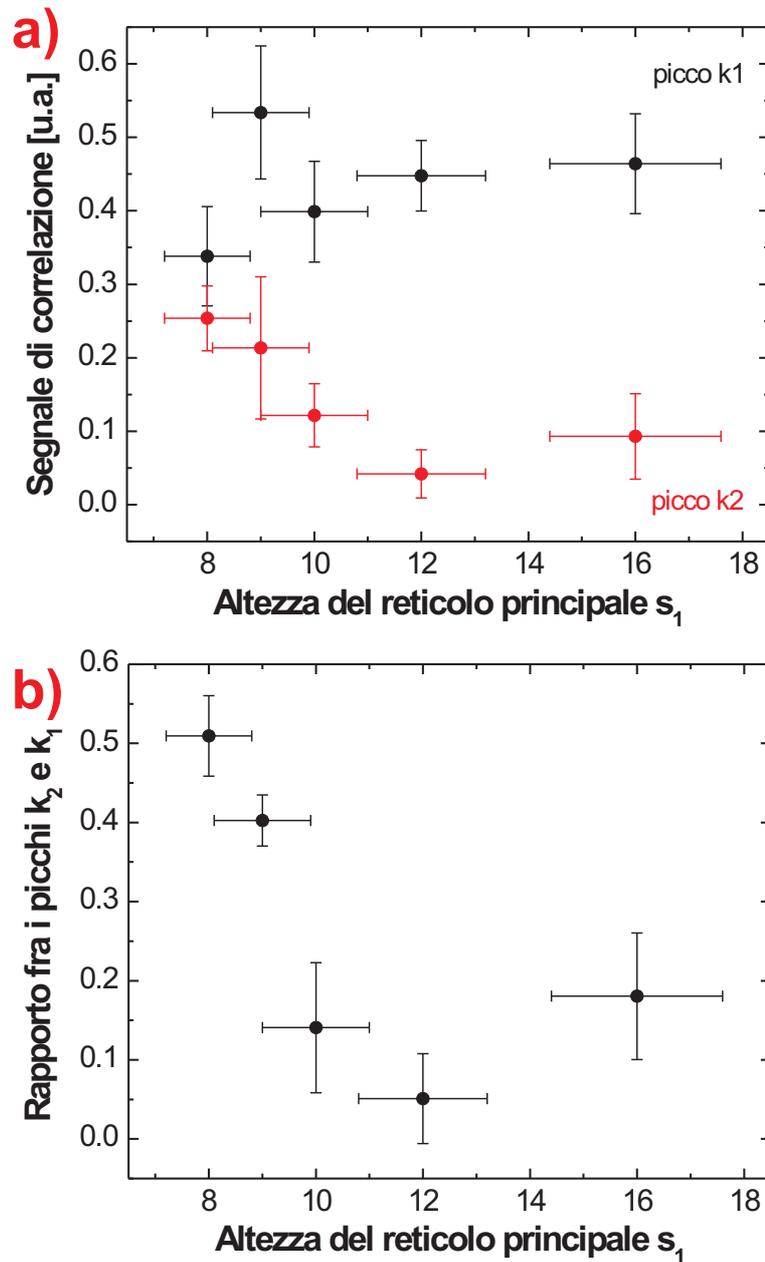


Figura 4.12: **a)** Segnale di correlazione del picco corrispondente alla periodicit  del reticolo principale (in nero) e del picco corrispondente alla periodicit  del reticolo secondario (in rosso) in funzione dell'altezza s_y del reticolo principale lungo y , tenendo fissata l'altezza del reticolo secondario $s_2 = 4$. **b)** Rapporto fra le altezze del picco secondario e del picco principale in funzione di s_y , con $s_2 = 4$.

