



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FIRENZE
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Tesi di Laurea in Fisica

Instabilità di un condensato di Bose-Einstein in un reticolo ottico

Laureando: Luigi De Sarlo

Relatore: Prof. Massimo Inguscio

Anno Accademico 2002/2003

Indice

Introduzione	1
1 La condensazione di Bose-Einstein	5
1.1 La transizione di fase quantistica	6
1.2 L'equazione di Gross-Pitaevskii	8
1.2.1 L'approssimazione di Thomas-Fermi	11
1.2.2 Lo stato fondamentale nello spazio degli impulsi	12
1.3 L'equazione di Schrödinger non-polinomiale	13
1.4 Parametri numerici dell'esperimento	16
2 I reticoli ottici	19
2.1 Il potenziale dipolare	20
2.2 Il reticolo ottico	22
2.3 Effetti spurî	24
2.3.1 Diffusione di fotoni	24
2.3.2 Effetti viscosi	26
2.4 Il condensato di Bose-Einstein nel reticolo ottico	27
2.4.1 Il condensato come onda di Bloch	27
2.4.2 Caricamento del condensato in singole onde di Bloch	29
2.5 Regimi di instabilità	32
2.5.1 Instabilità energetica	32
2.5.2 Instabilità dinamica	33

2.5.3	Limiti di stabilità: modello unidimensionale	35
3	L'apparato sperimentale	39
3.1	Produzione del condensato	39
3.1.1	L'apparato da vuoto	40
3.1.2	Le sorgenti laser	41
3.1.3	La trappola magneto-ottica, MOT	45
3.1.4	Compressione e melassa ottica	50
3.1.5	La trappola magnetica	51
3.1.6	Il raffreddamento evaporativo	56
3.1.7	L'immagine in assorbimento	58
3.2	Il reticolo ottico mobile unidimensionale	61
3.2.1	La sorgente laser	62
3.2.2	Suddivisione dei fasci e monitoraggio del reticolo	63
3.2.3	Modulazione dei fasci	65
4	Studio sperimentale dei regimi di instabilità	69
4.1	Ottimizzazione del sistema	70
4.2	Calibrazione del reticolo mediante diffrazione Bragg	77
4.3	Vita media del condensato: instabilità dinamica	82
4.3.1	Procedura sperimentale	82
4.3.2	Misure di vita media con scudo a radiofrequenza	83
4.3.3	L'effetto del potenziale armonico	90
4.4	Il ruolo della frazione termica: instabilità energetica	93
	Conclusione	99
	Bibliografia	103

Introduzione

La fisica dei reticoli ottici è un campo che ha conosciuto uno sviluppo impressionante negli ultimi anni a seguito del raggiungimento della cosiddetta condensazione di Bose-Einstein (BEC) cioè di un regime in cui un gas diluito di atomi bosonici si comporta come un unico oggetto macroscopico perché gli atomi che lo compongono occupano tutti il medesimo stato. In realtà l'interesse per i reticoli ottici, che altro non sono –come vedremo nel capitolo 2– che onde elettromagnetiche stazionarie generate a partire dalla luce laser, affonda le sue radici nei fondamenti della meccanica quantistica e quindi supera i confini della fisica atomica in senso stretto.

Questo perché un reticolo ottico rende accessibile dal punto di vista sperimentale un sistema ideale, a lungo studiato nel secolo passato: da un lato la sua periodicità è rigorosa e garantita dal tempo di coerenza della radiazione che lo genera, dall'altro la sua struttura periodica è priva di difetti e insensibile agli effetti della temperatura. Un tale sistema non trova analoghi né nella fisica dello stato solido, né nel nuovo campo delle nanostrutture. Inoltre, a differenza del potenziale generato dagli ioni di un reticolo cristallino, il reticolo ottico è realmente una struttura elementare: i due fasci possono essere trattati da un punto di vista quantistico come due popolazioni di bosoni, i fotoni, che non hanno costituenti elementari e sono rigorosamente non interagenti; questo spiega perché un reticolo ottico non può sostenere fononi.

Gli atomi, d'altra parte, rappresentano gli oggetti ideali per sfruttare queste proprietà peculiari. La loro struttura interna è conosciuta e studiata da lungo tempo

sia dal punto di vista sperimentale, sia da quello teorico, i loro parametri caratteristici sono misurati con una precisione che ha pochi eguali negli altri campi della fisica e la loro interazione con la radiazione elettromagnetica è stata oggetto di studi che precedono di molto l'invenzione del laser ed anzi ne sono un presupposto. In tempi recenti è divenuto possibile raffreddarli fino alle soglie dello zero assoluto e conservarli in trappole magneto-ottiche e puramente magnetiche dove essi sono a disposizione dell'osservatore per diversi secondi.

Non deve quindi stupire che la combinazione di atomi freddi e radiazione laser abbia condotto a verificare sperimentalmente predizioni fondamentali che risalgono al primo trentennio del secolo scorso: capostipite di questi esperimenti è la verifica dell'effetto Kapitza-Dirac su un fascio di atomi di sodio che attraversa un'onda stazionaria generata a partire da un laser a coloranti [1]. Si è dimostrato, con un confronto stringente con la teoria, che la radiazione laser era capace, attraverso un processo stimolato, di trasferire momento agli atomi, realizzando l'equivalente di un reticolo di diffrazione in cui luce e materia si scambiano di ruolo. Successivamente le analogie con il reticolo solido sono state accresciute dall'osservazione della diffrazione di Bragg degli atomi da parte di un'onda laser stazionaria [2] e dall'osservazione delle oscillazioni di Bloch di un campione atomico ultrafreddo in un reticolo ottico [3], oscillazioni che non erano mai state osservate nei reticoli materiali.

Con la realizzazione sperimentale del regime di degenerazione quantistica di un gas di atomi diluiti, la cui importanza è stata sancita dal Premio Nobel 2001 a E. Cornell, C. Wieman e W. Ketterle, la fisica dei reticoli ottici ha ricevuto un nuovo impulso. Tra i numerosi lavori in questo campo vanno citati la verifica della diffrazione alla Bragg del condensato da parte del reticolo [4], fenomeno che viene utilizzato in questo lavoro per la calibrazione del reticolo stesso (v. §4.2), lo studio approfondito del condensato come onda di Bloch (cfr. §2.4.1) svolto sperimentalmente in [5] e l'osservazione delle oscillazioni di Bloch del condensato [6]. Allo stesso tempo il reticolo ottico si è rivelato uno strumento fondamentale per

indagare la superfluidità del condensato di Bose-Einstein. Il lavoro di Anderson e Kasevich [7] ha messo in evidenza come tra i sottocondensati intrappolati nei minimi del potenziale periodico esista una coerenza di fase, mentre, proprio qui a Firenze, si è messo in evidenza come questi sottocondensati siano in grado di sostenere un flusso macroscopico [8]. Utilizzando un reticolo ottico tridimensionale è stato possibile osservare la transizione di fase quantistica tra superfluido ed isolante di Mott [9]. In tempi recenti si è fatta largo l'ipotesi di utilizzare il condensato di Bose-Einstein inserito in un reticolo ottico per implementare tecniche di calcolo quantistico [10].

Anche in vista di questo tipo di applicazioni, emerge chiaramente la necessità di indagare dal punto di vista sperimentale i limiti dell'approccio di Bloch ed in particolare la stabilità del sistema. E' stato infatti osservato [8, 11, 12] che per velocità superiori ad un certo valore critico, l'aspetto della distribuzione di densità del condensato cambia qualitativamente riflettendo la presenza di disuniformità nella fase della funzione d'onda del condensato (cfr. §1.1, §4). Tali osservazioni sono state condotte mettendo in moto il condensato inducendo un moto di oscillazione del suo centro di massa nella trappola magnetica [13]. Così facendo, durante la dinamica, il condensato si trova ad essere accelerato da velocità zero fino alla velocità massima desiderata attraversando così zone in cui possono presentarsi diverse fenomenologie. In effetti, studi teorici basati su modelli unidimensionali, presentati nel paragrafo 2.5, predicono che, al variare della velocità del condensato rispetto al reticolo, si instaurino due regimi diversi di instabilità: una di tipo energetico, per cui cioè un'opportuna perturbazione esterna diminuisce l'energia del sistema creando delle eccitazioni, ed uno di natura dinamica cioè dato da eccitazioni la cui ampiezza cresce esponenzialmente nel tempo.

In questo lavoro, al contrario, è il reticolo a muoversi con velocità fissata (cfr. §3.2) cosicché, nel sistema di riferimento del reticolo, il condensato è in moto con velocità controllata. Così facendo diviene possibile effettuare, in funzione della

velocità del condensato nel reticolo, una misura risolta in tempo delle perdite indotte dal reticolo stesso nel condensato coprendo ben tre ordini di grandezza. Inoltre, per la prima volta, misure di questo genere vengono svolte per diverse bande di Bloch ottenendo un accordo qualitativo con i risultati previsti dalla teoria. Proprio questo accordo consente di attribuire in modo non ambiguo gli effetti osservati all'instaurarsi di instabilità dinamica. Le informazioni acquisite dallo studio dell'instabilità dinamica hanno permesso di separare questo regime da quello di instabilità energetica che è stato a sua volta oggetto di studio sperimentale.

Lo schema di questo lavoro è il seguente: nel primo capitolo vengono introdotti i concetti fondamentali alla base della fisica del condensato di Bose-Einstein. Il secondo capitolo, dopo aver introdotto il reticolo ottico, tratta invece dell'interazione tra questo e il condensato. Viene inoltre discussa la stabilità del sistema, definiti i due tipi di instabilità e presentato un modello unidimensionale che consente una previsione sull'instaurarsi di tali regimi instabili. Il terzo capitolo è dedicato alla descrizione dell'apparato sperimentale per la produzione del condensato di Bose-Einstein e la generazione del reticolo ottico. Nel quarto ed ultimo capitolo infine vengono presentati e discussi i risultati relativi all'indagine sperimentale della stabilità del sistema.

Capitolo 1

La condensazione di Bose-Einstein

In questo capitolo richiamiamo brevemente i fondamenti della fisica dei condensati di Bose-Einstein necessari per comprendere i risultati presentati nel capitolo 4. In particolare viene presentata l'equazione di Gross-Pitaevskii su cui torneremo al paragrafo 2.5.1 quando discuteremo la stabilità delle soluzioni in presenza di un potenziale periodico.

Viene successivamente discusso il cosiddetto limite di Thomas-Fermi per l'equazione di Gross-Pitaevskii e vengono presentate le relazioni utili a legare i parametri di questa distribuzione alle quantità misurate sperimentalmente a partire da un'immagine in assorbimento del condensato (cfr. §3.1.7). Sempre nel limite di Thomas-Fermi si darà infine brevemente conto della forma dello stato fondamentale del condensato nello spazio degli impulsi che sarà utile a introdurre il formalismo di Bloch per l'interazione tra il condensato e il reticolo ottico, trattata nel paragrafo 2.4.1. Nel paragrafo successivo viene presentata l'equazione di Schrödinger non-polinomiale che permette di ridurre la dimensionalità dell'equazione di Gross-Pitaevskii e che è stata utilizzata per le simulazioni teoriche con cui si sono confrontati i risultati sperimentali.

Nell'ultimo paragrafo infine vengono discusse dal punto di vista sperimentale tutte le approssimazioni introdotte in precedenza.

1.1 La transizione di fase quantistica

Se si immagina di ridurre progressivamente la temperatura di un insieme di bosoni identici non interagenti, si può intuire che nel limite di temperatura nulla, dato che le particelle possono occupare lo stesso stato, la configurazione che minimizza l'energia è quella che vede tutte le particelle occupare lo stato fondamentale. Ciò che l'intuizione non può dire è se tale comportamento sia peculiare dello zero assoluto (dove energia libera ed energia interna coincidono) oppure se esista una transizione a temperatura finita. Einstein e Bose negli anni Venti del secolo scorso hanno mostrato che, per un gas di bosoni liberi non interagenti, nel limite termodinamico (cioè $N \rightarrow \infty$, $V \rightarrow \infty$, ma $N/V \rightarrow \text{cost}$), esiste un valore finito della temperatura per cui il potenziale chimico si annulla: se la temperatura scende sotto questo valore condizione necessaria perché il numero di particelle si conservi è che lo stato fondamentale possieda un numero di occupazione macroscopico (cioè dell'ordine del numero totale di particelle), mentre la statistica di Bose assegna agli altri stati un numero di occupazione di ordine 1.

L'estensione al caso di particelle confinate (cioè in presenza di un potenziale esterno) ed interagenti del risultato di Bose ed Einstein non è in generale semplice. Un'evidenza degli effetti della condensazione in un sistema interagente sono le proprietà dell'elio liquido [16], ma il sistema in cui queste proprietà emergono in maniera chiara è un gas di atomi diluito e confinato in un potenziale armonico [17]. Tali condizioni sono sperimentalmente raggiungibili (cfr. cap. 3) in un sistema ad ultra alto vuoto e mediante un confinamento di tipo magnetico. Il potenziale di confinamento, sviluppato intorno al minimo, assume la forma:

$$V = \frac{1}{2} m (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2) \quad (1.1)$$

a cui corrisponde uno spettro di singola particella caratterizzato da tre numeri quantici:

$$\epsilon(n_x, n_y, n_z) = \hbar((n_x + 1/2)\omega_x + (n_y + 1/2)\omega_y + (n_z + 1/2)\omega_z) \quad (1.2)$$

Come vedremo al paragrafo 3.1.5 la trappola utilizzata negli esperimenti riportati in seguito presenta un confinamento armonico in una geometria cilindrica in cui quindi si può individuare un asse di simmetria (indicato con z). Questo non è che un caso particolare del precedente in cui $\omega_x = \omega_y = \omega_\perp$.

Nell'approssimazione semiclassica di poter trascurare la separazione tra i livelli e trattare la densità degli stati come un continuo (approssimazione che diviene esatta nel limite $N \rightarrow \infty$ e se $k_B T \gg \hbar \omega_i$, $i = x, y, z$) si ottiene che il valore della temperatura a cui il potenziale chimico raggiunge il valore limite $\mu_c = 3/2\hbar(\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3}$ è dato dalla condizione [17]:

$$N = \zeta(3) \frac{(k_B T_c)^3}{\hbar^3 (\omega_x \omega_y \omega_z)} \quad (1.3)$$

dove ζ è la funzione zeta di Riemann ($\zeta(3) = 0.94$).

Dalla precedente si evince che:

$$k_B T_c = 0.94 \hbar (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3} N^{1/3} \quad (1.4)$$

Dalla equazione (1.4) è possibile ricavare una definizione corretta di limite termodinamico per questi sistemi a cui la definizione data in precedenza per il gas non interagente non si applica, data la loro inomogeneità. Il limite termodinamico è definito dalle condizioni $N \rightarrow \infty$, $\omega_i \rightarrow 0$ ma $N(\omega_x \omega_y \omega_z) \rightarrow \text{cost}$ in modo che la temperatura critica sia ben definita nel limite termodinamico. In questo limite è possibile ricavare l'andamento universale della frazione condensata al di sotto della temperatura critica [17]:

$$\frac{N_c}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^3 \quad (1.5)$$

Questo andamento tipico delle transizioni di fase può essere spiegato guardando il comportamento quantistico degli atomi. Una stima quantitativa dell'estensione del pacchetto d'onda atomico è data dalla lunghezza d'onda associata al moto termico delle singole particelle, detta *lunghezza d'onda termica di De Broglie* e definita da

$$\lambda_T = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}} \quad (1.6)$$

Per i parametri tipici degli esperimenti oggetto di questo lavoro, alla scala di temperature del centinaio di nano-Kelvin, si ha $\lambda_T \simeq 300\text{nm}$, mentre la distanza media tra le particelle, che può essere considerata dell'ordine di $\bar{n}^{-1/3}$ (dove $\bar{n}$ indica la densità media del campione), è, nel nostro caso, inferiore a 250nm. Ne consegue che a queste temperature diviene impossibile trascurare la correlazione tra i pacchetti d'onda atomici, che tendono a sovrapporsi: la transizione di fase si esplica proprio nel fatto che la lunghezza di coerenza del sistema passa, attraversando il valore di temperatura critico, dai circa 300 nm dei singoli pacchetti d'onda atomici alle decine di micron ovvero alla dimensione totale del sistema.

È necessario dunque trattare il problema in modo pienamente quantistico a partire dall'hamiltoniana completa del sistema che, in seconda quantizzazione, assume la forma [17]:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \int d\mathbf{r} \, \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{ext}(\mathbf{r}) \right] \hat{\psi}(\mathbf{r}) + \\ & + \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \, \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}') V_2(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\psi}(\mathbf{r}') \hat{\psi}(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (1.7)$$

dove $\hat{\psi}^\dagger$ ($\hat{\psi}$) indica l'operatore bosonico di creazione (distruzione), V_{ext} il potenziale esterno e V_2 il potenziale di interazione a due corpi. Come vedremo il parametro d'ordine della transizione descritta sopra è proprio il campo classico (complesso) $\langle \hat{\psi} \rangle \equiv \Phi$.

1.2 L'equazione di Gross-Pitaevskii

Il parametro d'ordine identificato sopra viene comunemente detto *funzione d'onda del condensato* e viene ottenuto dalla 1.7 come ordine zero dell'approssimazione di campo medio estesa al caso inhomogeneo (cioè esternamente confinato) e dipendente dal tempo [15, 17].

In generale, è sempre lecito espandere l'operatore di Bose intorno al suo valor

medio [15, 17]:

$$\widehat{\psi}(\mathbf{r}, t) = \Phi(\mathbf{r}, t) + \widehat{\psi}'(\mathbf{r}, t) \quad (1.8)$$

Se il numero di atomi nel condensato, N_c , è tale da poter considerare $N_c \sim N_c \pm 1 \sim N$ o meglio, se è tale da considerare le configurazioni corrispondenti a questi stati come equiprobabili, allora si può trascurare la fluttuazione intorno al valore medio ed ottenere un'equazione che governa la dinamica del parametro d'ordine $\Phi(\mathbf{r}, t)$, a patto di dare forma esplicita al potenziale di interazione V_2 .

A questo scopo ha estrema importanza il così detto “parametro di diluizione” cioè $\bar{n} a_s^3$ che misura il rapporto tra la distanza efficace delle interazioni, dell'ordine della lunghezza di diffusione (a_s), definita a partire dalla sezione d'urto elastica atomo-atomo [18], e la distanza media tra le particelle, $n^{-1/3}$.

In tutte le situazioni sperimentali in cui è stata raggiunta la condensazione di Bose-Einstein nei gas atomici vale l'approssimazione di gas fortemente diluito per cui:

$$\bar{n} a_s^3 \ll 1 \quad (1.9)$$

In questo regime le interazioni sono prevalentemente a due corpi essendo molto bassa la probabilità che tre o più particelle possano trovarsi a distanza tale da interagire tra loro. Questo spiega perché nella (1.7) il potenziale di interazione è considerato un potenziale a due corpi. Questo, nel limite di bassa temperatura, è descritto unicamente dalla lunghezza di diffusione in onda s . In queste approssimazioni, come ricavato nel 1936 in un altro contesto da Enrico Fermi [19], si può approssimare l'interazione con un potenziale di contatto (pseudopotenziale) che all'ordine più basso ha la forma:

$$V_2(\mathbf{r} - \mathbf{r}' = \mathbf{x}) = U_0 \delta(\mathbf{x}) = \frac{4\pi a_s \hbar^2}{m} \delta(\mathbf{x}) \quad (1.10)$$

La costante U_0 è determinata richiedendo che la sezione d'urto elastica totale che si ricava dalla (1.10) sia la stessa data dal potenziale reale.

Ciò posto, dato che in rappresentazione di Heisenberg vale rigorosamente [17]:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\psi}(\mathbf{r}, t) &= [\hat{\psi}, \mathcal{H}] = \\ &= \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{ext}(\mathbf{r}) + \int d\mathbf{r}' \hat{\psi}^\dagger V_2(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\psi}(\mathbf{r}', t) \right] \hat{\psi}(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (1.11)$$

Sostituendo a V_2 l'espressione (1.10) ed introducendo l'approssimazione (1.8) all'ordine zero ($\hat{\psi} = \Phi$) si ottiene:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{r}, t) = \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{ext}(\mathbf{r}) + U_0 |\Phi(\mathbf{r}, t)|^2 \right) \Phi(\mathbf{r}, t) \quad (1.12)$$

che prende il nome di equazione di Gross-Pitaevski dipendente dal tempo [20].

I limiti di validità di tale equazione sono quelli delle approssimazioni di pseudo-potenziale (bassa temperatura, gas diluito) e (1.8) ($N_c \sim N$, $N \gg 1$).

Dall'equazione (1.12) si ricava la forma dello stato fondamentale a temperatura zero (dove si ha $N = N_c$). Imponendo infatti un profilo di densità stazionario $\Phi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{n(\mathbf{r})} \exp(i\mu t)$ l'equazione (1.12) diviene una equazione di Schrödinger non lineare:

$$\left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{ext}(\mathbf{r}) + U_0 n(\mathbf{r}) \right) \sqrt{n(\mathbf{r})} = \mu \sqrt{n(\mathbf{r})} \quad (1.13)$$

Come si può dimostrare (cfr. [17]) la soluzione all'equazione precedente minimizza il funzionale energia a numero di particelle fissato e la costante μ assume il significato di potenziale chimico dato che:

$$\mu = \frac{\delta \langle \mathcal{H} \rangle}{\delta N} = \frac{1}{N} (E_k + E_{ho} + 2E_{int}) \quad (1.14)$$

dove E_k , E_{ho} , E_{int} indicano rispettivamente il valor medio del contributo cinetico armonico e di interazione al valor medio dell'energia.

Quando tratteremo in dettaglio il problema della stabilità di un condensato in un reticolo (§2.5), osserveremo che dall'analisi dell'equazione (1.13) dipende la stabilità energetica del sistema, mentre la soglia dell'instabilità dinamica può essere ottenuta a partire dalla (1.12).

1.2.1 L'approssimazione di Thomas-Fermi

La soluzione all'equazione (1.13) può essere trovata per via numerica, ma, nel caso di interazioni repulsive ($a_s > 0$), una classe di soluzioni analitiche di particolare utilità nel lavoro sperimentale, è quella che si ottiene nel limite in cui il contributo di interazione domina su quello cinetico ovvero il limite, detto approssimazione di Thomas-Fermi, in cui:

$$\frac{E_{int}}{E_k} \simeq \frac{E_{int}}{E_{ho}} \simeq \frac{N U_0 \bar{n}}{N \hbar \omega} \sim \frac{U_0 N a_{ho}^{-3}}{\hbar \omega} \simeq \frac{N a_s}{a_{ho}} \gg 1 \quad (1.15)$$

dove con a_{ho} si è indicata la cosiddetta lunghezza di oscillatore armonico pari a $\sqrt{\hbar/m\omega_i}$.

In queste condizioni si ha che l'interazione domina sulla forza di richiamo del potenziale armonico e di conseguenza gli atomi tendono ad essere spinti lontano dal centro della trappola: l'effetto complessivo è quello di rendere più uniforme il profilo di densità e diminuire fortemente il termine cinetico che dipende dal gradiente di densità. Nel limite (1.15) si può del tutto trascurare il contributo cinetico e l'equazione (1.13) si riduce ad un'equazione algebrica da cui si ricava:

$$n(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{1}{U_0} (\mu - V_{ext}(\mathbf{r})) & \text{se } \mu - V_{ext}(\mathbf{r}) \geq 0 \\ 0 & \text{se } \mu - V_{ext}(\mathbf{r}) < 0 \end{cases} \quad (1.16)$$

Di conseguenza in approssimazione di Thomas-Fermi la forma del profilo di densità è, nel caso di confinamento armonico, un paraboloide ellittico troncato che, nel caso di un confinamento a simmetria cilindrica, può essere scritto nella forma:

$$n(\mathbf{r}) = n_0 \left(1 - \left(\frac{r_{\perp}}{R_{\perp}} \right)^2 - \left(\frac{r_z}{R_z} \right)^2 \right) \quad (1.17)$$

Questa si differenzia qualitativamente dalla distribuzione che il condensato avrebbe in assenza di interazioni: in questo caso infatti essa sarebbe quella dello stato fondamentale del potenziale esterno e quindi gaussiana.

In questa stessa approssimazione è possibile ricavare una forma semplice per i parametri caratteristici della (1.17). In particolare, siccome la distribuzione

stessa si annulla sulla superficie $V_{ext}(\mathbf{r}) = \mu$, sfruttando la normalizzazione di n^1 , si ottiene un'espressione per le quantità R che compaiono nella (1.17) e che sono dette *raggi* della distribuzione di Thomas-Fermi. Per un potenziale avente simmetria assiale si ha:

$$R_{z,\perp} = \sqrt{\frac{2\mu}{m\omega_{z,\perp}^2}} = \frac{a_{hoz,\perp}^2}{\bar{a}_{ho}} \left(\frac{15Na_s}{\bar{a}_{ho}} \right)^{1/5} \quad (1.18)$$

dove la quantità $\bar{a}_{ho}$ indica la media

$$\bar{a}_{ho} = (a_{ho\perp}^2 a_{hoz})^{1/3}.$$

Come detto si ha che in queste condizioni le dimensioni della nuvola condensata sono molto superiori a quelle dello stato fondamentale del potenziale di confinamento² ($\sim a_{ho}$).

1.2.2 Lo stato fondamentale nello spazio degli impulsi

Ai fini della trattazione successiva è necessario spendere qualche parola riguardo alla forma che il condensato assume nello spazio dei momenti.

A causa della sua estensione finita il condensato possiede una larghezza nello spazio degli impulsi dovuta al principio di indeterminazione e data dal modulo

¹La (1.17) si considera normalizzata al numero di atomi:

$$\int_{\mathcal{V}} n(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = N$$

dove l'integrale è esteso al volume $\mathcal{V}$ definito da $V(\mathbf{r}) \leq \mu$.

²Accenniamo qui brevemente al fatto che, come evidenziato sopra, nel caso di interazione attrattiva l'approssimazione di Thomas-Fermi non è applicabile e anzi l'interazione induce un comportamento opposto: l'attrazione tra gli atomi tende a far aumentare la densità e quindi a sua volta l'interazione. Questo meccanismo a catena accresce la pressione quantistica del sistema (cioè il termine cinetico) provocando alla fine il collasso del condensato di Bose-Einstein. Tale instabilità dinamica in presenza di interazione attrattiva è stata oggetto di importanti studi sia teorici (cfr. [17] e relativi riferimenti bibliografici), sia sperimentali come ad esempio [21].

quadro della trasformata di Fourier della funzione d'onda nello spazio delle coordinate.

Per un potenziale avente simmetria assiale, detto A il rapporto $\omega_z/\omega_\perp$, si ha il seguente risultato [22]:

$$\Phi(\mathbf{p}) = \hbar^{-3} \left| \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar} \Phi(\mathbf{r}) \right|^2 = N \frac{15}{16A} \left(\frac{R_\perp}{\hbar} \right)^3 \left(\frac{J_2(x)}{x^2} \right)^2 \quad (1.19)$$

dove J_2 indica la funzione di Bessel al secondo ordine e x la quantità

$$x = \frac{1}{\hbar} R_\perp \sqrt{p_\perp^2 + (p_z/A)^2}$$

Il valore *RMS* della larghezza della distribuzione nello spazio dei momenti, cioè la quantità:

$$\Delta p_i = \sqrt{\frac{\int d\mathbf{p} p_i^2 \Phi(\mathbf{p})}{\int d\mathbf{p} \Phi(\mathbf{p})}}$$

è legato al raggio di Thomas-Fermi R_i dalla relazione:

$$\Delta p_i = \sqrt{\frac{21}{8}} \hbar / R_i \quad (1.20)$$

In figura 1.1 sono presentate due sezioni della distribuzione di densità nello spazio delle coordinate e nello spazio degli impulsi.

1.3 L'equazione di Schrödinger non-polinomiale

Quando sia presente un potenziale esterno più complicato di quello armonico qual è quello periodico introdotto da un reticolo ottico, anche nel limite di di Thomas-Fermi (1.15), non è possibile risolvere per via analitica l'equazione di Gross-Pitaevskii (1.12), ma occorre ricorrere a soluzioni numeriche. Queste in generale richiedono una complessità di calcolo piuttosto elevata e quindi sono comunque utili delle approssimazioni, specialmente se la geometria del sistema, come nel caso degli esperimenti oggetto di questo lavoro, è essenzialmente unidimensionale. Non entreremo nel dettaglio delle diverse tecniche che consentono

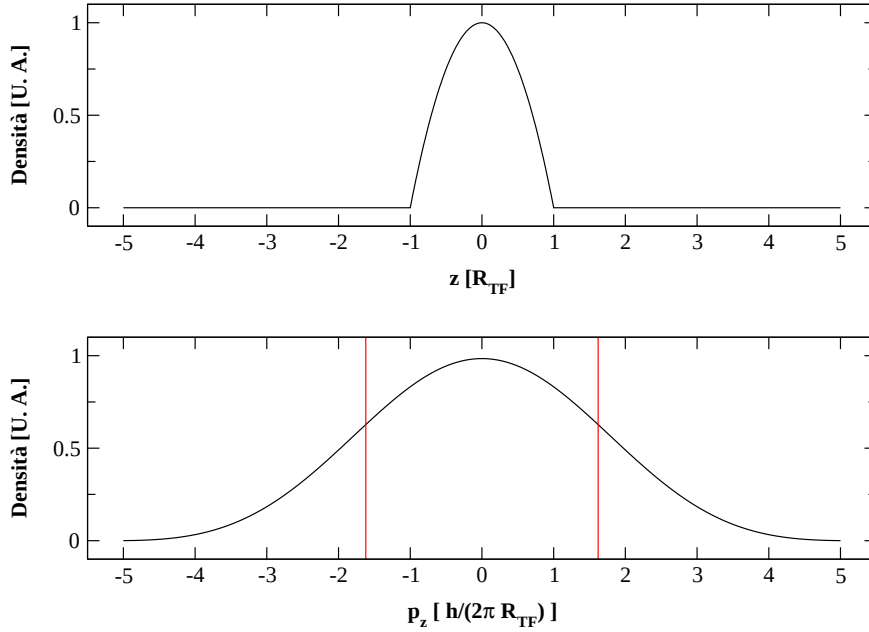


Fig. 1.1: *Sopra:* Sezione della distribuzione di densità (1.17). Il raggio è riportato in unità del raggio di Thomas-Fermi (1.18). *Sotto:* Stessa sezione, ma nello spazio degli impulsi (eq. (1.19)): la scala orizzontale è in unità $\hbar/R_{TF}$. Le barre verticali sono in corrispondenza di $\pm\sqrt{21/8} \simeq \pm 1.620$ (v. eq. (1.20)). Le due scale verticali sono diverse.

di ridurre la dimensionalità dell'equazione (1.12) per le quali si rimanda a [23], ma descriveremo qui l'approccio adottato per ottenere le simulazioni teoriche riportate nel capitolo 4.

Tale approccio si fonda su una semplice considerazione: nell'ambito di una geometria cilindrica in cui il confinamento nella direzione radiale sia molto maggiore del confinamento in direzione assiale, si può pensare che i gradi di libertà assiali e radiali siano almeno parzialmente disaccoppiati e quindi che la soluzione dell'equazione (1.12) sia fattorizzabile in una parte assiale ed in una radiale. Inoltre, assumendo il carattere armonico del confinamento radiale, si può assumere per la parte radiale della funzione d'onda una forma di tipo gaussiano. Questo, come vedremo, consente di ridurre l'equazione tridimensionale (1.12) ad un'equazione differenziale unidimensionale per la parte assiale e ad un'equazione algebrica per

la parte radiale.

Utilizziamo dunque la seguente forma fattorizzata:

$$\Phi(z, r_\perp, t) = \phi(z, t) \psi(r_\perp, t; \sigma(z, t)) \quad (1.21)$$

dove la parte radiale si assume, come detto, gaussiana:

$$\psi(r_\perp, t; \sigma) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \sigma} e^{-r_\perp^2 / (2\sigma^2)} \quad (1.22)$$

Inserendo la forma (1.21) nell'espressione dell'azione associata all'equazione di Gross-Pitaevskii e facendo l'ipotesi che la parte radiale vari lentamente con la coordinata assiale e quindi si possa assumere $\nabla^2 \psi \simeq \nabla_\perp^2 \psi$, si ottiene, dopo l'integrazione nella parte radiale, la seguente espressione:

$$S[\Phi] = \int dt \int dz \mathcal{L}_{NPSE}(z, t; \sigma) \quad (1.23)$$

dove la densità di lagrangiana $\mathcal{L}_{NPSE}$ ha la forma seguente [24]:

$$\mathcal{L}_{NPSE} = \phi^* \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - V(z) - \frac{gN}{2} \frac{|\phi|^2}{2\pi\sigma^2} - \frac{\hbar^2}{2m\sigma^2} - \frac{1}{2} m\omega_\perp^2 \sigma^2 \right] \phi \quad (1.24)$$

Imponendo la stazionarietà del funzionale (1.23), dalle equazioni di Eulero-Lagrange, si ottengono un'equazione algebrica per la larghezza della parte radiale:

$$\sigma(z, t) = a_\perp (1 + 2a_s N |\phi(z, t)|^2)^{1/4} \quad (1.25)$$

ed un'equazione differenziale per la parte assiale:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi(z, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + V(z) + \frac{gN}{2\pi\sigma^2} |\phi|^2 + \frac{1}{2} \hbar\omega_\perp \left(\frac{a_\perp^2}{\sigma^2} + \frac{\sigma^2}{a_\perp^2} \right) \right] \phi(z, t) \quad (1.26)$$

Quest'ultima, una volta sostituita a σ l'espressione (1.25), prende il nome di equazione di Schrödinger non polinomiale (NPSE). Se vale il limite di Thomas-Fermi (1.15) l'equazione precedente si può ancora semplificare come:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi(z, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + V(z) + \frac{3}{2} \frac{g\sqrt{N}}{2\pi a_\perp^2 \sqrt{2a_s}} |\phi(z, t)| \right] \phi(z, t) \quad (1.27)$$

1.4 Parametri numerici dell'esperimento

Scopo di questo paragrafo è discutere brevemente quali delle approssimazioni delineate nel corso del capitolo si applicano agli esperimenti presentati in questo lavoro.

La specie atomica studiata è il ^{87}Rb , che non è l'isotopo più abbondante del metallo, è radioattivo, ma stabile su scala geologica. Alcuni parametri caratteristici di questo atomo sono riassunti nella tabella 1.1.

Rubidio 87		
Massa atomica	m	$1.443\,160\,60(11) \times 10^{-25} \text{ Kg}$
Vita media nucleare	τ_n	$4.88 \times 10^{10} \text{ anni}$
Abbondanza relativa	η	$27.83(2)\%$
Lunghezza di diffusione	a_s	$5.77(53) \text{ nm}$
Punto di fusione	T_F	$39.31 \text{ }^\circ\text{C}$

Tabella 1.1: I dati presentati in questa tabella sono tratti da [25] ad eccezione del valore di a_s che si riferisce allo stato $|F = 2, m_F = +2\rangle$ ed è tratto da [26].

L'apparato sperimentale attivo presso il LENS e descritto nel capitolo 3 è caratterizzato da un potenziale di confinamento armonico con simmetria assiale i cui parametri sono riportati nella tabella 1.2. Da questi parametri si ricavano

Esperimento LENS		
Frequenza di confinamento assiale	ω_z	$2\pi \times (8.8 \pm 0.2) \text{ Hz}$
Frequenza di confinamento radiale	$\omega_\perp$	$2\pi \times (90 \pm 2) \text{ Hz}$
Numero di atomi nel condensato	N	$\simeq 150000$
Densità tipica	$\bar{n}$	$\sim 10^{14} \text{ cm}^{-3}$

Tabella 1.2: I dati presentati in questa tabella sono frutto di misure di caratterizzazione effettuate durante questo lavoro di tesi.

facilmente le lunghezze di oscillatore armonico: $a_\perp^{(ho)} = 1.14 \mu\text{m}$, $a_z^{(ho)} = 3.60 \mu\text{m}$.

Questo consente di valutare se la approssimazione semiclassica utilizzata per valutare T_c nella (1.4) è corretta. Si ha infatti:

$$\frac{k_B T_c}{\hbar} = 0.94(\omega_\perp^2 \omega_z)^{1/3} N^{1/3} \simeq 9.1 \text{ KHz} \gg \omega_\perp > \omega_z$$

e quindi la approssimazione semiclassica è verificata. Il valore della temperatura critica corrispondente è

$$T_c \simeq 100 \text{ nK} \quad (1.28)$$

La definizione di temperatura critica data dalla (1.4) vale nel limite termodinamico; si può valutare la bontà di questa approssimazione sviluppando in serie la temperatura critica rispetto al parametro piccolo $1/N$. Ciò che si ottiene è che l'effetto delle dimensioni finite del sistema provoca un abbassamento relativo della temperatura critica proporzionale a $(1/N)^{1/3}$ [17]. Di conseguenza la temperatura critica osservata è più bassa di T_c , ma di una quantità inferiore alla tipica incertezza data dalle fluttuazioni statistiche del numero di atomi tra due diverse misure che sono dell'ordine del 5%.

Un'altra approssimazione fondamentale utilizzata in modo pesante nella trattazione precedente è quella di gas fortemente diluito (1.9). Utilizzando le quantità in tabella 1.2 si ottiene (stima conservativa):

$$\bar{n} a_s^3 \sim 2 \times 10^{-5} \ll 1$$

e quindi l'approssimazione di gas diluito è anch'essa largamente verificata.