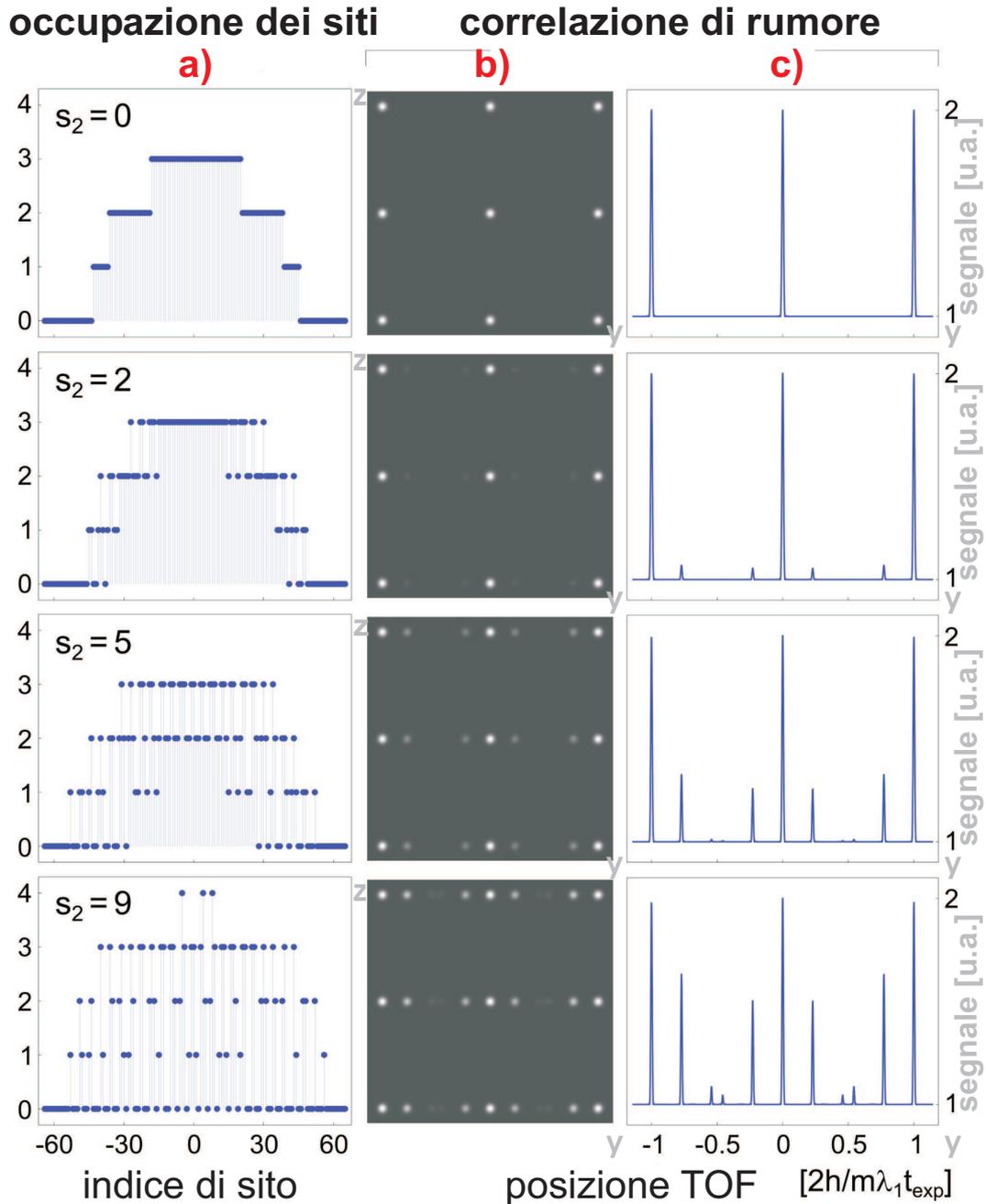


Figura 4.13: Risultati della simulazione di un sistema disordinato formato dalla sovrapposizione di un reticolo principale e di un reticolo secondario, con aggiunta di un potenziale armonico esterno confinante, basata sul modello di Bose-Hubbard con $J = 0$. **a)** Diagramma dell'occupazione dei siti reticolari al variare dell'altezza del potenziale che induce il disordine. **b)** Immagine dei picchi di correlazione nel piano $y - z$. **c)** Profilo dei picchi di correlazione del sistema lungo l'asse y , sul quale viene introdotto il disordine.