Resta infine da discutere l'approssimazione di Thomas-Fermi (1.15):

$$\frac{N a_s}{a_\perp^{(arm)}} > \frac{N a_s}{a_z^{(arm)}} \simeq 240 \gg 1$$

e quindi anche questa approssimazione può considerarsi verificata negli esperimenti oggetto di questo lavoro. È importante sottolineare che se l'approssimazione di Thomas-Fermi può perdere di validità, questo accade solo in prossimità di $r = R$ dove il gradiente di densità è massimo (e in approssimazione di TF addirittura discontinuo). Tuttavia, con uno sviluppo in serie rispetto al parametro

piccolo a_{ho}/R dato dalla (1.18), si può dimostrare [17] che la discontinuità viene mediata su una distanza pari a circa il 10% del raggio di TF radiale e di circa il 3% di quello assiale e che la prima correzione al potenziale chimico, e di conseguenza alla densità di picco, che è una delle quantità misurate sperimentalmente (cfr. §3.1.7), è inferiore allo 0.5%.

Capitolo 2

I reticoli ottici

L'azione di un campo elettrico di radiazione non risonante su un campione di atomi freddi dipende dal gradiente di intensità di tale radiazione e dallo stato interno e di moto degli atomi. Tale interazione *di dipolo*, in virtù della sua intensità e del ridotto riscaldamento che induce è lo strumento fondamentale per la manipolazione non dissipativa degli atomi freddi ed in particolare del condensato di Bose-Einstein [27].

Lo schema di questo capitolo è il seguente: nel primo paragrafo vengono presentate le approssimazioni in cui si definisce il potenziale dipolare e la sua forma esplicita in funzione dei parametri sperimentali. Nel secondo paragrafo viene definito il reticolo ottico: si mostra come due laser contropropaganti, tra cui esista una ben definita relazione di fase, costituiscono un potenziale periodico nel cui sistema di riferimento gli atomi possono essere messi in moto con velocità controllata (vedremo al paragrafo 3.2 come questo possa essere praticamente realizzato). Nel paragrafo successivo vengono discussi gli effetti dovuti al moto degli atomi che complicano il quadro delineato in precedenza. Nel paragrafo 2.4 si presentano per sommi capi gli effetti del reticolo ottico sulla dinamica del condensato di Bose-Einstein. In particolare si presenta l'approccio delle onde di Bloch lineari e si mostra come sia possibile preparare il condensato in uno stato di singola onda di Bloch.

Il capitolo si conclude con uno studio della stabilità del sistema: viene messo in rilievo come esistano due regimi diversi di instabilità. Viene quindi presentato un modello unidimensionale in cui calcolare la soglia per l'instaurarsi di queste instabilità in dipendenza dalla densità del campione e dall'entità del potenziale periodico.

2.1 Il potenziale dipolare

Consideriamo un atomo nello stato fondamentale che si muova lentamente in una zona dello spazio in cui sia presente della luce laser la cui frequenza ω_L sia vicina a quella di una transizione atomica ω_0 , ma lontana dalle altre (approssimazione di atomo a due livelli). Consideriamo il caso in cui l'intensità media del campo laser vari con la posizione (ad esempio perché il modo del campo elettrico è gaussiano) e supponiamo di poter considerare il pacchetto d'onda atomico localizzato rispetto alla radiazione sia in termini di posizione, sia in termini di velocità. Questo equivale a richiedere che le dimensioni atomiche siano molto minori della lunghezza d'onda ($\Delta r \ll \lambda_L$) e che lo spostamento dovuto all'effetto Doppler sia piccolo in confronto alla larghezza naturale della transizione che si sta considerando, Γ [29]:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \ll \Gamma \quad (2.1)$$

Il principio di indeterminazione impone che $\Delta r \times \Delta v > h/m$ e quindi le due condizioni precedenti possono essere soddisfatte contemporaneamente solo se [29]:

$$E_{rec} = \frac{\hbar^2 k_L^2}{2m} \ll \hbar \Gamma \quad (2.2)$$

cioè se la variazione di energia cinetica associata all'emissione (o all'assorbimento) di un fotone della radiazione (energia di rinculo) è molto piccola rispetto alla larghezza intrinseca in energia della transizione che si sta prendendo in considerazione.

A queste condizioni diviene possibile definire la frequenza di Rabi della transizione:

$$\hbar\Omega_0 = -\mathbf{d}_{fe} \cdot \mathbf{E}_0 > 0 \quad (2.3)$$

dove $\mathbf{d}_{fe}$ indica l'elemento di matrice dell'operatore di dipolo elettrico e $\mathbf{E}_0$ l'ampiezza del campo elettrico. Se indichiamo con $\delta_L = \omega_L - \omega_0$ il *detuning* del laser dalla frequenza di risonanza e supponiamo di essere nell'approssimazione di rigo ben risolta:

$$\Omega = \sqrt{\Omega_0^2 + \delta_L^2} \gg \Gamma \quad (2.4)$$

l'effetto della radiazione sugli atomi è quello di introdurre uno spostamento dei livelli di energia (*effetto Stark dinamico*) che agisce come un potenziale conservativo (*potenziale dipolare*). Introdotto il parametro di saturazione:

$$\Omega_s(\mathbf{r}) = \frac{\Omega_0^2(\mathbf{r})}{2\delta_L^2} \quad (2.5)$$

se vale anche l'approssimazione di saturazione trascurabile

$$\Omega_s \ll 1 \quad (2.6)$$

si ha che il potenziale di dipolo assume la forma [28, 29, 30]:

$$V_{DIP}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar\delta_L}{2} \Omega_s(\mathbf{r}) = \frac{\hbar\Omega_0^2(\mathbf{r})}{4\delta_L} \simeq \frac{\hbar\Omega}{2} \quad (2.7)$$

In questo contesto l'effetto della forza di dipolo può essere descritto in maniera semplice a seconda del segno del *detuning*. Supponiamo che l'atomo entri nella zona di interazione nello stato fondamentale, se il *detuning* è rosso ($\delta_L < 0$) l'atomo risentirà di un potenziale che è minimo in corrispondenza di un massimo di intensità ed è quindi attirato verso zone di alta intensità; se il *detuning* è blu viceversa ($\delta_L > 0$) l'atomo risente di un potenziale che è minimo in corrispondenza della minima intensità ovvero sarà respinto dalle zone dove l'intensità è elevata. Introducendo l'espressione della larghezza naturale in approssimazione semiclassica [31]:

$$\Gamma = \frac{\omega_0^3}{3\pi\epsilon_0\hbar c^3} |\mathbf{d}_{fe}|^2$$

e dell'intensità nel Sistema Internazionale:

$$I(\mathbf{r}) = \frac{c\epsilon_0}{2} |\mathbf{E}_0(\mathbf{r})|^2$$

si ottiene un'espressione del potenziale di dipolo usata frequentemente in letteratura [32]:

$$V_{DIP}(\mathbf{r}) \simeq \frac{3\pi c^2}{2\omega_0^3} \frac{\Gamma}{\delta_L} I(\mathbf{r}) \quad (2.8)$$

Si noti che il potenziale risulta direttamente proporzionale all'intensità ed inversamente proporzionale al *detuning*.

2.2 Il reticolo ottico

Consideriamo due fasci laser contropropaganti entrambi polarizzati linearmente lungo lo stesso asse e indichiamo con z l'asse di propagazione, con E , con k_1 e ω_1 rispettivamente l'ampiezza del campo, il vettore d'onda e la frequenza (angolare) di uno dei due fasci, allora si può porre:

$$E_1(z, t) = E_1 \cos(k_1 z - \omega_1 t) \quad (2.9)$$

$$E_2(z, t) = E_2 \cos((k_1 + \Delta k)z + (\omega_1 + \Delta\omega)t) \quad (2.10)$$

dove si è trascurata una eventuale differenza di fase costante tra le due onde. Nel seguito supporremo che le quantità indicate con Δ siano molto minori delle quantità a cui vengono sommate.

L'intensità risultante dalla sovrapposizione dei due campi è data da:

$$\begin{aligned} I(z, t) &= c\epsilon_0 (E_1 + E_2)^2 = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + c\epsilon_0 (E_1 \cdot E_2) \times \\ &\times \cos(\Delta\omega t + 2kz) + f(z) \cos(2\omega t) \end{aligned} \quad (2.11)$$

dove si sono introdotti

$$2\omega = 2\omega_1 + \Delta\omega \simeq 2\omega \pm \Delta\omega \quad (2.12)$$

$$2k = 2k_1 + \Delta k \simeq 2k_1 \quad (2.13)$$

e si sono indicate con $\bar{I}_i$ le intensità medie di ciascuno dei due fasci ($c\epsilon_0 E_i^2/2$) e con f una funzione dipendente dalla sola posizione. Questo termine sarà trascurato nel seguito perchè, ai fini di determinare il potenziale effettivo agente sugli atomi, occorre mediare su tempi di diversi cicli ottici corrispondenti alla scala temporale della dinamica degli atomi (dell'ordine della larghezza naturale Γ , nell'ipotesi di saturazione trascurabile). A seguito di tale media temporale il contributo del termine $\cos(2\omega t)$ diviene quindi trascurabile.

Ciò posto, si ottiene che l'intensità totale assume la forma:

$$I(z, t) = I_S + I_M \cos(\Delta\omega t + 2kz) \quad (2.14)$$

dove $I_S = \bar{I}_1 + \bar{I}_2$ e $I_M = 2\sqrt{\bar{I}_1 \bar{I}_2}$. Notiamo qui che queste due quantità sono uguali al primo ordine nella differenza $E_1 - E_2$.

Ricordando l'espressione (2.7) (o analogamente la (2.8)) si ottiene che, a meno di un termine costante, il potenziale di dipolo creato dai due fasci contropropaganti è dato da:

$$V_{LAT}(z, t) = U_L \cos\left(\Delta\omega t + \frac{2\pi}{\lambda/2}z\right) \quad (2.15)$$

Quest'ultima relazione viene spesso scritta introducendo il parametro adimensionale s , usando come unità naturale l'energia di rinculo $E_{rec} = \hbar^2 k^2 / 2m$:

$$V_{LAT}(z, t) = \frac{s E_{rec}}{2} \cos\left(\Delta\omega t + \frac{2\pi}{\lambda/2}z\right) \quad (2.16)$$

Dalla formula precedente appaiono chiaramente due aspetti caratteristici del sistema considerato:

- Il potenziale creato dai due fasci presenta una periodicità nello spazio reale pari a $\lambda/2$ lungo la direzione di propagazione; da qui la denominazione di *reticolo ottico unidimensionale*.
- Variando opportunamente la differenza di frequenza tra i due fasci si può ottenere che il potenziale periodico si muova con velocità fissata nel sistema

di riferimento del laboratorio:

$$v_{LAT} = \left. \frac{dz}{dt} \right|_V = \frac{\partial_t V_{LAT}}{\partial_z V_{LAT}} = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{2} \Delta\nu \quad (2.17)$$

di conseguenza tale reticolo ottico è detto *mobile*.

Negli esperimenti effettuati sarà utilizzato un sistema di riferimento inerziale a velocità v_{LAT} : in tale sistema di riferimento potremo considerare il reticolo come un'onda stazionaria e gli atomi in moto con velocità $-v_{LAT}$.

2.3 Effetti spurî

Come già accennato, almeno due effetti intervengono a complicare il quadro delineato in precedenza: le fluttuazioni del potenziale dipolare dovute all'emissione spontanea e l'effetto viscoso dell'interazione atomo-campo laser. In questo paragrafo discuteremo il ruolo di questi due effetti.

2.3.1 Diffusione di fotoni

Nel paragrafo 2.1 il valore medio del potenziale di dipolo (2.7) è ricavato nell'ipotesi che l'atomo sia fermo e che il potenziale dipolare non dipenda dalla velocità degli atomi.

Se la prima assunzione può essere considerata corretta se vale la (2.1), la seconda approssimazione è tanto più corretta quanto meno repentina è la variazione spaziale del potenziale. Infatti nel limite di potenziale costante (e quindi indipendente dalla posizione) l'impulso è una costante del moto. Il momento degli atomi è alterato dalla presenza della radiazione per effetto del rinculo associato ad ogni assorbimento o emissione (spontanea e stimolata) di fotoni. In corrispondenza di ciascuno di questi eventi, per la conservazione della quantità di moto, l'atomo acquista un momento pari ad $\hbar\mathbf{k}$ dove $\mathbf{k}$ indica il vettore d'onda del fotone assorbito o l'opposto del vettore d'onda del fotone emesso. Questo effetto,

per un insieme di atomi, si può trattare nelle approssimazioni da noi usate (al primo ordine in Ω_s) come un fenomeno diffusivo (cfr. [28] in particolare §IV.E.2 e VI.E.4.c e [29, 30, 33]) il cui coefficiente è dato da [30]:

$$2D_p = \frac{\partial}{\partial t}(\langle |\mathbf{p}|^2 \rangle - (\langle |\mathbf{p}| \rangle)^2) = \frac{\hbar^2}{2} \Gamma \Omega_s \left(k_L^2 + \left| \frac{\nabla_{\mathbf{r}} \Omega_0}{\Omega_0} \right|^2 \right) \quad (2.18)$$

dove come al solito le parentesi angolate indicano medie quantomeccaniche e statistiche.

Dalla definizione risulta chiaro che il coefficiente $2D_p$ rappresenta la velocità di evoluzione della varianza del momento degli atomi nel campione:

$$\sigma_p^2(t) = \sigma_p^2(0) + 2D_p t \quad (2.19)$$

L'equazione (2.18) contiene due termini: il primo è riconducibile all'emissione spontanea e si trova spesso scritto in termini di tasso di diffusione di fotoni. Se infatti si tiene conto che il quadrato del momento trasferito è $\hbar^2 k_L^2$ si ha immediatamente che:

$$\Gamma_{sc} = \frac{2D_p}{\hbar^2 k_L^2} = \frac{\Gamma}{2} \Omega_s = \frac{1}{\hbar} \frac{\Gamma}{\Delta} V_{DIP} = \frac{3\pi c^2}{2\hbar \omega_0^3} \left(\frac{\Gamma}{\Delta} \right)^2 I \quad (2.20)$$

dove nell'ultimo passaggio si è usata la forma del potenziale dipolare in cui compare esplicitamente l'intensità (2.8).

Il secondo termine dell'equazione (2.18) contiene invece l'informazione sull'effetto dell'assorbimento e dell'emissione stimolata ovvero delle fluttuazioni della pressione di radiazione e della forza di dipolo ¹. Per un'onda stazionaria questo secondo termine assume la forma [30]:

$$\left| \frac{\nabla_{\mathbf{r}} \Omega_0^{(LAT)}}{\Omega_0^{(LAT)}} \right|^2 = k_L^2 \tan^2(k_L z) \quad (2.21)$$

¹In realtà nel nostro formalismo che ha eliminato la fase della frequenza di Rabi gli effetti di pressione di radiazione non compaiono, ma essi sono trascurabili se lo è lo spostamento Doppler (2.1)

Ambedue i contributi al coefficiente di diffusione sono dipendenti dalla posizione dell'atomo nell'onda stazionaria, ma la loro somma non lo è [30]:

$$2D_p = \frac{\hbar^2 k_L^2}{2} \Gamma \Omega_s^{(MAX)} \cos^2(k_L z) (1 + \tan^2(k_L z)) = \frac{\hbar^2 k_L^2}{2} \Gamma \Omega_s^{(MAX)} \quad (2.22)$$

Come si evince dalla (2.22), ricordando la definizione di Ω_s , il tasso di diffusione di fotoni è inversamente proporzionale al quadrato del *detuning* e direttamente proporzionale all'intensità. Questo fa sì che a parità di altezza del reticolo (I/Δ fissato) aumentare il *detuning* riduca il riscaldamento e quindi aumenti la vita media del condensato.

2.3.2 Effetti viscosi

La componente viscosa, cioè dipendente dalla velocità, della forza esercitata dal laser sugli atomi può essere calcolata a partire da [29]:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\mathcal{H}, \hat{\mathbf{p}}] = -\nabla_{\mathbf{r}} H = -\nabla_{\mathbf{r}} H_{INT} \quad (2.23)$$

Se la velocità atomica, come abbiamo postulato, soddisfa al requisito (2.1), il valor medio di tale forza si scompone in due parti di cui una conservativa già trattata in precedenza ed una rigorosamente viscosa, cioè lineare nella velocità. L'espressione risultante per la componente viscosa è, al primo ordine significativo in Ω_s [29, 30]:

$$\bar{f}_v = \hbar k^2 \frac{\delta}{\Gamma} (\Omega_s/2)^3 v \quad (2.24)$$

Trascurare tale componente viscosa è lecito se:

$$\frac{\bar{f}_v}{f_l} = \frac{\bar{f}_v}{\nabla_{\mathbf{r}} V_{LAT}} \ll 1$$

cioè se la forza esercitata dal reticolo (f_l) è molto superiore alla componente viscosa.

Sostituendo l'espressione (2.24) per la componente viscosa e l'espressione (2.15) per il potenziale di reticolo si ottiene, ricordando l'approssimazione (2.1):

$$\frac{\bar{f}_v}{f_c} \ll \Omega_s^3 \quad (2.25)$$

Di conseguenza nell'approssimazione di saturazione trascurabile è lecito trascurare anche gli effetti viscosi della forza di dipolo.

2.4 Il condensato di Bose-Einstein nel reticolo

Come emerge dall'analisi svolta nel primo capitolo, la caratteristica peculiare del condensato di Bose-Einstein è quella di costituire un sistema macroscopico, cioè costituito da molte particelle, di cui si può definire una funzione d'onda che si estende sulla scala delle decine di micrometri. Questo comporta che, rispetto ad un reticolo ottico all'estremo rosso dello spettro visibile ($\lambda/2 \sim 400\text{nm}$), il condensato si estende su alcune centinaia di siti reticolari. A questo corrisponde una larghezza nello spazio degli impulsi molto piccola e trascurabile in confronto all'impulso di rinculo. Usando la (1.20) e prendendo come valori tipici $R_{TF} \simeq 50\mu\text{m}$ e $\lambda \simeq 800\text{nm}$ si ha infatti:

$$\frac{\Delta p}{\hbar k} = \sqrt{\frac{21}{8}} \frac{\hbar \lambda}{h R_{TF}} \simeq 0.3 \frac{\lambda}{R_{TF}} \simeq 4 \times 10^{-3} \quad (2.26)$$

Questi due fatti consentono di trattare in prima approssimazione il condensato nel reticolo come un'onda piana immersa in un potenziale periodico. Questo è tanto più vero se la direzione in cui è presente il reticolo è quella meno confinata: in questa direzione infatti l'estensione spaziale del condensato è massima e quindi minore la larghezza nello spazio degli impulsi.

2.4.1 Il condensato come onda di Bloch

Seguendo l'approccio delineato nell'introduzione il sistema costituito dal condensato di Bose-Einstein nello stato fondamentale del potenziale armonico² e immerso nel reticolo ottico, rientra nelle ipotesi del teorema di Bloch [34].

Si possono pertanto definire un indice di banda discreto n ed un impulso relativo

²In pratica si considera lo stato fondamentale in approssimazione di Thomas-Fermi.

al reticolo, detto quasi-impulso, $\hbar q$ continuo e periodico di periodo $2\pi\hbar/(\lambda/2) = 2\hbar k$. Per mezzo di queste quantità le autofunzioni del sistema, dette *onde di Bloch*, si possono scrivere nello spazio reale come:

$$\langle z | n, q \rangle = e^{iqz} u_{n,q}(z) \quad (2.27)$$

dove u è una funzione periodica di periodo $d = \lambda/2$ e soluzione del problema di Schrödinger:

$$\left(\frac{\hbar^2}{2m} (-i\nabla_z + q)^2 + V_{LAT}(z) \right) u_{n,q}(z) = E_{n,q} u_{n,q}(z) \quad (2.28)$$

Nel seguito indicheremo con $\hbar q_B = \hbar k$ il quasi-impulso corrispondente al bordo della zona di Brillouin. Come segue dalla (2.27), lo spettro delle onde di Bloch nello spazio degli impulsi è discreto e si potrà scrivere [5]:

$$|n, q\rangle = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{n,q} |q + 2jk\rangle \quad (2.29)$$

dove $|q + 2jk\rangle$ indica l'onda piana $\exp(-i(q + 2jk)z)$. Questa periodicità nello spazio degli impulsi può anche essere vista come conseguenza dell'interazione coerente tra gli atomi ed i due fasci laser: lo stato degli atomi è una sovrapposizione coerente di diversi stati di impulso determinati dal fatto che l'atomo può continuamente subire un processo al secondo ordine in cui assorbe un fotone da uno dei due fasci costituenti il reticolo e lo riemette nell'altro. Pertanto il sistema atomico si trova in una sovrapposizione coerente di stati di momento che differiscono di una quantità di moto pari a $2\hbar k$. Torneremo su questa analogia al paragrafo 4.2 quando descriveremo il metodo usato sperimentalmente per tarare l'altezza del reticolo.

Ogni perturbazione esterna, incluse variazioni nel potenziale armonico, sufficientemente deboli da escludere transizioni interbanda³ possono essere trattate

³Qualitativamente un criterio è che la variazione in energia sulla scala del condensato sia piccola rispetto al gap tra la prima e la seconda banda.

in approssimazione semiclassica [34]. In questo contesto la velocità del centro di massa del condensato rispetto al reticolo è data da:

$$v_{n,q} = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E_{n,q}}{\partial q} \quad (2.30)$$

mentre il condensato stesso si comporta rispetto alla perturbazione agente lungo l'asse del reticolo come se avesse una *massa efficace* data da:

$$m_{n,q}^* = \hbar^2 \left(\frac{\partial^2 E_{n,q}}{\partial q^2} \right)^{-1} \quad (2.31)$$

Con queste definizioni, in approssimazione semiclassica, il moto del pacchetto d'onda di Bloch può essere ricavato a partire dalle equazioni seguenti [34]:

$$\begin{cases} \dot{z} &= v_{n,q} \\ \hbar \dot{q} &= F_z \end{cases} \quad (2.32)$$

dove F_z indica la forza esterna che agisce come perturbazione.

2.4.2 Preparazione di singole onde di Bloch

La composizione della funzione d'onda del condensato in termini di onde di Bloch può essere ottenuta dalla (2.29) considerando come già detto il condensato come un'onda piana. Di conseguenza, accendendo improvvisamente il reticolo, il condensato sarebbe proiettato su onde di Bloch appartenenti a tutte le bande, dato che nella (2.29) non compaiono regole di selezione per n . Questo renderebbe impossibile uno studio sistematico delle proprietà del sistema e quindi deve essere evitato dal punto di vista sperimentale.

Per preparare il condensato in un singolo stato di Bloch esistono due diversi approcci: il primo è creare il condensato direttamente nel potenziale combinato armonico e periodico (cfr. ad esempio [12]). Così facendo infatti il sistema per così dire “nasce” nello stato fondamentale che appartiene alla prima banda di Bloch.

Negli esperimenti oggetto di questo lavoro invece viene utilizzata un'altra procedura: il condensato viene prodotto nel potenziale armonico e quindi il reticolo viene acceso in un tempo δt . Se tale tempo soddisfa al requisito di adiabaticità [36]:

$$\left| \langle n, q | \frac{\delta V}{\delta t} | 0, q \rangle \right| \ll \frac{1}{\hbar} \Delta E_{n,q}^2 \quad (2.33)$$

dove $\Delta E_{n,q}$ indica la differenza $E_{n,q} - E_{0,q}$, si ha che la probabilità che una frazione di popolazione venga trasferita nello stato $|n, q\rangle$ è trascurabile e tutta la popolazione si troverà nell'onda di Bloch $|0, q\rangle$. Soddisfare a tale criterio di adiabaticità è cruciale per gli esperimenti riportati in questo lavoro e su di esso torneremo successivamente.

Fisicamente questa procedura corrisponde ad una deformazione lenta dello spettro del sistema che passa da quello di onda piana $E_q = \hbar^2 q^2 / 2m$ a quello di onda di Bloch $E_{n,q}$. Come è facile rendersi conto osservando lo spettro di Bloch nello schema cosiddetto di zona ripetuta riportato in figura 2.1, il sistema verrà trasferito nello stato $|0, q\rangle$ se $q < q_B$ in quello $|1, q\rangle$ se $q_B < q < 2q_B$ e così via. In realtà, partendo da un'onda stazionaria, l'unico valore di quasi-impulso accessibile è $q = 0$ come deriva immediatamente dalla (2.29). Tuttavia è sufficiente ricordare che, nel sistema di riferimento solidale con il reticolo mobile, il condensato è rappresentato da un'onda piana avente momento $p = -mv_{LAT}$. Di conseguenza, fissando la velocità del reticolo, è possibile trasferire adiabaticamente l'intera popolazione atomica nell'onda di Bloch $|i, mv_{LAT}/\hbar\rangle$ dove, per quanto detto sopra, i è la parte intera di q/q_B . Naturalmente in prossimità del bordo tra due bande, dove la differenza in energia tende a zero con n , sarà impossibile soddisfare al requisito di adiabaticità e di conseguenza questi stati non saranno accessibili dal punto di vista sperimentale.

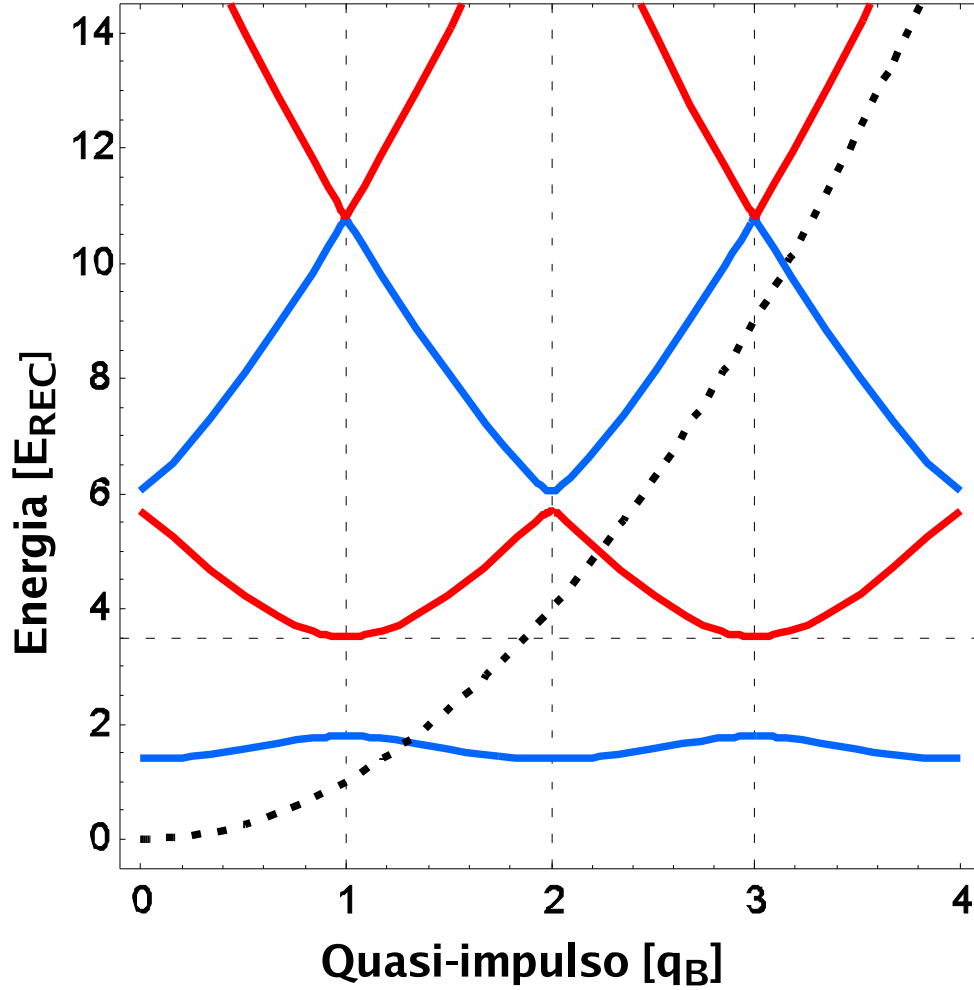


Fig. 2.1: Schema dei livelli di Bloch per un potenziale periodico con $s = 3.5$. L'energia $E_{n,q}$ è calcolata approssimando le onde di Bloch come una somma di 9 onde piane (cioè inserendo $j_{MAX} = 4$ nella (2.29)) ed è corretta entro lo spessore delle linee. La prima e la terza banda sono colorate in blu, la seconda e la quarta in rosso. La linea tratteggiata è lo spettro parabolico di particella libera, la linea orizzontale infine corrisponde all'altezza del potenziale periodico. Il requisito di adiabaticità (2.33) è più facile da soddisfare laddove non ci sono livelli vicini a quello che si vuole raggiungere. Di conseguenza il trasferimento adiabatico è più facile a centro banda e più difficile al bordo. Nel caso illustrato in figura ad esempio per $q = 3q_B$ vengono popolate necessariamente sia la terza sia la quarta banda.

2.5 Regimi di instabilità

Per investigare l'origine dell'instabilità occorre necessariamente considerare l'equazione di Gross-Pitaevskii (1.12). La stabilità di tale equazione può essere indagata da un punto di vista formale adottando un approccio perturbativo in approssimazione lineare.

Emergono così due tipi di instabilità: una di tipo energetico collegata appunto all'energia del sistema e quindi alla struttura dell'hamiltoniana ed una dinamica data da eccitazioni la cui ampiezza cresce esponenzialmente nel tempo e quindi legata alle equazioni di moto. È proprio la presenza della non linearità dovuta alle interazioni che determina la differenza tra questi due fenomeni. Si può infatti verificare [40] che l'instabilità dinamica implica quella energetica, mentre non vale il viceversa.

2.5.1 Instabilità energetica

In approssimazione di Bogoliubov (1.8), dalla hamiltoniana (1.7), includendo il potenziale periodico, si può costruire il funzionale energia $E[\Phi]$. Detta $\Phi_0(z, r_\perp) \exp(i\mu t)$ la soluzione di cui si vuole studiare la stabilità, imponendo una variazione della funzione del tipo $\Phi = \Phi_0 + \delta\Phi$, si ottiene un'espansione di E al secondo ordine in $\delta\Phi$:

$$E = E[\Phi_0] + \delta E_1 + \delta E_2 \quad (2.34)$$

dove δE_1 è nullo se Φ_0 è soluzione dell'equazione non lineare (1.13). La variazione δE_2 è un funzionale quadratico che può essere scritto in forma compatta come [39]:

$$\delta E_2 = \frac{1}{2} \int \delta\Phi^\dagger A \delta\Phi \, d\mathbf{r} \quad (2.35)$$

dove si sono introdotti il vettore

$$\delta\Phi = \begin{pmatrix} \delta\Phi \\ \delta\Phi^* \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

e la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \mathcal{L} & U_0 \Phi^2 \\ U_0 (\Phi^*)^2 & \mathcal{L} \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

in cui a sua volta $\mathcal{L}$ indica

$$\mathcal{L} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) + 2U_0 |\Phi_0|^2 - \mu \quad (2.38)$$

e la quantità μ , che ha il significato di potenziale chimico del sistema, proviene dal vincolo di numero di atomi fissato.

La matrice A è hermitiana e quindi ha solo autovalori reali. La condizione di stabilità energetica è che tutti questi autovalori siano positivi: questo implica che la configurazione stazionaria scelta è una configurazione di minimo dell'energia. Se viceversa esistono autovalori negativi, allora esiste per lo stato Φ_0 una perturbazione che conduce verso stati a minore energia e quindi più stabili.

L'equazione di Gross-Pitaevskii tuttavia, descrive per ipotesi una evoluzione unitaria in cui sono conservati sia il numero di atomi N , sia l'energia E . Ne consegue che la teoria non prevede transizioni verso altri stati che possono verificarsi solo in presenza di fenomeni dissipativi. Di conseguenza il regime di instabilità energetica è difficilmente modellizzabile dal punto di vista teorico se non si conoscono esattamente i meccanismi dissipativi cui il sistema è sottoposto.

2.5.2 Instabilità dinamica

Per valutare la stabilità dinamica del sistema cioè la capacità del sistema di restare in un intorno di una configurazione di equilibrio a seguito di perturbazioni dipendenti dal tempo occorre partire dall'equazione di Gross-Pitaevskii dipendente dal tempo (1.12). Sia $\Phi_0(z, r_\perp; t)$ una soluzione di tale equazione e consideriamo una perturbazione $\delta\Phi(z, r_\perp; t)$. L'equazione (1.12) può essere a questo punto linearizzata con uno sviluppo al primo ordine nella perturbazione. L'equazione di moto che si ottiene è [39]:

$$i\hbar \frac{\partial \delta\Phi}{\partial t} = \sigma_z A \delta\Phi \quad (2.39)$$

dove i simboli sono gli stessi del caso precedente e σ_z indica la matrice di Pauli:

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice $\sigma_z A$ non è hermitiana e quindi può avere autovalori complessi. Sia $\lambda = \hbar(\omega_r + i\omega_i)$ uno di tali autovalori e $\delta\Phi_\lambda(z, r_\perp, t)$ il corrispondente autovettore. L'equazione (2.39) può essere scritta per tale perturbazione come:

$$i\hbar \frac{\partial \delta\Phi_\lambda}{\partial t} = \lambda \delta\Phi_\lambda \quad (2.40)$$

che si risolve facilmente ottenendo come soluzione:

$$\delta\Phi_\lambda(z, r_\perp; t) = \delta\Phi_\lambda(z, r_\perp; 0) \exp(\omega_i t) \exp(-i\omega_r t) \quad (2.41)$$

Si può dimostrare [40] che se esiste l'autovalore complesso λ allora esiste anche il suo complesso coniugato λ^* . Questo ha come conseguenza che, se esiste un autovalore complesso ($\omega_i \neq 0$), allora esiste una perturbazione la cui ampiezza cresce esponenzialmente ($\omega_i > 0$) portando il sistema lontano dalla soluzione di equilibrio. Il sistema è quindi *dinamicamente stabile* se lo spettro di $\sigma_z A$ contiene solo autovalori reali ($\omega_i = 0$).

Contrariamente al caso precedente di instabilità energetica, questi modi dinamicamente instabili possono essere descritti nell'ambito dell'equazione di Gross-Pitaevskii dato che queste eccitazioni sono contenute nell'equazione stessa. Tuttavia quando l'ampiezza di questi modi cresce l'approssimazione lineare (2.39) non è più valida e quindi il modello da noi adottato viene a cadere.

Come già evidenziato in alcuni lavori teorici [38, 39, 40] questa instabilità dinamica non esiste né per il condensato in assenza di potenziale periodico né per il condensato in regime di interazioni trascurabili (in questo caso, corrispondente a $U_0 = 0$, la matrice $\sigma_z A$ è infatti diagonale e reale) ed è un fenomeno tipico dell'equazione d'onda non lineare data dalla combinazione delle interazioni e del potenziale periodico.

2.5.3 Limiti di stabilità: modello unidimensionale

Per ottenere una stima, analitica o numerica, della soglia per l'insorgere dei due regimi di instabilità occorre necessariamente introdurre qualche approssimazione per valutare gli autovalori della matrice A (2.37) e della matrice $\sigma_z A$.

Esistono fondamentalmente due differenti approcci al problema: nei loro lavori di Wu e Niu [40, 41] hanno studiato il problema della stabilità ignorando i gradi di libertà trasversi (equazione di Gross-Pitaevskii unidimensionale) ed imponendo per l'autofunzione del condensato una forma tipo onda di Bloch (2.27). Inserendo questo *ansatz* nell'equazione di Gross-Pitaevskii (1.12), si ottengono delle soluzioni che possono essere considerate delle “onde di Bloch non lineari” il cui spettro dipende, proprio come nel caso lineare, da un indice di banda e un quasi-impulso, continuo e periodico con la periodicità del reticolo reciproco. La differenza fondamentale tra queste onde e il loro corrispettivo lineare (cioè in assenza di interazioni) è che gli stati ottenuti dall'*ansatz* (2.27) non sono le uniche soluzioni dell'equazione di Gross-Pitaevskii dipendente dal tempo, ma ne esistono altre anche di natura localizzata (solitonica) [37], non commensurata con il reticolo [42] o aventi periodicità multipla di quella del reticolo ottico [39]. La stabilità delle onde di Bloch non lineari viene analizzata usando una perturbazione avente a sua volta la periodicità del reticolo e caratterizzata da un impulso k_e rispetto al reticolo. Nell'ambito di questo formalismo vengono calcolati numericamente i limiti per l'instabilità dinamica ed energetica.

Un approccio simile a quello di Wu e Niu è seguito da Machholm, Petchick e Smith [39] che focalizzano la loro attenzione sulla struttura delle bande energetiche e specializzano lo studio della stabilità a agli stati che non hanno un corrispettivo lineare.

Un approccio diverso prende le mosse dall'equazione di Schrödinger discreta [37, 38, 43] e ricava lo spettro delle eccitazioni in approssimazione di Bogolioubov ottenendo anche le condizioni per l'instaurarsi dei due regimi di instabilità.