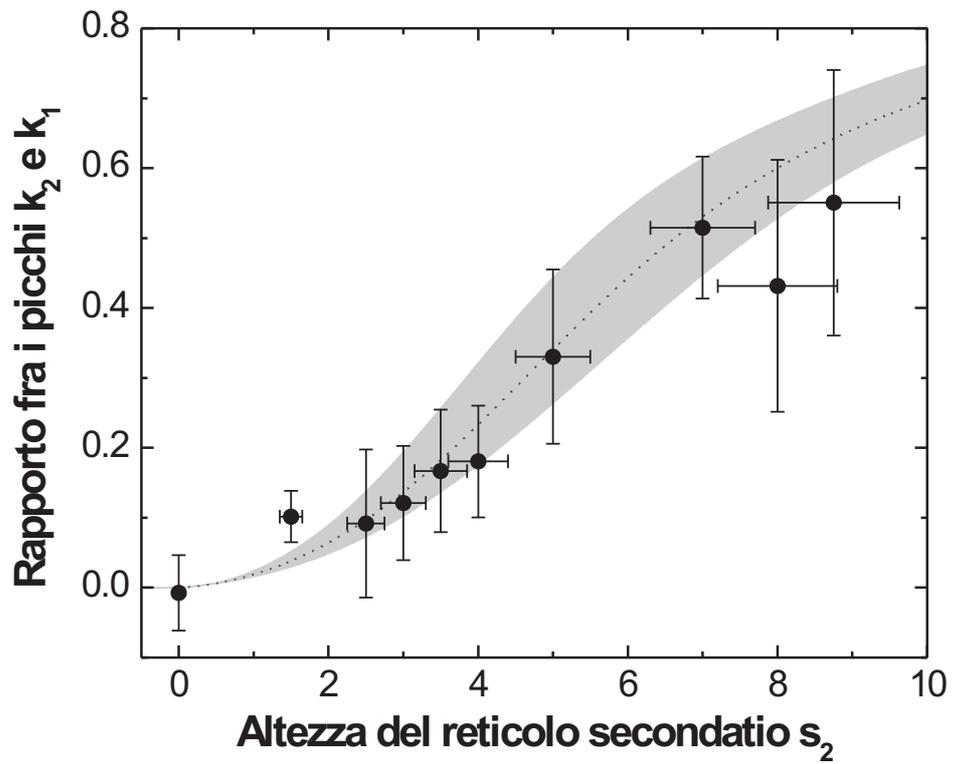


Figura 4.14: Confronto della simulazione numerica con i risultati dell'esperimento (v. testo).

Conclusioni e prospettive

In questo lavoro di tesi si è presentato uno studio sperimentale di sistemi di bosoni neutri ultrafreddi (^{87}Rb), in reticoli ottici ordinati e quasi-disordinati in regime di forte interazione. L'indagine di tali sistemi è stata effettuata sfruttando l'effetto Hanbury Brown e Twiss, ovvero studiando la correlazione delle fluttuazioni sulle popolazioni dei bosoni, misurate in due punti diversi dello stesso rivelatore. Tali fluttuazioni sono dovute al rumore quantistico di rivelazione (*shot noise* atomico). In particolare si è utilizzata una tecnica suggerita nel lavoro teorico di E. Altman, E. Demler e M. K. Lukin [32]. Essa consiste nel calcolo della funzione di correlazione spaziale delle fluttuazioni sulle immagini del profilo di densità degli atomi inizialmente confinati nel reticolo ottico e poi lasciati espandere per un certo intervallo di tempo.