In linea di principio è possibile svolgere il calcolo numerico direttamente a

partire dall'equazione di Gross-Pitaevskii. Tuttavia, come già accennato al paragrafo 1.3, la mole di calcolo richiesta è notevole e per questo si ricorre a modelli unidimensionali. Tra questi l'equazione di Schrödinger non-polinomiale presenta il vantaggio, rispetto al modello in cui i gradi di libertà radiali sono completamente ignorati (GPE-1D), di ottenere, per quei parametri con cui si confrontano i risultati sperimentali, valori più fedeli a quelli del caso tridimensionale. Per semplicità tuttavia presentiamo qui l'approccio delle onde non lineari di Bloch nel caso strettamente unidimensionale. Trascurando i gradi di libertà radiali l'operatore $\mathcal{L}$ che compare nella (2.38) assume la forma:

$$\mathcal{L} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{d}{dz} \right)^2 + V(z) + 2U_0|\Phi_0|^2 - \mu \quad (2.42)$$

Se a questo punto si ipotizza per la funzione Φ_0 la forma:

$$\Phi_0(z) = F_0(z) e^{iqz} \quad (2.43)$$

e si tratta la perturbazione come

$$\delta\Phi = e^{iqz} [u_{k_e}(z) e^{ik_e z} + v_{k_e}^*(z) e^{ik_e z}] \quad (2.44)$$

dove u e v hanno la periodicità del reticolo diretto e k_e è il momento dell'eccitazione nel sistema di riferimento del reticolo, si ha che il vettore di perturbazione assume la forma:

$$\delta\Phi = \begin{pmatrix} u_{k_e} \\ v_{k_e} \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

A sua volta la matrice A diviene [39]:

$$A = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_+ & U_0\Phi^2 \\ U_0(\Phi^*)^2 & \mathcal{L}_- \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

dove $\mathcal{L}_\pm$ indica:

$$\mathcal{L}_\pm = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{d}{dz} + i(\pm q + k_e) \right)^2 + V(z) + 2U_0|\Phi_0|^2 - \mu \quad (2.47)$$

A questo punto si sviluppano u e v sulla base delle onde piane e, conservando solo un numero finito di queste onde piane, si riduce il problema al calcolo di autovalori di una matrice nel campo dei numeri complessi. I risultati numerici possono essere utilizzati per ottenere informazioni sulla soglia per i due regimi di instabilità e sulla velocità di crescita dei modi instabili, ovvero sul valore di ω_i che compare nella (2.41). Questa quantità, come si evince dalla (2.41), è legata al tasso di perdita di atomi da parte del condensato che, come vedremo al capitolo 4, è la quantità che è stata misurata sperimentalmente. Se si considera un condensato cilindrico, cioè si trascura il confinamento assiale, nel limite di $s \rightarrow 0$, la funzione d'onda del condensato, soluzione dell'equazione di Gross-Pitaevskii unidimensionale, è l'onda piana (cfr. §2.4.1): $\Phi_0(z) = \sqrt{n} \exp(iqz)$, dove n indica la densità media del campione. Per quanto riguarda l'instabilità energetica questa approssimazione introduce una grande semplificazione perché la matrice A si riduce ad una matrice 2×2 da cui si ottiene che il sistema è dinamicamente stabile ($\det(A) \neq 0$) se [39]:

$$q^2 < \frac{k_e^2}{4} + \left(\frac{m v_s}{\hbar} \right)^2 \quad (2.48)$$

dove v_s indica la velocità del suono che è data da [17]:

$$v_s = \left(\frac{n U_0}{m} \right)^{1/2} \quad (2.49)$$

dove U_0 è dato dalla (1.10). Questo spiega perché alcuni autori definiscono questo tipo di instabilità come instabilità di Landau: in assenza di confinamento, per quei valori di s e q per cui si può assumere $v \propto q$, la condizione di stabilità del moto superfluido del condensato nel limite idrodinamico ($k_e \rightarrow 0$) è che la velocità del condensato sia inferiore alla velocità del suono, noto come criterio di Landau.

Per quanto riguarda invece l'instabilità dinamica che, come detto, è un fenomeno che insorge solo in presenza di *sia* del potenziale periodico *sia* delle interazioni, anche in queste approssimazioni non è banale ricavare espressioni analitiche. Ci

limitiamo a riportare l'espressione che si può derivare nel limite di potenziale periodico debole $s \ll 1$. In questo regime il sistema è dinamicamente stabile fino a che [39, 41]:

$$|q| < q_B \sqrt{\frac{nU_0}{2E_{rec}} + \frac{1}{4}} \quad (2.50)$$

Capitolo 3

L'apparato sperimentale

In questo capitolo viene descritto l'apparato per la produzione del condensato di Bose-Einstein di ^{87}Rb e la generazione del reticolo ottico unidimensionale attivo presso il LENS di Firenze. Ulteriori dettagli sui diversi aspetti dell'apparato possono essere trovati in [44, 45].

3.1 Produzione del condensato

In questo paragrafo si descrive come viene realizzato il condensato di Bose-Einstein studiato negli esperimenti riportati nel prossimo capitolo.

Il raggiungimento del regime di degenerazione quantistica avviene attraverso diverse fasi il cui scopo è aumentare la densità del campione nello spazio delle fasi, ovvero ridurre la temperatura e contemporaneamente accrescerne la densità.

In una prima fase si sfrutta l'effetto combinato di un campo magnetico e della luce laser per intrappolare gli atomi in una trappola magneto-ottica ottimizzata per la raccolta degli atomi (MOT1). Successivamente gli atomi vengono trasferiti in una seconda cella dove vengono raccolti in una trappola magneto-ottica (MOT2) ottimizzata per la conservazione ed il raffreddamento degli atomi. Infine la trappola magneto-ottica viene trasformata in una trappola puramente magnetica in cui è possibile operare un'evaporazione forzata degli atomi più caldi. Se la

densità iniziale del campione è sufficientemente elevata, questo processo porta al raffreddamento del sistema ed al raggiungimento del regime di degenerazione. Al termine della procedura il profilo di densità della nuvola atomica viene misurato per mezzo di una immagine in assorbimento.

Dopo aver descritto alcune caratteristiche generali dell'apparato verranno illustrate in dettaglio tutte le diverse fasi.

3.1.1 L'apparato da vuoto

La realizzazione del condensato di Bose-Einstein in un gas di atomi richiede, come si è visto nel primo capitolo, che le temperature raggiunte siano dell'ordine di un centinaio di nano-Kelvin.

Non è tuttavia sufficiente raggiungere queste temperature, ma occorre anche mantenerle nel tempo rimuovendo il contatto termico tra il campione ed il laboratorio. Gli atomi, a causa del loro spettro discreto, sono per natura poco accoppiati allo spettro di corpo nero: per il ^{87}Rb nello stato fondamentale infatti la transizione permessa a lunghezza d'onda più elevata è a circa 795 nm con una larghezza naturale di circa 6 MHz. In questa banda spettrale la radiazione di corpo nero di una sorgente alla temperatura di circa 300K è trascurabile. Di conseguenza l'unico meccanismo efficiente per la termalizzazione sono le collisioni.

Grazie al confinamento spaziale, prima magneto-ottico e poi puramente magnetico, le collisioni con le pareti di vetro della cella non hanno importanza e quindi le uniche collisioni che possono portare ad un riscaldamento sono quelle con gli altri atomi presenti all'interno della cella: questi ultimi infatti, non essendo intrappolati, possiedono energie cinetiche molto maggiori della profondità della trappola e possono condurre alla perdita di atomi intrappolati. Questo spiega perché il vuoto è cruciale per la realizzazione di questo tipo di esperimenti.

Come accennato in precedenza, il sistema è costituito da due diverse celle: nella prima viene realizzata una trappola magneto-ottica ottimizzata per la raccolta

di un numero elevato di atomi, nella seconda viene realizzata prima una trappola magneto-ottica ottimizzata per il raffreddamento e la conservazione degli atomi e successivamente la trappola magnetica su cui opera il raffreddamento evaporativo. Questi due compiti necessitano di due differenti regimi di vuoto: da un lato infatti il numero di atomi raccolti da una MOT dipende dalla pressione parziale di gas presente nella cella e quindi la prima MOT necessita di una pressione relativamente alta, dall'altro il raggiungimento di basse temperature ed il raffreddamento evaporativo richiedono un basso tasso di collisioni con il gas residuo e quindi un vuoto particolarmente spinto. Diviene quindi necessario mantenere un vuoto differenziale tra le due celle. Questo è possibile connettendo le due celle mediante un tubo avente sezione di circa 11 mm e una lunghezza di circa 40 cm. Questo fa sì che le due pompe ioniche operanti sul sistema: una da 25 l/s (Varian VacIon Plus 2) operante sulla prima cella, ed una da 55 l/s (Varian 916-00017) operante sulla seconda possano mantenere due regimi di vuoto: circa 10^{-9} torr nella prima MOT e circa 10^{-12} torr nella seconda.

A queste due pompe è affiancata una pompa a sublimazione di titanio che viene accesa di solito ogni 2-3 settimane in modo da rimuovere il rubidio in eccesso adeso alle pareti delle celle, riducendo così ulteriormente la pressione.

3.1.2 Le sorgenti laser

Per il raffreddamento e la trappola magneto-ottica si utilizza la transizione D_2 del ^{87}Rb alla lunghezza d'onda di circa 780.25 nm. Questa riga presenta la struttura iperfine illustrata in figura 3.1.

La componente scelta per il raffreddamento è la $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$. Perché il raffreddamento sia efficiente (cfr. §3.1.3) occorre però che la transizione sia *chiusa*, cioè che gli atomi popolino solo i due livelli sopra detti. In realtà il laser di raffreddamento, per quanto non in risonanza con la transizione $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$, è comunque in grado di popolare lo stato $|F' = 2\rangle$ da cui gli atomi possono decadere nello stato $|F = 1\rangle$. Questo costituisce un

canale di perdita che può compromettere l'efficienza dell'intrappolamento. Per evitare questo al laser di raffreddamento ne viene sovrapposto un altro, detto di ripompaggio, che lavora sulla componente $|F = 1\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$: mediante il rilassamento $|F' = 2\rangle \rightarrow |F = 2\rangle$ esso riporta gli atomi persi nel livello di raffreddamento, di fatto chiudendo la transizione.

La stabilità dell'emissione delle sorgenti è garantita mediante un sistema elettronico di aggancio che mantiene la frequenza del laser ad una distanza fissata da una transizione del ^{87}Rb . Una parte della luce emessa attraversa una cella contenente del Rubidio e viene retroriflessa realizzando uno schema di spettroscopia detto in saturazione che elimina l'allargamento della riga per effetto Doppler. Dal profilo di saturazione si estrae un segnale di errore che viene utilizzato per correggere le derive del laser su una banda spettrale fino a frequenze di alcuni KHz.

Le due sorgenti laser necessarie all'esperimento sono costituite da diodi laser a semiconduttore montati in cavità estesa in modo da migliorarne le caratteristiche spettrali.

La luce di ripompaggio viene fornita da un diodo della Toptica Photonics modello SDL-5401-G1 avente una corrente operativa di circa 60 mA ed una potenza tipica in uscita dalla cavità estesa di circa 20 mW. Come detto sopra una parte di questa luce viene prelevata per effettuare l'aggancio in frequenza mentre il resto viene suddiviso in due fasci che giungono alle due MOT.

Il laser utilizzato sulla transizione di raffreddamento è un Sanyo DL7-140: la corrente operativa è pari a 70 mA e la potenza in uscita è intorno a 25 mW. Tale potenza non è sufficiente per l'esperimento e quindi la luce, dopo averne prelevato una parte per l'aggancio in frequenza, viene amplificata mediante un amplificatore a semiconduttore (Toptica Photonics Tapered Amplifier TA100). La potenza complessiva che si ottiene in uscita è di circa 620 mW con un'amplificazione di oltre un ordine di grandezza.

Il fascio in uscita dall'amplificatore viene ripartito in cinque fasci distinti come

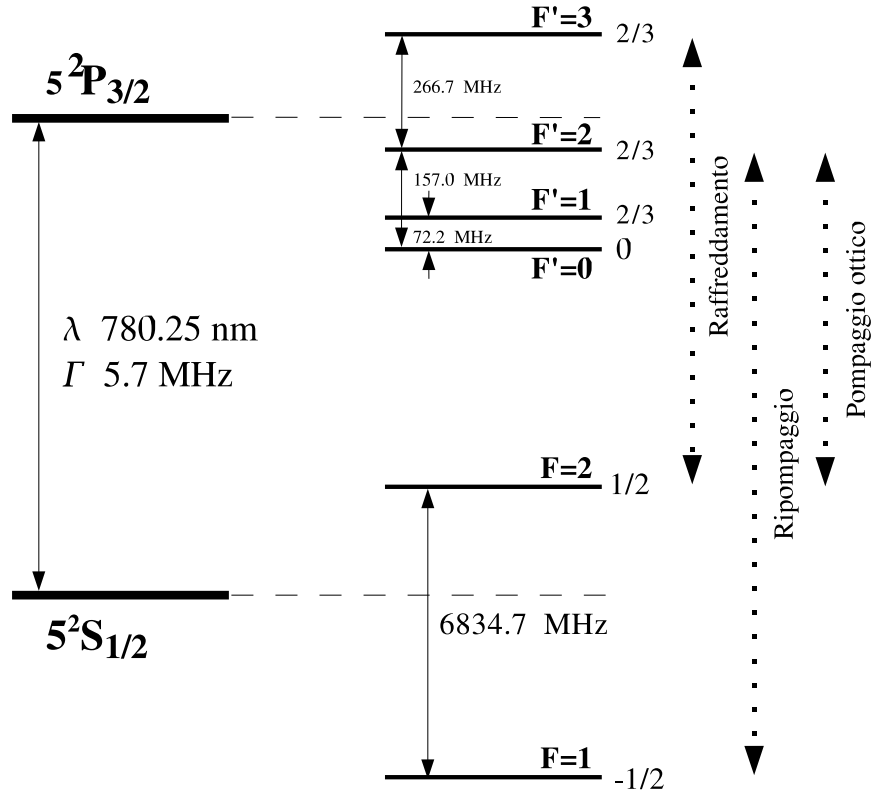


Fig. 3.1: Schema della struttura iperfine della riga D2 dell'atomo di ^{87}Rb . I livelli di ciascun multipletto sono in scala. F indica il numero quantico di spin totale (orbitale + elettronico + nucleare). Il numero a fianco di ciascun livello è circa uguale al fattore di Landé g_F , mentre λ indica la lunghezza d'onda in vuoto e Γ la larghezza naturale di riga. A fianco sono indicate le componenti della riga utilizzate nell'esperimento per le diverse funzioni.

indicato in figura 3.2: un fascio per il pompaggio ottico degli atomi prima del trasferimento nella trappola magnetica (cfr. §3.1.5), uno per la prima ed uno per la seconda MOT ed infine uno per il fascio di spinta ed uno per quello di rivelazione.

Tutte le suddivisioni avvengono mediante una lamina $\lambda/2$ ed un cubo polarizzatore; grazie all'uso di quattro AOM indipendenti è possibile controllare (entro alcune decine di MHz) la frequenza di ciascuno dei fasci.

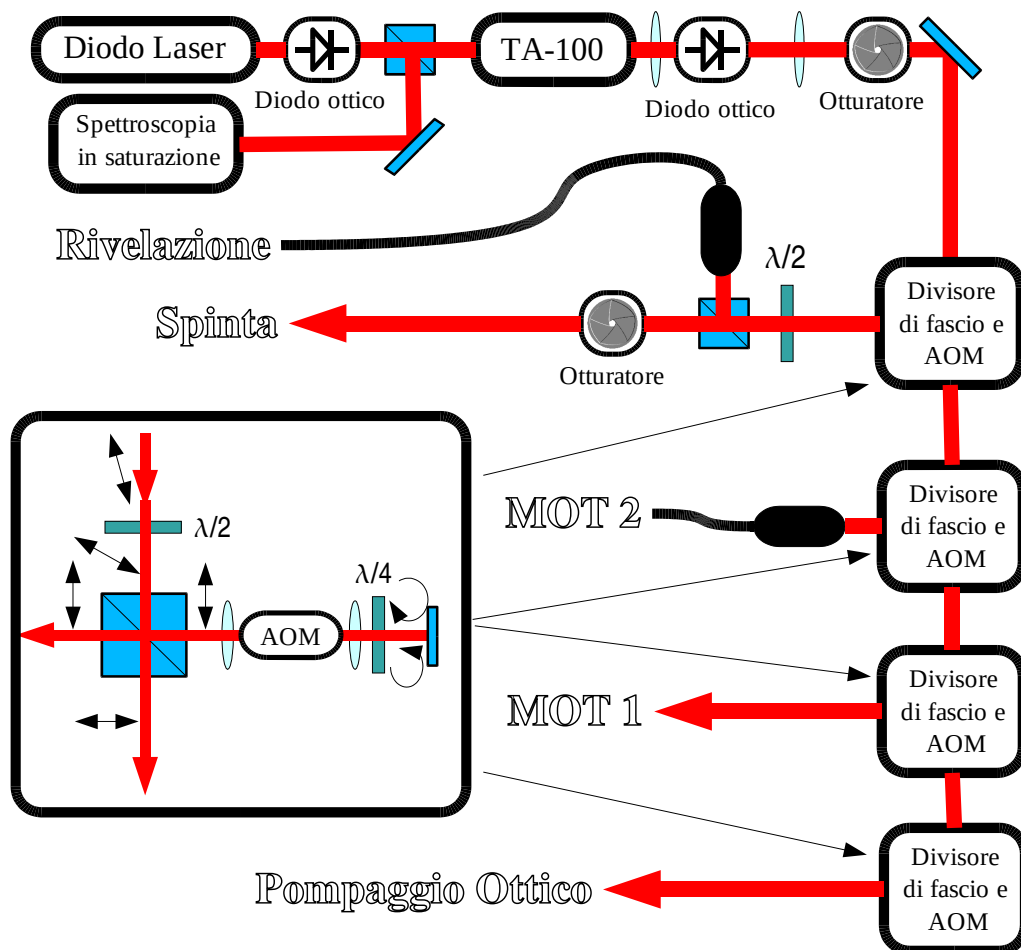


Fig. 3.2: Schema di suddivisione dei fasci per i diversi settori dell'esperimento: la luce viene ripartita con un sistema lamina-cubo polarizzatore: ruotando la lamina è possibile variare la frazione di intensità che viene successivamente trasmessa dal cubo. Tale frazione prosegue per le successive divisioni, mentre la frazione riflessa attraversa in doppio passo un modulatore acustooptico (AOM) e può essere infine convogliata verso l'esperimento. Le due lenti servono a focalizzare il fascio collimato nell'AOM per massimizzare l'efficienza di modulazione. I diodi ottici servono a proteggere il diodo laser e l'amplificatore dal cosiddetto *feed-back* ottico.

3.1.3 La trappola magneto-ottica, MOT

L'intrappolamento magneto-ottico degli atomi è il primo passo verso la condensazione e costituisce l'elemento fondamentale dei moderni esperimenti di fisica atomica. In sintesi si sfrutta la pressione di radiazione esercitata da sei fasci laser contropropaganti per rallentare gli atomi, mentre un gradiente di campo magnetico fornisce la forza di richiamo necessaria all'intrappolamento [46].

In maniera più quantitativa il principio di funzionamento è il seguente. Due bobine in configurazione anti-Helmholtz, cioè in cui scorre la medesima corrente, ma in verso opposto, creano un campo magnetico nullo al centro del cilindro da esse individuato, con un gradiente approssimativamente costante nelle tre direzioni dello spazio (trascurando gli effetti di bordo). Tale campo magnetico si accoppia con il momento magnetico proprio degli atomi dando luogo ad una separazione per effetto Zeeman pari a:

$$\Delta E = g_F \mu_B m_F B(\mathbf{r}) \quad (3.1)$$

dove g_F è il fattore di Landé atomico (v. fig. 3.1), μ_B è il magnetone di Bohr e m_F è la proiezione del momento angolare sull'asse del campo.

Nella zona in cui il campo magnetico è lineare si intersecano sei fasci laser contropropaganti, accordati con un *detuning* rosso rispetto ad una risonanza atomica (nel nostro caso la transizione $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$) e aventi polarizzazione circolare opposta in modo che il fascio polarizzato σ^+ si propaghi nella direzione in cui il campo è crescente.

L'effetto sugli atomi può essere analizzato in una situazione semplificata in cui la transizione sia del tipo $|F = 0\rangle \rightarrow |F' = 1\rangle$ e $g_F = 1$. Tale situazione è illustrata nel caso unidimensionale in figura 3.3.