Il primo risultato di questa indagine sperimentale è stata l'osservazione della funzione di correlazione delle fluttuazioni di densità di un sistema in fase di isolante di Mott. L'isolante di Mott è descrivibile dal punto di vista teorico attraverso il modello di Bose-Hubbard, caratterizzato essenzialmente da due scale di energia: l'energia di interazione fra due atomi che occupano lo stesso sito reticolare U , e l'accoppiamento mediante *tunneling* fra siti primi-vicini J . Il segnale di correlazione delle fluttuazioni della densità in un sistema così fatto è stato precedentemente studiato in [33, 34]. La funzione di correlazione del sistema esibisce dei picchi caratteristici, la cui posizione è legata alla periodicità del reticolo ottico. Le misure da noi effettuate su un sistema in fase di isolante di Mott, già studiato in letteratura, hanno consentito di verificare l'efficacia dell'apparato sperimentale e delle tecniche di analisi introdotte in questa tesi per l'indagine della correlazione, e la qualità delle immagini di correlazione ottenute sperimentalmente. Una parte cospicua di questo lavoro è stata dunque rappresentata dall'ottimizzazione dell'apparato sperimentale e della procedura di analisi dei dati ed elaborazione dell'immagine. Un ruolo molto importante, da questo punto di vista, è stato giocato dall'utilizzo di un nuovo apparato di rivelazione, in grado di acquisire le diverse immagini necessarie ad ottenere il profilo di densità della nuvola atomica in tempi brevissimi, in modo da eliminare fonti di rumore spurie. È risultato quindi necessario

individuare i parametri sperimentali critici, in particolare determinare la tempistica ottimale per la misura. Sono stati inoltre fondamentali, durante la fase di elaborazione delle immagini acquisite, la selezione delle immagini e l'utilizzo di filtri. L'ottimizzazione effettuata ha permesso di ottenere una funzione di correlazione robusta rispetto alle fonti di rumore spurie.

Il risultato principale e originale della nostra indagine sperimentale è stato ricavato tuttavia dall'applicazione della diagnostica Hanbury Brown e Twiss su un sistema quasi-disordinato, dove si verifica la rottura controllata della fase di isolante di Mott. La sua realizzazione sperimentale è stata eseguita intrappolando il gas bosonico in un reticolo bicromatico, ottenuto dalla sovrapposizione del reticolo principale e di un reticolo secondario di diversa periodicità. Il secondo reticolo induce essenzialmente uno spostamento dell'energia dei singoli siti reticolari, introducendo delle disomogeneità locali del potenziale su una scala di lunghezza confrontabile con il passo del reticolo principale. Questo sistema è ancora descritto da un modello Bose-Hubbard, ma a causa della presenza di tali disomogeneità, è necessario introdurre una nuova scala di energia Δ , che quantifica lo spostamento massimo in energia di ciascun sito reticolare.

Lo studio di questo sistema ha rivelato, oltre ai picchi di correlazione visibili nella fase di isolante di Mott, la comparsa di picchi di correlazione aggiuntivi, legati alla periodicità del reticolo secondario. Questi picchi secondari, come si è verificato, non sono legati alle posizioni equispaziate dei minimi di energia del reticolo bicromatico, come invece i picchi principali, ma sono invece dovuti alla distribuzione non omogenea degli atomi nei siti reticolari, indotta appunto dal secondo reticolo. È stata quindi effettuata un'ampia sistematica, in modo da evidenziare la nascita e l'evoluzione dei picchi di correlazione delle fluttuazioni, e ricavare in maniera quantitativa la loro dipendenza dai parametri fisici fondamentali, che compaiono nel modello di Bose-Hubbard. In particolare, si è indagato come il segnale di correlazione si modifichi al variare del disordine Δ , che può essere cambiato variando l'altezza del reticolo secondario: al crescere del disordine, si è osservato un aumento di visibilità del picco secondario.

L'osservazione sperimentale risulta in buon accordo con una simulazione numerica effettuata basandosi sul modello di Bose-Hubbard nell'ipotesi di assenza di *tunneling*.

Gli effetti dell'accoppiamento fra siti reticolari vicini sono poi stati quantificati mediante un'indagine sperimentale sistematica della funzione di correlazione al variare dell'altezza del reticolo principale: l'osservazione ha mostrato che l'aumento del *tunneling* induce un aumento progressivo della visibilità dei picchi di correlazione secondari, che sarà oggetto di future indagini, e la cui interpretazione teorica richiede lo sviluppo di nuovi modelli.

In sostanza, la misura della correlazione spaziale del rumore di densità ha dimostrato qui di non essere soltanto una tecnica di indagine della distribuzione spaziale dei minimi di energia del reticolo come già in [33, 34]. Sulla base delle osservazioni sperimentali qui svolte, infatti, essa si è soprattutto rivelata un metodo efficace per indagare l'effettiva distribuzione degli atomi nel reticolo ottico, e quindi il riempimento dei singoli siti reticolari al variare dei parametri fisici del sistema. Ciò ha consentito di caratterizzare la rottura della fase di isolante di Mott prodotta nel nostro sistema dal reticolo ottico secondario.

Questo lavoro di tesi apre dunque la strada all'utilizzo della tecnica interferometrica di Hanbury Brown e Twiss per l'indagine di nuove fasi quantistiche, e in particolare la fase di *Bose glass*, che si presenta in sistemi disordinati in regime di forte interazione, la cui esistenza è stata prevista teoricamente in [22], e di cui si sono state osservate le prime evidenze sperimentali [20]. Lo studio delle correlazioni potrebbe fornire un potente metodo per caratterizzare tale sistema, benché al momento manchino del tutto previsioni teoriche sul segnale atteso in questo caso.

In generale lo studio degli atomi ultrafreddi nei reticoli ottici, pur essendo un sistema assai interessante per la simulazione quantistica di sistemi di materia condensata, è ancora un campo relativamente inesplorato, in cui mancano efficaci metodi diagnostici. Lo studio delle correlazioni di densità si è rivelato un metodo che consente un'indagine quantitativa del riempimento dei siti reticolari e che quindi può essere applicato anche a sistemi più complessi di quello esaminato in questo lavoro di tesi: una prospettiva immediata potrebbe essere in particolare la sua applicazione allo studio di miscele di specie atomiche differenti o di spin in reticoli ottici.

Bibliografia

- [1] M. H. Anderson et al., *Science* **269**, 198 (1995)
- [2] K. B. Davis et al., *Phys. Rev.* **75**, 3969 (1995)
- [3] M. R. Andrews et al., *Science* **275**, 637 (1997)
- [4] I. Bloch et al., *Nature* **403**, 166 (2000)
- [5] J. R. Abo-Shaeer et al., *Science* **292**, 476 (2001)
- [6] R. J. Glauber, *Phys. Rev.* **131**, 2766 (1963)
- [7] E. P. Gross, *Nuovo Cimento* **20**, 454 (1961)
- [8] L. P. Pitaevskii, *Soviet Physics Journal of Experimental and Theoretical Physics* **13**, 451 (1961)
- [9] M. Ben Dahan et al., *Phys. Rev. Lett.* **76**, 4508 (1986)
- [10] O. Morsch et al., *Phys. Rev. Lett.* **87**, 140402 (2001)
- [11] F. S. Cataliotti et al., *Science* **293**, 843-846 (2001)
- [12] P. L. Gould et al., *Phys. Rev. Lett.* **56**, 827 (1986)
- [13] E. Arimondo et al., *Phys. Rev. Lett.* **43**, 753 (1979)
- [14] M. Kozuma et al., *Phys. Rev. Lett.* **82**, 871 (1999)
- [15] J. Stenger et al., *Phys. Rev. Lett.* **82**, 4569 (1999)
- [16] Yu. B. Ovchinnikov et al., *Phys. Rev. Lett.* **83**, 284 (1999)
- [17] D. Jaksch et al., *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3108 (1998)
- [18] R. P. Feynman, *Int. J. Theor. Phys.* **21**, 467 (1982); *Found. Phys.* **16**, 507 (1986); *Opt. News* **11**, 1 (1985)