In questo caso un atomo che si trovi in una zona in cui il campo è negativo, a causa del *detuning* rosso, ha una probabilità maggiore di assorbire un fotone dal fascio con polarizzazione σ^+ , perché in risonanza con la transizione $|F = 0, m_F = 0\rangle \rightarrow |F' = 1, m_F = +1\rangle$. A causa del rinculo quindi sull'atomo

agisce mediamente una forza diretta verso il centro della trappola.

Allo stesso modo un atomo nella zona di campo positivo si trova in risonanza con la transizione $|F = 0, m_F = 0\rangle \rightarrow |F' = 1, m_F = -1\rangle$ e quindi assorbirà con maggiore probabilità un fotone del fascio σ^- . Anche in questo caso l'effetto medio sarà una forza che spinge l'atomo verso il centro della trappola.

Notiamo che ad ogni fotone assorbito corrisponde una successiva emissione spontanea, tuttavia l'effetto di questa sulla forza media agente sull'atomo è nullo data l'isotropia di tale emissione.

A questo effetto di richiamo si aggiunge anche un effetto viscoso dato dalla pressione di radiazione: l'assorbimento selettivo di uno dei due fasci è infatti accresciuto dallo spostamento Doppler che avvicina alla risonanza il fascio che si propaga in direzione opposta alla velocità dell'atomo. In assenza di campo magnetico questo effetto viscoso è responsabile delle cosiddette “melasse classiche”. Si verifica sperimentalmente che questi risultati valgono anche se la struttura dei livelli coinvolti è più complessa e se si passa ad una geometria tridimensionale mediante l'aggiunta di altre due coppie di fasci tra loro ortogonali.

La prima MOT

Come già accennato, la prima MOT ha lo scopo di catturare un grande numero di atomi a partire dal vapore di Rubidio [47]. Quest'ultimo è ottenuto mettendo in comunicazione attraverso una valvola un'ampolla contenente un campione solido del metallo con la cella mantenuta, come si è visto, a bassa pressione: il metallo sublima e satura la cella con i suoi vapori.

Il campo magnetico quadrupolare viene generato da due bobine costituite da avvolgimenti di filo di rame (diametro 0.8 mm) per un diametro di circa 15 cm e percorse da una corrente di circa 3 A. Il gradiente di campo magnetico da esse generato è di circa 7 Gauss/cm. Il raffreddamento delle bobine è ottenuto per contatto termico tra il supporto di alluminio della bobina ed un tubo di rame in cui scorre l'acqua di raffreddamento. La presenza di eventuali campi

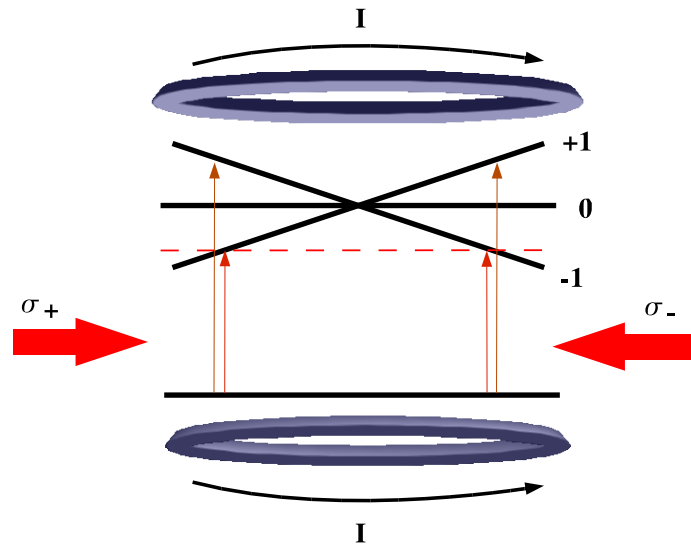


Fig. 3.3: Schema di funzionamento semplificato di una trappola magneto-ottica. Le due bobine sono disposte in configurazione anti-Helmholtz cioè simmetricamente e con corrente uguale ma in verso opposto come indicato in figura. In figura è riportato anche a titolo di esempio l'andamento dello spostamento Zeeman delle componenti di due livelli $F = 0$ ed $F = 1$ in funzione della posizione. L'andamento del campo magnetico è proporzionale alla linea $+1$. La linea tratteggiata rossa rappresenta l'energia di un fotone laser a partire dallo stato fondamentale atomico. La zona di campo lineare non è in scala rispetto alle dimensioni delle bobine.

magnetici spurî (incluso quello terrestre) è esclusa mediante un set di tre bobine di compensazione tra loro ortogonali in cui scorre una corrente di qualche centinaio di mA.

Il numero di atomi catturati da una MOT dipende da diversi fattori, ma in particolare dal diametro dei fasci che influisce sia sul volume della trappola stessa, sia sulla cosiddetta velocità di cattura, cioè la massima velocità con cui un atomo deve entrare nella regione di sovrapposizione dei fasci per rimanervi intrappolato. Per questa ragione i fasci della prima MOT hanno un diametro di circa 5 cm con una potenza complessiva di circa 60 mW ed un *detuning* di circa $-2\Gamma \simeq -12$ MHz. Per realizzare la prima MOT si usano tre fasci retroriflessi: tra la finestra di uscita e lo specchio è inserita per ciascuna direzione una lamina $\lambda/4$ in modo che la luce

polarizzata σ^+ , dopo aver attraversato la cella, passando due volte attraverso la lamina stessa, vi ritorni con polarizzazione σ^- . Così facendo tuttavia il fascio riflesso attraversa due volte la finestra con una perdita di intensità. Tale perdita viene compensata utilizzando per la retroriflessione degli specchi leggermente curvi ($R \sim 2\text{ m}$). Alla luce del laser principale viene sovrapposta come detto quella del laser di ripompaggio.

La prima MOT raccoglie circa 10^{10} atomi alla temperatura di circa $200\text{ }\mu\text{K}$ con una densità dell'ordine di 10^9 cm^{-3} .

Il trasferimento tra le due MOT

Il trasferimento dalla prima alla seconda MOT avviene in modo impulsato con un ciclo di circa 220 ms. La sequenza di ciascun impulso è la seguente: la prima MOT viene lasciata caricare per circa 200 ms, quindi il campo magnetico viene spento e segue una breve fase di melassa ottica che raffredda la prima MOT. Il laser di raffreddamento viene spento e successivamente, usando le bobine di compensazione, viene acceso un campo magnetico nella direzione del fascio di spinta e, subito dopo, il fascio di spinta stesso. Questo ha una potenza di circa 4 mW, un *detuning* dalla transizione $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$ circa uguale a $-\Gamma$ ed è polarizzato σ^+ in modo da pompare otticamente gli atomi nello stato $|F = 2, m_F = 2\rangle$. Il fascio di spinta è allineato lungo il tubo di collegamento tra le due celle che, per facilitare il moto degli atomi ed evitare il più possibile l'adsorbimento sulle pareti del tubo, è circondato da sei strisce rettangolari di materiale magnetico. Queste creano un campo esapolare con minimo al centro del tubo: in virtù del fattore di Landé positivo gli atomi tendono a seguire tale minimo migliorando così l'efficienza di trasferimento. Il ciclo si completa con lo spegnimento del fascio di spinta e la riaccensione dei fasci e del campo magnetico della prima MOT. La seconda MOT viene caricata con circa 300 cicli di ripetizione.

La seconda MOT

La seconda MOT, come detto nel paragrafo 3.1.1, viene realizzata nell'ambiente di ultra alto vuoto alla pressione di circa 10^{-12} torr. Essa è ottimizzata per la raccolta di atomi preraffreddati ed il raggiungimento di temperature ancora più basse: per questo vengono usati sei fasci con un diametro di circa 2 cm le cui potenza e polarizzazione possono essere controllate in maniera indipendente. Anche la qualità spaziale del modo del laser viene ottimizzata accoppiando il fascio in uscita dal modulatore acustooptico (cfr. 3.1.2) ad una fibra ottica¹ avente un *core* di $5\text{ }\mu\text{m}$, dotata di collimatore e in grado di conservare la polarizzazione, che è stata installata durante questo lavoro di tesi. La potenza in uscita dalla fibra è circa 80 mW con una efficienza di circa il 50%. Durante il montaggio abbiamo verificato che, per ottenere un'effettiva conservazione della polarizzazione in ingresso, è necessario allineare quest'ultima su uno degli assi ottici del materiale di cui la fibra è composta. A questo scopo è stata inserita una lamina $\lambda/2$ per ruotare la polarizzazione, mentre per migliorare l'accoppiamento del fascio in ingresso con il collimatore è stato inserito un telescopio come illustrato in figura 3.4.

Il campo magnetico di quadrupolo è generato da due delle bobine usate anche per la trappola magnetica (fig. 3.5). La corrente operativa durante la fase di MOT è di circa 12 A per un gradiente di campo di circa 10 Gauss/cm.

I campi magnetici spurî sono controllati attraverso tre coppie di bobine in configurazione Helmholtz ortogonali tra loro. Il controllo sulla corrente in queste bobine (che varia tra 0 e 2 A circa nelle varie fasi dell'esperimento) è necessario per ottimizzare il processo di trasferimento degli atomi dalla seconda MOT alla trappola magnetica.

Il numero di atomi intrappolati al termine della fase di caricamento impulsato è intorno a 10^9 ad una temperatura poco superiore ai $100\text{ }\mu\text{K}$.

¹OZ-OPTICS LPC-03-780-5/125-P-1.4-6.2AS-50-3U-3-5

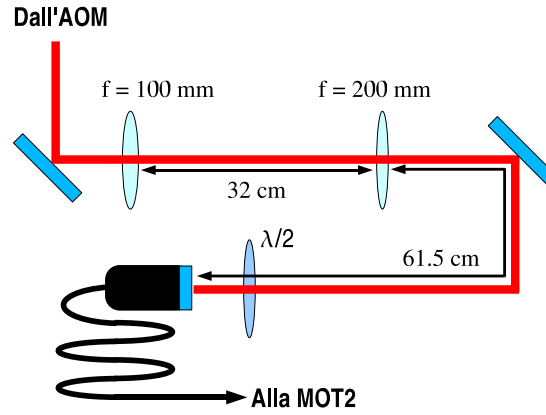


Fig. 3.4: Accoppiamento in fibra del fascio utilizzato per la seconda MOT. Le due lenti convergenti costituiscono un telescopio necessario per adattare le dimensioni del fascio proveniente dall'AOM al collimatore montato sulla fibra. Le distanze sono state ottimizzate per ottenere la massima efficienza in uscita.

3.1.4 Compressione e melassa ottica

Una volta completata la raccolta degli atomi nella seconda MOT si interviene con due operazioni successive il cui scopo è di incrementare la densità del campione e ridurne ulteriormente la temperatura. Questo è necessario perché il raffreddamento evaporativo richiede, come vedremo, che la densità sia la più grande possibile. L'aumento di densità viene realizzato attraverso una fase nella quale viene variato il gradiente di campo magnetico per massimizzare la densità degli atomi nella MOT. La durata di questa fase è di circa 20 ms. Successivamente il campo magnetico viene spento ed il *detuning* dei fasci di MOT viene portato a -22 MHz. Questa configurazione prende il nome di melassa ottica sub-Doppler. In virtù della intensità ridotta e del detuning elevato, la saturazione (2.5) non è trascurabile e l'effetto viscoso della forza di dipolo (cfr. §2.3.2), combinato al gradiente di polarizzazione generato dalla configurazione $\sigma^+ - \sigma^-$ [27] è efficace nel ridurre la velocità degli atomi fino a portare il campione alla temperatura di circa $50 \mu\text{K}$. La fase di melassa ha una durata di circa 5 ms trascorsi i quali i laser vengono spenti ed ha inizio il trasferimento degli atomi in trappola ma-

gnetica. A questo scopo viene spento prima il laser di raffreddamento e $750\,\mu\text{s}$ dopo quello di ripompaggio in modo che gli atomi si trovino nello stato fondamentale con $F = 2$. In realtà allo spegnimento dei fasci di MOT gli atomi si trovano distribuiti in tutti i sottolivelli Zeeman del livello $|F = 2\rangle$. Poiché, come vedremo al paragrafo 3.1.5, si vogliono intrappolare magneticamente gli atomi nello stato $|F = 1, m_F = -1\rangle$, si rende necessario effettuare un pompaggio ottico verso questo stato. Questo viene realizzato illuminando per $200\,\mu\text{s}$ gli atomi da una luce polarizzata σ^- risonante con la transizione $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$. L'asse di quantizzazione viene definito in questa fase creando un debole campo magnetico lungo l'asse della trappola mediante le bobine di compensazione. Questo procedimento determina un pompaggio ottico verso il livello desiderato.

3.1.5 La trappola magnetica

Supponendo di poter assimilare l'atomo ad un dipolo magnetico puntiforme μ e di poter trattare il campo magnetico in modo classico, si ha che l'energia di interazione dell'atomo con un campo magnetico esterno è data da:

$$U_M(\mathbf{r}) = -\mu \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (3.2)$$

Se il campo varia su tempi molto lunghi rispetto al periodo di Larmor, la precedente relazione si può estendere al caso quantistico e, dato che l'atomo seguirà adiabaticamente la direzione del campo, si può assumere che l'asse di quantizzazione coincida istante per istante con tale direzione. Di conseguenza l'interazione tra atomo e campo magnetico dipende solo dal modulo del campo secondo l'estensione della relazione precedente:

$$\mathcal{H}_{mag} = g_F \mu_B m_F |\mathbf{B}(\mathbf{r})| \quad (3.3)$$

I singoli stati Zeeman si distinguono a questo punto in due classi: gli stati con $g_F m_F > 0$ hanno energia minore in campi meno intensi (*low-field seeking*) e gli stati con $g_F m_F < 0$ che hanno energia minore in campi più intensi (*high-field*

seeking). Il teorema di Wing [48] proibisce in una zona dello spazio lontana delle sorgenti l'esistenza di massimi isolati del campo magnetostatico. Di conseguenza solo gli stati *low-field seeking* possono essere magneticamente intrappolati. Esaminando la figura 3.1 si nota che nel nostro caso gli intrappolabili sono: $|F = 1, m_F = -1\rangle$, $|F = 2, m_F = 1, 2\rangle^2$. Tra di essi lo stato con $m_F = 2$ è maggiormente sensibile al campo magnetico e questo si traduce da un lato in una maggiore profondità della trappola, ma dall'altro in una accresciuta sensibilità dell'apparato al rumore sul campo magnetico stesso. Per questo lo stato da noi intrappolato magneticamente è $|F = 1, m_F = -1\rangle$.

La trappola magnetica utilizzata è di tipo Ioffe-Pritchard [49] ed è costituita da quattro bobine come rappresentato in figura 3.5. Le due bobine con asse verticale determinano un campo quadrupolare come quello utilizzato per la MOT, la cui espressione esplicita è, al secondo ordine rispetto al centro del cilindro da esse individuato [48]:

$$\mathbf{B}_Q(\mathbf{r}) = B'_Q y \hat{\mathbf{y}} + \frac{1}{2} B'_Q r_y \hat{\mathbf{e}}_y \quad (3.4)$$

dove $r_y = \sqrt{x^2 + z^2}$, $\hat{\mathbf{e}}_y = -(z/r_y) \hat{\mathbf{x}} + (x/r_y) \hat{\mathbf{z}}$ e B'_Q è per definizione $\partial_y |\mathbf{B}_Q|$. Il campo generato dalla bobina C (detta “di curvatura”) è un campo dipolare la cui espressione, al secondo ordine rispetto al centro del campo di quadrupolo, è

$$\mathbf{B}_C(\mathbf{r}) = \left[B_C^{(0)} - B'_C z + B''_C \left(z^2 - \frac{1}{2} r_z^2 \right) \right] \hat{\mathbf{z}} + \left[\frac{B'_C}{2} r_z - B''_C (z r_z) \right] \hat{\mathbf{e}}_z \quad (3.5)$$

dove analogamente a prima $r_z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\hat{\mathbf{e}}_z = -(x/r_z) \hat{\mathbf{x}} + (y/r_z) \hat{\mathbf{y}}$ e $B_C^{(0)} = |\mathbf{B}_C(0)|$, $B'_C = |\partial_z |\mathbf{B}_C||$, $B''_C = |\partial_{zz}^2 |\mathbf{B}_C||$. Se le tre bobine sono percorse dalla medesima corrente e si trovano alla medesima distanza dal centro si ha che $B'_Q = 2B'_C$ cosicché il modulo del campo risultante assume, sempre al secondo ordine rispetto al centro del campo di quadrupolo, la forma [44]:

$$|\mathbf{B}| = B_C^{(0)} + \left(\frac{9}{32} \frac{B_Q'^2}{B_C^{(0)}} - \frac{1}{2} B''_C \right) r_z^2 + B''_C z^2 \quad (3.6)$$

²Dal momento che il pompaggio ottico nello stato $|2, 1\rangle$ non può essere completo, tale stato non è interessante dal punto di vista sperimentale.

Questo, ricordando l'espressione del potenziale magnetico (3.3), implica che il confinamento è armonico con frequenze date da:

$$\begin{aligned}\omega_{\perp} &\simeq \sqrt{\frac{g_F \mu_B}{m} \frac{(B'_Q)^2}{B_C^{(0)}}} \\ \omega_z &= \sqrt{\frac{g_F \mu_B}{m} B_C''}\end{aligned}\quad (3.7)$$

In realtà, per mantenere la densità del gas intrappolato a livelli tali da consentire il raffreddamento evaporativo (cfr. §3.1.6), è necessario aumentare il confinamento in direzione assiale e per questo le due bobine di quadrupolo vengono avvicinate al centro. Questo sposta il minimo rispetto al centro del campo di quadrupolo ed altera il valore di fondo. Per compensare questo effetto si introduce una quarta bobina, indicata con A in figura 3.5, che consente di controllare il campo di fondo sull'asse della trappola. Questo parametro infatti dovrebbe essere il più piccolo possibile per aumentare il confinamento in direzione radiale, ma non può essere nullo. Diversamente gli atomi, intrappolati in una zona di campo nullo in cui cessa di esistere un asse di quantizzazione definito, possono subire una transizione di spin-flip (detta di Majorana [50]) che li porterebbe in uno stato non intrappolato. Il valore del campo di fondo dipende anche dalla corrente nelle bobine di compensazione e sarà indicato con B_0 .

Con una corrente nelle bobine della trappola magnetica di 240 A tali frequenze sono quelle riportate in tabella 1.2 mentre il campo di fondo assume un valore di poco superiore a 2 Gauss. Come detto il centro della trappola magnetica non coincide con quello del campo di quadrupolo usato nella MOT. Di conseguenza occorre trasferire adiabaticamente gli atomi dalla MOT alla trappola magnetica e per questo è necessario controllare con precisione ed in maniera indipendente la corrente nelle bobine di quadrupolo ed in quella di curvatura. Inoltre, al termine della procedura di raffreddamento, se si vuole lasciar espandere la nuvola atomica, occorre azzerare la corrente nelle bobine in un tempo molto rapido rispetto al periodo di trappola: viceversa si ecciterebbero delle oscillazioni che falserebbero il profilo di densità. Di conseguenza si utilizza per il controllo del

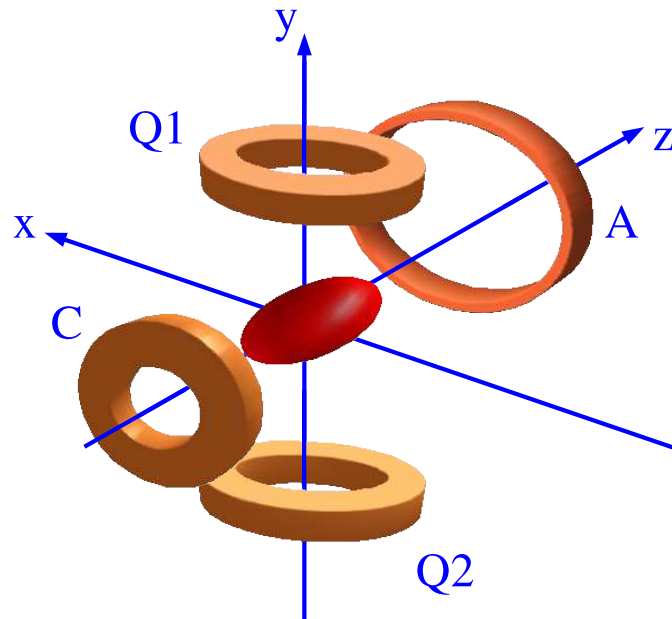


Fig. 3.5: Schema della trappola magnetica usata nell'esperimento. Le due bobine indicate con Q1 e Q2 sono le bobine che generano il campo di quadrupolo usato anche nella MOT, mentre la bobina C determina la curvatura del campo. Queste tre bobine hanno un diametro interno di 3.0 cm e sono costituite da 15 spire. La bobina A serve a diminuire il campo magnetico di fondo: ha un diametro interno di 12.8 cm ed è costituita da 6 spire. Il filo di rame utilizzato è tubolare con una sezione interna di 1.7 mm ed una esterna di 3.3 mm. All'interno del tubo scorre l'acqua di raffreddamento. La zona in rosso rappresenta una equipotenziale del campo che evidenzia il diverso confinamento assiale e radiale. Il fascio di rivelazione (v. §3.1.7) è diretto lungo l'asse x .

campo magnetico il circuito schematizzato in figura 3.6. Il controllo è ottenuto pilotando la tensione di *gate* di tre bancate, ciascuna costituita da quattro MOSFET collegati in parallelo. Questa tecnica consente di raggiungere un'elevata velocità di commutazione (in pratica limitata dal carico induttivo costituito dalle bobine) mantenendo relativamente bassa la corrente che scorre in ciascuno dei dispositivi, aumentandone la stabilità.

Una prima bancata di MOSFET controlla la corrente nelle bobine di quadrupolo aumentando o diminuendo il gradiente di campo, mentre una seconda bancata

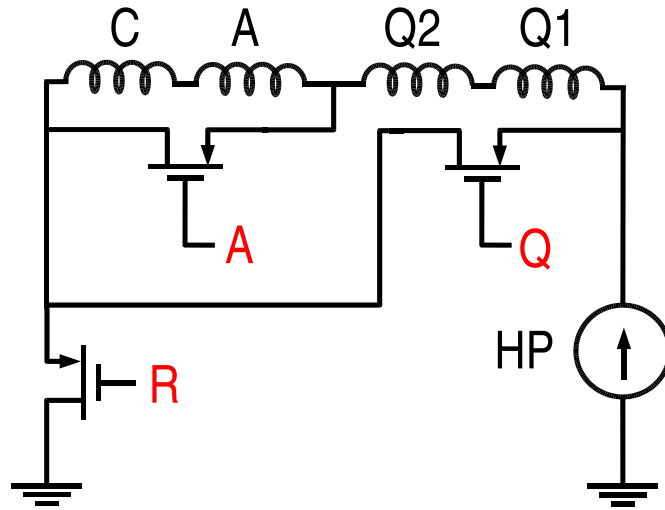


Fig. 3.6: Circuito di controllo semplificato del campo magnetico. Sono indicate le quattro bobine (Q1,Q2,C,A), l'alimentatore (HP) e le tre bancate di MOSFET di controllo. 'Q' controlla la corrente nelle bobine di quadrupolo ed è usato per variare il gradiente di campo in modo controllato. 'A' controlla la corrente nelle bobine C ed A, mentre 'R' stabilizza la corrente nel circuito e viene usato per spegnere velocemente la trappola.

controlla la corrente nelle bobine C ed A. L'interruzione della corrente avviene per mezzo di un circuito veloce che azzerla la tensione di *gate* della terza bancata di MOSFET. Il segnale che pilota questo circuito è ottenuto confrontando un segnale proporzionale alla corrente circolante nelle bobine con una tensione di riferimento gestita dall'elettronica di controllo dell'esperimento. In questo modo, oltre a poter spegnere il campo in tempi inferiori al millisecondo, si ottiene anche un *feed-back* che stabilizza la corrente nelle bobine. Per prevenire oscillazioni nel circuito di controllo nel circuito è inserito uno stadio di integrazione.

La procedura di caricamento della trappola magnetica dalla MOT è la seguente: la corrente di quadrupolo viene portata a 70 A, valore che massimizza gli atomi raccolti dalla MOT con il minimo riscaldamento ed è sufficiente a sostenere gli atomi contro la gravità. Successivamente la corrente nelle bobine di quadrupolo viene incrementata fino al valore massimo di 240 A e si aumenta gradatamente

la corrente nelle bobine C ed A trasferendo in modo adiabatico gli atomi nella trappola Ioffe-Pritchard. Al termine del processo, che ha un'efficienza di circa il 30% si ottengono qualche centinaio di milioni di atomi ad una temperatura di circa $130\,\mu\text{K}$.

La corrente che alimenta le bobine viene fornita da un generatore di potenza HP-6681A in grado di funzionare sia come generatore di corrente ($I_{MAX} \simeq 250\,\text{A}$) sia come generatore di tensione ($V_{MAX} \simeq 11\,\text{V}$).

3.1.6 Il raffreddamento evaporativo

Il passo decisivo verso la condensazione viene compiuto mediante un'evaporazione forzata che lascia intrappolati solo gli atomi più freddi. Questo processo permette di ottenere un aumento di sei ordini di grandezza della densità nello spazio delle fasi che porta il sistema alla condensazione di Bose-Einstein. Il principio di funzionamento è il seguente: una antenna a radiofrequenza induce nel campione atomico transizioni Zeeman tra lo stato intrappolato ed uno non confinato, rimuovendo atomi dalla trappola: se si riesce a rimuovere selettivamente solo gli atomi più caldi e lo si fa ad una velocità sufficientemente lenta (compatibilmente con la vita media degli atomi in trappola magnetica) da consentire agli atomi rimanenti di termalizzare, il campione si raffredda. Non solo, a causa del confinamento in un potenziale inhomogeneo, a questa riduzione di temperatura corrisponde una riduzione delle dimensioni occupate dalla nuvola atomica e quindi, se la frazione di atomi rimossi è sufficientemente piccola, un aumento della densità. L'antenna utilizzata non è altro che una bobina di filo di rame, costituita da 10 spire del diametro di un pollice, avvolta intorno ad una delle finestre della cella. La corrente all'interno della bobina è fornita da un sintetizzatore SR DS345 la cui frequenza e ampiezza sono controllate via GPIB. Per analizzare in modo quantitativo il processo, scriviamo, usando la (3.1), la condizione di risonanza per la transizione a radiofrequenza $|F = 1, m_F = -1\rangle \rightarrow$

$|F = 1, m_F = 0\rangle$:

$$h\nu_{RF} = 1/2 \mu_B B(\mathbf{r}) \quad (3.8)$$

Detta frequenza di fondo (ν_{fondo}) quella frequenza per cui sono in risonanza gli atomi sul fondo della trappola:

$$\nu_{fondo} = \frac{\mu_B}{2h} B_0 \simeq 7 \text{ GHz} \frac{B_0}{1\text{T}} \simeq 1.5 \text{ MHz} \quad (3.9)$$

dove si è posto $B_0 \simeq 2$ gauss, gli atomi in risonanza alla frequenza $\nu_{taglio} > \nu_{fondo}$ sono quelli che si trovano ad una distanza media dal centro della trappola, r_{rms} , fissata dalla condizione:

$$\eta = \frac{\Delta\nu}{\nu_{fondo}} = \frac{B(r_{rms})}{B_0} - 1 \quad (3.10)$$

dove $\Delta\nu = \nu_{taglio} - \nu_{fondo}$. Ricordando che la trappola è armonica si ottiene infine:

$$\eta \simeq \frac{1}{2} \frac{m\bar{\omega}^2 \langle r^2 \rangle}{\mu_B B_0} \quad (3.11)$$

da cui, dato che per una trappola armonica $\langle r^2 \rangle \propto \langle p^2 \rangle \propto T$ si ha che, fissando il valore di ν_{taglio} , si opera in maniera selettiva in temperatura. Quanto alla possibilità di ottenere una ritormalizzazione efficiente, il punto cruciale è il rapporto tra la probabilità di collisione elastica ($\gamma_{el} \propto n\sqrt{T}$), che determinano la ritormalizzazione, e la probabilità di collisioni anelastiche, che sono la causa principale di perdite dalla trappola (cfr. 3.1.1). Se le prime superano le seconde il sistema può termalizzare in tempo utile, altrimenti si perderanno atomi dalla trappola senza riuscire ad osservare un raffreddamento. Per questo è cruciale iniziare il raffreddamento evaporativo con una densità sufficientemente elevata. Si può stimare [44] che un congruo rapporto tra la probabilità di collisioni elastiche e quelle anelastiche sia di circa 150 a 1. In pratica si ottiene un grosso raffreddamento del campione riducendo progressivamente η e quindi riducendo la temperatura degli atomi che vengono eliminati. Nel corso di questo processo tuttavia il tasso di collisioni elastiche diminuisce e l'efficienza del raffreddamento può degradare. Perché ciò non accada l'evaporazione è logaritmica nel tratto

iniziale ($30 \rightarrow \sim 1.8$ MHz in 43 s) e lineare nel tratto finale ($\sim 1.8 \rightarrow \sim 1.7$ MHz in 13 s). Al termine del processo la radiofrequenza viene spenta e gli atomi nella trappola si trovano a temperatura inferiore a T_c , nella fase di condensato di Bose-Einstein, con un numero di atomi di circa $1.8 \cdot 10^5$. Notiamo che, a causa delle variazioni di temperatura, circadiane e proprie del ciclo di ripetizione dell'esperimento, ν_{fondo} non si mantiene costante. Di conseguenza si interviene variando la frequenza di taglio finale in modo da mantenere la temperatura ben al di sotto di quella critica e quindi mantenere puro il condensato. Tipicamente la diagnostica dell'esperimento viene effettuata osservando (v. §3.1.7) la nube di atomi termici che si ottiene arrestando l'evaporazione ad una frequenza di 3 MHz. Se il numero di atomi presenti a questo punto è inferiore a $1.7 \cdot 10^6$ l'ulteriore evaporazione condurrà allo svuotamento della trappola senza possibilità di raggiungere la temperatura critica con una densità apprezzabile. Le condizioni ottimali sono viceversa una nube termica con un numero di atomi intorno a $2.1 \cdot 10^6$ ed una densità ottica (v. §3.1.7) di poco superiore a 3.

3.1.7 L'immagine in assorbimento

La diagnostica del condensato o, più in generale, del contenuto della trappola magnetica, viene effettuata mediante un'immagine in assorbimento della nuvola atomica: un impulso della luce di ripompaggio (v. fig. 3.1) trasferisce gli atomi del condensato dallo stato $|F = 1\rangle$ allo stato $|F = 2\rangle$, immediatamente dopo la nuvola atomica viene illuminata da un fascio di luce risonante sulla transizione di raffreddamento (che, al contrario di quella di ripompaggio, è una transizione chiusa) ed il profilo di intensità del fascio trasmesso viene integrato da una telecamera CCD. Il condensato viene distrutto da questa procedura e quindi si acquisisce una sola immagine per ogni ciclo di ripetizione dell'esperimento.

Nell'immagine raccolta dalla CCD l'intensità è minore in corrispondenza della nuvola atomica, perché in questa zona gli atomi hanno assorbito fotoni dalla radiazione e quindi da questa "ombra" si possono ricavare informazioni quantitative

sulla nuvola stessa. Per tenere conto delle fluttuazioni di intensità nel laser di rivelazione, della luce spuria che investe la telecamera e della corrente di buio del sensore CCD, per ogni condensato vengono raccolte tre immagini: la prima è quella detta sopra in cui sono presenti gli atomi, la seconda raccoglie il profilo di intensità del fascio in assenza di atomi, mentre la terza raccoglie il profilo di intensità della luce di fondo, cioè senza luce di rivelazione. In tutte e tre le immagini viene usato il medesimo tempo di esposizione in modo da compensare per la corrente di buio. La densità ottica del campione può essere ricavata costruendo la matrice:

$$OD(z, y) = \ln \left(\frac{I_2(z, y) - I_3(z, y)}{I_1(z, y) - I_3(z, y)} \right) \quad (3.12)$$

dove il numero in basso indica la foto secondo la sequenza detta sopra. Ipotizzando che il pompaggio ottico sia completo e che la transizione non sia eccessivamente saturata, questa è una misura della densità numerica integrata lungo la direzione del fascio che, nel nostro caso, coincide con una direzione radiale (v. fig. 3.5) [52]:

$$OD(z, y) = \sigma_0 \int n(x, y, z) dx \quad (3.13)$$

Nella formula precedente σ_0 indica la sezione d'urto in assorbimento che, nel caso il campione abbia una densità sufficientemente bassa da escludere diffusioni multiple di fotoni, nelle ipotesi viste prima, vale: $\sigma_0 = 3\lambda^2/(2\pi)$.

La matrice OD ricavata dalle tre foto viene utilizzata per un fit bidimensionale della distribuzione attesa per una nube termica (gaussiana) o per un condensato in regime di Thomas-Fermi (1.16). Dal fit vengono ricavati la densità di picco e le dimensioni (σ della gaussiana o raggio di Thomas-Fermi (1.18)). Noti questi parametri si ottiene il numero di atomi e, nel caso di una gaussiana, la temperatura della nuvola mediante il principio di equipartizione. Quando è presente un condensato sovrapposto ad una nube termica si può effettuare un fit ad una distribuzione bimodale gaussiana e Thomas-Fermi.

La telecamera utilizzata è una Theta System SIS1-s285, che è stata installata durante questo lavoro di tesi: tale dispositivo monta un sensore CCD SONY

ICX285AL, le cui caratteristiche sono riportate nella tabella 3.1. Il sensore CCD

Sensore CCD SONY ICX285AL	
Dimensioni del sensore in pixel	1392×1040
Dimensioni del singolo pixel	$6.45\mu\text{m} \times 6.45\mu\text{m}$
Efficienza quantica a 780 nm	40%
Corrente di buio a 15°C	$2\text{ e}^-/\text{pixel}/\text{s}$
Profondità del CAD	14 bit (0 – 16383)

Tabella 3.1: Parametri del sensore CCD utilizzato per le immagini in assorbimento

è protetto da un otturatore elettronico ed è mantenuto a temperatura costante da una cella Peltier. Il tempo di integrazione e l'apertura dell'otturatore sono controllati da un impulso TTL inviato dal PC che controlla la tempistica dell'esperimento. Il tempo totale necessario al trasferimento dei dati dalla telecamera alla scheda di acquisizione è di circa 250 ms.

Date le dimensioni dei pixel riportate sopra è necessario introdurre un ingrandimento nel sistema di rivelazione. Questo è realizzato introducendo una coppia di lenti convergenti che proiettano sul piano del sensore CCD un'immagine ingrandita del condensato. Dato che, come illustrato in figura 3.7, il cammino del fascio di sonda coincide in parte con il cammino di uno dei fasci di MOT, è necessario rispettare alcuni vincoli imposti dalle caratteristiche che i fasci della MOT devono avere. La prima delle due lenti è posta in posizione tale da avere il condensato di Bose-Einstein approssimativamente nel fuoco. La telecamera è stata posizionata nel fuoco del telescopio costituito dalle due lenti e la posizione è stata aggiustata finemente acquisendo un'immagine della trappola magnetica. Quando le dimensioni dell'immagine sono minime e la densità ottica è massima il sistema si può considerare a fuoco. L'ingrandimento reale del sistema è stato misurato osservando la caduta libera di un condensato. Il valore ottenuto è 2.22 ± 0.03 che fornisce, usando la dimensione dei pixel in tabella 3.1, un fattore di scala per le immagini pari a $(2.96 \pm 0.02)\mu\text{m}/\text{px}$.

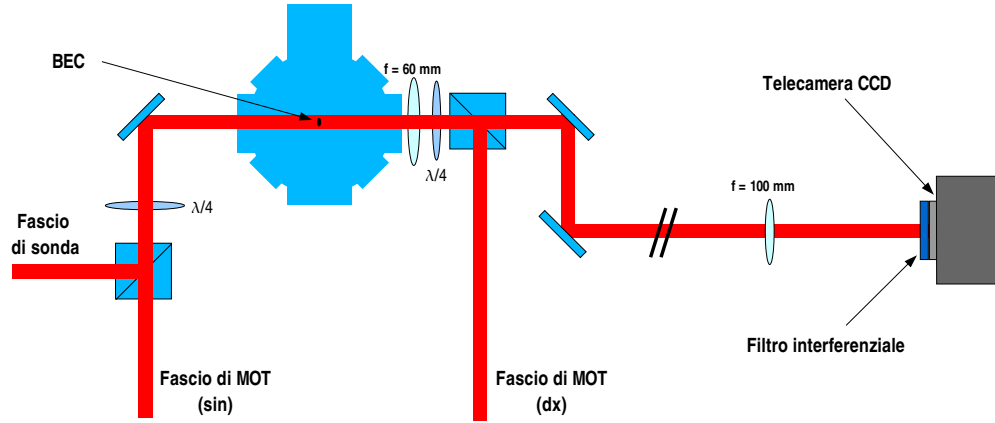


Fig. 3.7: Schema ottico del fascio di sonda. Controllando opportunamente la polarizzazione dei fasci, mediante un sistema di cubo polarizzatore/lamina lambda quarti è possibile sovrapporre il fascio di sonda ed i fasci di MOT. La distanza approssimativa tra il condensato e la prima lente è circa 67 mm, mentre la distanza tra le due lenti è circa 300 mm. La distanza tra la seconda lente e la telecamera CCD è circa 75 mm ed è stata ottimizzata come descritto nel testo.

3.2 Il reticolo ottico mobile unidimensionale

Come detto al paragrafo 2.2, il reticolo ottico mobile è costituito da due fasci laser contropropaganti tra cui esiste una definita relazione di fase. Per questa ragione, questi non possono essere ottenuti da due sorgenti distinte, ma devono essere ricavati per divisione di un'unica sorgente.