- [19] M. Greiner et al., *Nature* **415**, 39 (2002)
- [20] L. Fallani et al., *Phys. Rev. Lett.* **98**, 130404 (2007)
- [21] T. Giamarchi e H. J. Schultz, *Phys. Rev. B* **37**, 325 (1988)
- [22] D. S. Fisher et al., *Phys. Rev. B* **40**, 546-570 (1989)
- [23] R. Roth and K. Burnett, *Phys. Rev. A* **68**, 023604 (2003)
- [24] B. Damski et al., *Phys. Rev. Lett.* **91**, 080403 (2003)
- [25] R. Hanbury Brown e R. Q. Twiss, *Nature* **177**, 27 (1956)
- [26] R. Hanbury Brown e R. Q. Twiss, *Nature* **178**, 1046 (1956)
- [27] U. Fano, *American Journal of Physics* **29**, 539 (1961)
- [28] E. Arimondo, *Lezioni di struttura della materia*, II edizione, ed.ETS (1998)
- [29] A. Öttl et al., *Phys. Rev. Lett.* **95**, 090404 (2005)
- [30] M. Schellekens et al., *Science* **310**, 648 (2005)
- [31] T. Jelte et al., *Nature* **455**, 402 (2007)
- [32] E. Altman et al., *Phys. Rev. A* **70**, 013603 (2004)
- [33] S. Fölling et al., *Nature* **434**, 481 (2005)
- [34] I. B. Spielman et al., *Phys. Rev. Lett.* **98**, 080404 (2007)
- [35] T. Rom et al., *Nature* **444**, 733 (2006)
- [36] M. Greiner et al., *Phys. Rev. Lett.* **94**, 110401 (2005)
- [37] G. Raithel et al., *Phys. Rev. Lett.* **78**, 630 (1997)
- [38] W. Zwerger, *J. Opt. B* **5**:S9 (2003)
- [39] L. P. Pitaevskii and S. Stringari, *Bose-Einstein condensation*, Internal series of monographs on Physics, Oxford University Press (2003)
- [40] C. J. Pethick and H. Smith, *Bose-Einstein condensation*, Cambridge University Press (2001)
- [41] F. Gerbier et al., *Phys. Rev. Lett.* **95**, 050404 (2005)

- [42] R. Grimm et al., *Adv. At. Mol. Opt. Phys.* **42**, 95 (2000)
- [43] I. Bloch, J. Dalibard, W. Zwerger, arXiv:0704.3011v1 [cond-mat.other] (2007)
- [44] J. E. Lye et al., *Phys. Rev. Lett.* **95**, 3070401 (2005)
- [45] C. Fort et al., *Phys. Rev. Lett.* **95**, 170410 (2005)
- [46] D. Clement et al., *Phys. Rev. Lett.* **95**, 170411 (2005)
- [47] T. Schulte et al., *Phys. Rev. Lett.* **95**, 170409 (2005)
- [48] L. Sanchez Palencia and L.Santos, *Phys. Rev. A* **72**, 053607 (2005)
- [49] V. W. Scarola and S.Das Sarma, *Phys. Rev. A* **73**, 041609(R)
- [50] R. B. Diener et al., *Phys. Rev. A* **73**, 033416 (2001)
- [51] T. Schulte et al., *Phys. Rev. A* **95**, 170411 (2005)
- [52] J. E. Lye et al., *Phys. Rev. A* **75**, 061603(R) (2005)
- [53] M. D. Wang, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 076802 (2004)
- [54] V. Guarrera, *New Journal of Physics* **9**, 107 (2007)
- [55] F. T. Arecchi et al., *Phys. Lett.* **20**, 27 (1966)
- [56] M. Yasuda et al., *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3090 (1996)
- [57] M. Henny et al., *Science* **284**, 296 (1999)
- [58] L. Fallani, *Bose-Einstein Condensates in Optical Lattices*, Tesi di dottorato in Fisica, Università di Firenze (2004)
- [59] C. Fort et al, *Europhys. Lett.* **49**, 8 (2000)
- [60] L. De Sarlo, *Instabilità di un condensato di un condensato di Bose-Einstein in un reticolo ottico*, Tesi di Laurea in Fisica, Università di Firenze (2004)
- [61] J. Catani, *Interazione tra un'onda di materia e un reticolo ottico*, Tesi di Laurea in Fisica, Università di Firenze (2003)
- [62] S. Dalfovo et al., *Bose-Einstein condensation of trapped gases*, *Review of Modern Physics* **71**, 1 (1999)

- [63] N. Fabbri, *Indagine sperimentale delle transizioni di Bragg in un condensato di Bose-Einstein interagente con luce laser*, Tesi Laurea in Fisica di I livello (2005)
- [64] A. B. Kuklov et al., Phys. Rev. A **55**, 488 (1997)
- [65] T. Roscilde, Max Planck Institute for Quantum Optics, Garching, comunicazione privata
- [66] M. Modugno, Dipartimento di Matematica Applicata, Università di Firenze, comunicazione privata