Inoltre, affinché il reticolo possa essere messo in movimento, è necessario poter variare la frequenza di uno dei due fasci. Valutiamo come primo passo quale debba essere l'entità di questo spostamento in funzione delle velocità che si vogliono ottenere. Come abbiamo visto a proposito delle onde di Bloch (§ 2.4.1) l'unità naturale in cui misurare le velocità è la velocità corrispondente al quasi-impulso di bordo banda, $\hbar q_B$, e data, per $\lambda = 820.5 \text{ nm}$, da:

$$v_B = \frac{\hbar q_B}{m} = \frac{\hbar k}{m} \simeq 5.60 \text{ mm/s} \quad (3.14)$$

Ricordando l'espressione (2.17) per la velocità del reticolo in funzione della differenza di frequenza, si ottiene che a questa velocità corrisponde una differenza di frequenza tra i due fasci pari a:

$$\Delta\nu_B = \frac{2v_B}{\lambda} = \frac{2h}{m\lambda^2} \simeq 13.6\text{KHz} \quad (3.15)$$

In linea di principio quindi potrebbe essere sufficiente modulare uno solo dei due fasci con frequenze di alcuni KHz. Introdurre una modulazione a questa frequenza con accuratezza sufficiente per i nostri scopi non è tuttavia semplice. Per questo si modulano *entrambi* i fasci e si introduce una differenza di frequenza tra le due modulazioni. Così facendo, lo spostamento di frequenza può essere ottenuto facilmente mediante due modulatori acustoottici che però, per preservare la relazione di fase tra i due fasci, devono utilizzare la stessa base dei tempi.

3.2.1 La sorgente laser

La sorgente laser utilizzata per il reticolo ottico è un laser Titanio-Zaffiro commerciale con una cavità ad anello Coherent 899-21, pompato da un laser Coherent Verdi V8. La potenza di pompaggio è pari ad 8 W in singolo modo alla lunghezza d'onda di circa 533 nm. La curva di guadagno dello ione Ti^{2+} nella matrice di Zaffiro si estende approssimativamente da 1100 sino a 600 nm ma l'emissione del laser è nel nostro caso limitata dalla riflettività delle ottiche inserite in cavità all'intervallo $700 \div 840$ nm. L'emissione in singolo modo è ottenuta mediante due *etalon* di spessore diverso che consentono una regolazione grossolana (a passi di circa 0.5 nm) e fine (~ 10 GHz) del modo di emissione. All'*etalon* più sottile è collegato un meccanismo di *feed-back* che viene usato per agganciare la frequenza di emissione ad una cavità Fabry-Perot. La potenza tipica in uscita è di circa 650 mW per $\lambda \simeq 780$ nm ed intorno a 350 mW per $\lambda \simeq 820$ nm dove si sono svolti gli esperimenti descritti al capitolo 4. La larghezza spettrale di emissione è ti-

picamente inferiore ai 10 MHz³. Il fascio in uscita è polarizzato linearmente per oltre il 90% e presenta una divergenza di circa 2 mrad.

3.2.2 Suddivisione dei fasci e monitoraggio del reticolo

Schema ottico

Lo schema ottico generale del reticolo è riportato in figura 3.8. Prima della suddivisione del fascio proveniente dal laser nei due cammini indipendenti è inserito un otturatore meccanico che consente di bloccare i fasci per prevenire l'arrivo di luce spuria sulla cella. Dopo tale otturatore una lamina $\lambda/2$ ed un cubo polarizzatore suddividono il fascio in due cammini, ciascuno dei quali attraversa un modulatore acustooptico ed entra in una fibra ottica. L'uso delle fibre consente di ottenere in uscita un fascio dal profilo spaziale più pulito e soprattutto rende indipendente l'allineamento del reticolo sulla cella dall'allineamento delle ottiche relative alla modulazione. Il sistema di lamine e cubi polarizzatori consente di variare in modo indipendente la potenza su ciascuno dei due fasci.

Fonti di rumore e monitoraggio del reticolo

Gli AOM sono costituiti da un cristallo di biossido di tellurio che è birifrangente. I due indici di rifrazione variano in modo diverso sia a causa di stress meccanici, sia a causa di gradienti di temperatura [53]. Una conseguenza di questo fatto è che nei primi istanti di accensione dei modulatori, quando la radiofrequenza applicata riscalda il cristallo, la polarizzazione del fascio uscente dall'AOM viene ruotata di diversi gradi. Questo comprometterebbe la bontà della misura perché, come è noto, per poter interferire, le due onde che creano il reticolo devono

³Apparentemente potrebbe sembrare che questo valore sia incompatibile con una modulazione di profondità di alcuni KHz. Tuttavia bisogna notare che il rumore di fase sul laser non influisce in alcun modo sulla velocità del reticolo perché essa è fissata dalla differenza di frequenza tra i due fasci e questa, istante per istante, si mantiene costante indipendentemente dalle fluttuazioni di frequenza del laser.

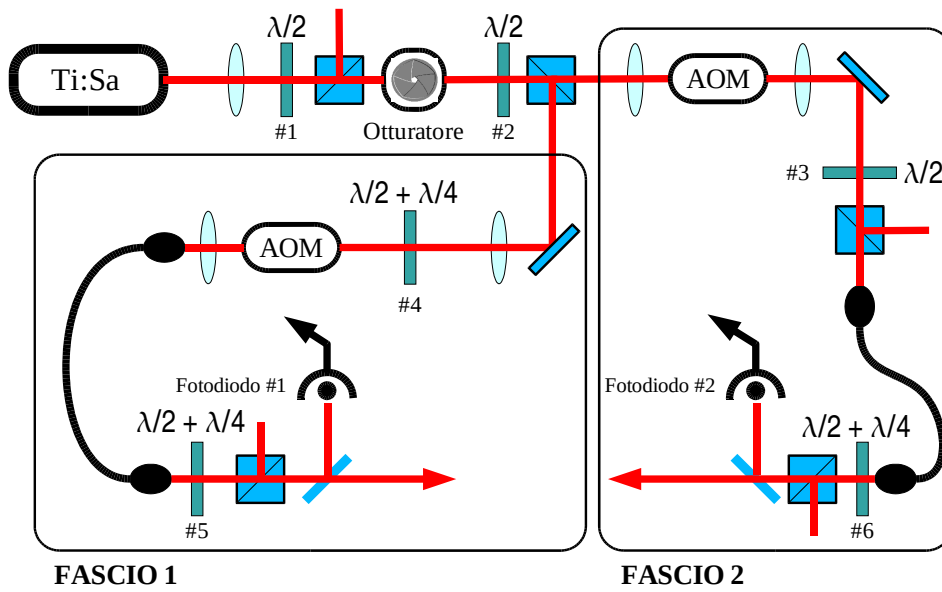


Fig. 3.8: Schema del reticolo ottico (non sono riportate le ottiche di focalizzazione che sono descritte al paragrafo 4.1). Ciascun AOM è inserito nel fuoco di un telescopio per aumentare l'efficienza di modulazione. Mediante la lamina #1 è possibile controllare la potenza inviata ai due fasci, mentre la lamina #2 ripartisce la potenza sui due cammini. La lamina #3 è usata per variare la potenza accoppiata nella fibra del primo fascio, mentre la lamina #4 è utilizzata per compensare eventuali effetti di rotazione di polarizzazione da parte dell'AOM (cfr. testo). Le lamine #5 e #6 infine, servono per compensare eventuali drift nella polarizzazione dei due fasci. L'uso di due lamine $\lambda/4$ e $\lambda/2$ è richiesto perché le lamine utilizzate, progettate per $\lambda \simeq 780 \text{ nm}$, non sono più accurate alla lunghezza d'onda utilizzata negli esperimenti.

trovarsi nel medesimo stato di polarizzazione. Per questo la polarizzazione del fascio che entra negli AOM può essere ruotata in modo da allinearla su uno degli assi ottici del cristallo. Quando questa condizione è soddisfatta si osserva una drastica riduzione di questo effetto di rotazione. In ogni caso per poter controllare l'entità residua di questo effetto si è provveduto ad inserire in uscita da ciascuna fibra due lamine rispettivamente $\lambda/2$ e $\lambda/4$ e un cubo polarizzatore. Così facendo una rotazione della polarizzazione in uscita dalla fibra si trasforma in una variazione nella potenza trasmessa dal cubo alla cella. Quest'ultima è

tenuta sotto controllo da una coppia di fotodiodi su cui, mediante una coppia di vetrini, viene inviata una parte della luce diretta verso la cella. In questo modo, calibrando i fotodiodi, diviene possibile conoscere in ogni misura l'intensità sulla cella di ciascuno dei fasci ed intervenire se necessario ristabilendo il valore di potenza corretto.

3.2.3 Modulazione dei fasci

Per la modulazione dei fasci è sufficiente, come detto all'inizio, usare due modulatori acustooptici. Nel nostro caso si tratta di due Crystal Technology 3080-122 con una frequenza operativa di 80 MHz ed una efficienza massima al primo ordine di oltre il 90% a 780 nm.

La radiofrequenza necessaria al funzionamento dei due dispositivi è ottenuta da due *driver* progettati e costruiti presso il LENS ed il cui schema a blocchi è riportato in figura 3.9. Il cuore del dispositivo è costituito da un VCO (*Voltage Controlled Oscillator*) che presenta in uscita un segnale la cui frequenza è proporzionale alla tensione in ingresso⁴. L'elemento utilizzato negli esperimenti è un POS 100 della MiniCircuit la cui frequenza di taglio (100 MHz) è ampiamente sufficiente per i nostri scopi. Dei due ingressi del *driver* per la modulazione in frequenza, nel corso degli esperimenti è stato utilizzato soltanto l'ingresso indicato in figura come 'PLL 1/40'. Tale ingresso entra in un rilevatore di fase/frequenza digitale Intersil EL4584 che confronta la frequenza in ingresso con la frequenza in uscita dal VCO divisa per 40 ed invia un segnale digitale che corregge la frequenza in uscita dal VCO in modo da minimizzare la differenza di fase e frequenza tra i due segnali. Lo stato di equilibrio del circuito si ha quando l'uscita del VCO è sincrona con l'ingresso del PLL (*Phase Locked Loop*) ed ha una frequenza pari a 40 volte quella in ingresso. Il segnale in ingresso viene fornito da due sintetizzatori Agilent 33120A che sono sincronizzati da un segnale a 10 MHz. Il

⁴In realtà nel circuito è inserito in serie all'ingresso del VCO un integratore e quindi l'uscita dipende dalla *frequenza* del segnale in ingresso di tale integratore.

rumore di fase dei singoli sintetizzatori è inferiore a -55 dBc.

La modulazione in ampiezza avviene mediante un mixer che moltiplica tra loro il segnale in uscita dal VCO e il segnale modulante, come indicato nello schema 3.10. A causa della non linearità nella risposta del mixer, i due *driver* presentano in uscita ampiezze diverse a parità di segnale di modulazione. Regolando il potenziometro indicato in figura è possibile compensare queste differenze nonché eventuali asimmetrie nella risposta al segnale modulato da parte degli amplificatori a cui il segnale viene inviato prima di giungere agli AOM.

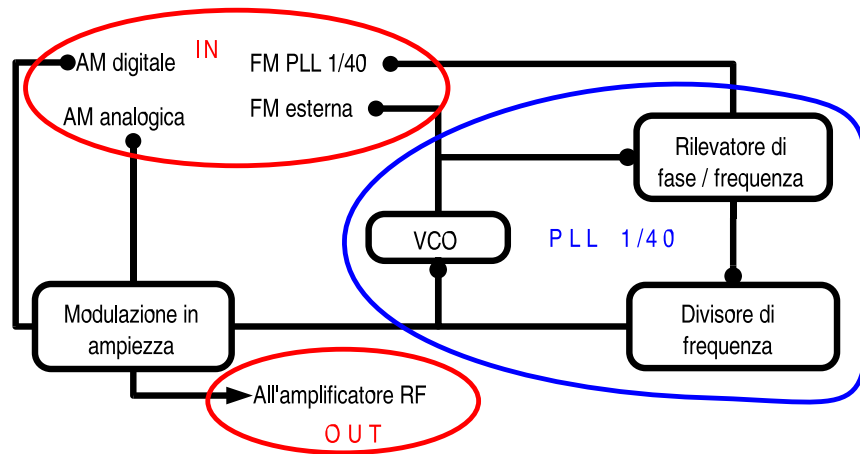


Fig. 3.9: Schema a blocchi del circuito che pilota gli AOM del reticolo: dei quattro ingressi due sono dedicati alla modulazione in ampiezza (indicati come 'AM') e due a quella in frequenza. Il VCO può essere direttamente controllato in frequenza da un segnale digitale (ingresso 'FM esterno') oppure può essere agganciato in fase ad un segnale esterno mediante il PLL (anello agganciato in fase) illustrato in figura e descritto nel testo.

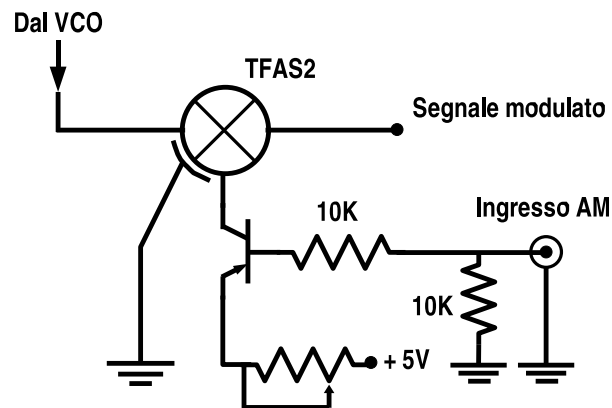


Fig. 3.10: Schema del circuito di modulazione in ampiezza. L'uscita diretta all'amplificatore è proporzionale al prodotto tra il segnale proveniente dal VCO e la tensione di collettore del BJT indicato in figura. La tensione di emettitore è regolata dal potenziometro e fissa la caratteristica di modulazione del dispositivo.

Capitolo 4

Studio sperimentale dei regimi di instabilità

Lo studio dei regimi di instabilità del condensato nel potenziale combinato dato dal confinamento armonico e dal reticolo ottico è stato effettuato misurando la vita media del condensato, cioè il numero di atomi presenti nel condensato, in funzione del tempo trascorso nel reticolo per diversi valori del quasi-impulso $\hbar q$ e diversi valori dell'altezza del reticolo stesso.

Questo ha permesso, per la prima volta, di ottenere una caratterizzazione risolta in tempo dell'instaurarsi dell'instabilità dinamica. In particolare le misure effettuate sono in accordo con il calcolo teorico nel regime lineare presentato al paragrafo 2.5 ed estese alle prime tre zone di Brillouin. Per quanto riguarda l'instabilità energetica si è osservato che, come previsto dalla teoria, i suoi effetti dipendono dalla presenza di meccanismi dissipativi come ad esempio la presenza di atomi non condensati all'interno della trappola. Inoltre si è osservato che, a causa della non omogeneità del sistema, non esiste una transizione netta, ma piuttosto il numero di atomi si riduce progressivamente man mano che una frazione maggiore del condensato diviene energeticamente instabile.

In questo capitolo presenteremo i risultati ottenuti, discutendo in dettaglio la

fenomenologia emersa nel corso di questo studio.

4.1 Ottimizzazione del sistema

Per caratterizzare l'effetto delle instabilità sul tasso di perdita degli atomi dal condensato occorre limitare al massimo le fonti di riscaldamento spurie. Le due fonti principali di riscaldamento e di perdita di atomi dal condensato in interazione con il reticolo sono il rumore del campo magnetico che condiziona la stabilità del potenziale di confinamento ed il riscaldamento introdotto dal reticolo stesso. Quest'ultimo agisce a due livelli: da un lato con le fluttuazioni proprie del potenziale periodico che determinano una diffusione del momento atomico (cfr. §2.3.1) e dall'altro con le fluttuazioni strumentali dovute al rumore sul laser (frequenza e ampiezza) e al rumore meccanico introdotto dalla vibrazione degli specchi. In tutti i casi lo svuotamento del condensato alimenta una nuvola di atomi termici che, collidendo con gli atomi rimasti nel condensato, determinano ulteriori perdite.

Per quanto riguarda le fluttuazioni intrinseche del potenziale dipolare, esaminando l'equazione (2.22), si è già sottolineato che il riscaldamento introdotto dal reticolo può essere minimizzato intervenendo sul *detuning* rispetto alla risonanza. Aumentare il *detuning* richiede però di raggiungere intensità elevate per mantenere costante l'altezza del reticolo, come si evince dalla (2.8).

L'intensità (I) di un fascio laser TEM₀₀ decresce allontanandosi dal centro del fascio secondo la relazione:

$$I(r) = \frac{2P}{\pi w_0^2} \exp\left(-\frac{2r^2}{w_0^2}\right) \quad (4.1)$$

dove P indica la potenza totale e w_0 il cosiddetto *waist* del fascio, cioè la distanza a cui l'intensità diminuisce di un fattore e^2 rispetto al valore di picco. A parità di potenza, è quindi possibile compensare l'effetto sull'altezza del reticolo dovuto all'aumento del *detuning*, riducendo le dimensioni del fascio, cioè

aumentandone la focalizzazione. Il limite inferiore alle dimensioni utilizzabili è fissato da alcune considerazioni di principio: in primo luogo è necessario che le dimensioni del fascio siano maggiori delle dimensioni del condensato in direzione assiale ($R_{\perp} \sim 10 \mu\text{m}$), inoltre non si vuole introdurre un confinamento assiale causato del gradiente di intensità e quindi occorre mantenersi almeno un ordine di grandezza sopra il limite precedente. A queste considerazioni si aggiungono anche due rilievi di ordine sperimentale: in primo luogo il fatto che riducendo le dimensioni del fascio si riduce anche la profondità di fuoco e secondariamente il fatto che, minori sono le dimensioni dei fasci, maggiori sono le difficoltà che si incontrano durante l'allineamento del reticolo. Per tutte queste considerazioni si è scelto un diametro di circa $200 \mu\text{m}$ a cui, nell'ipotesi di avere un fascio alla lunghezza d'onda di 820 nm limitato per diffrazione, corrisponde una distanza alla quale il *waist* aumenta di un fattore $\sqrt{2}$ (parametro di Rayleigh) pari a:

$$z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \simeq 15 \text{ cm} \quad (4.2)$$

Questo valore risulta più che accettabile, date le tolleranze nella determinazione della posizione del condensato all'interno della cella e nel posizionamento delle ottiche di focalizzazione.

Il primo passo per il posizionamento delle ottiche è stata la caratterizzazione dei fasci in uscita dalle fibre. Questo è stato fatto misurando il diametro del fascio in diverse posizioni e facendo un fit all'espansione del fascio attesa per il modo TEM_{00} e data dalla relazione:

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z - z_0}{z_R} \right)^2} \quad (4.3)$$

dove il parametro z_0 indica la posizione del fuoco rispetto all'origine del riferimento.

I risultati ottenuti per i due fasci sono riportati in figura 4.1. A partire da queste misure, avvalendosi di simulazioni basate sul formalismo delle matrici ABCD, si è progettato un sistema ottico inserendo due lenti convergenti di focale rispettivamente $f_1 = 300 \text{ mm}$ e $f_2 = 500 \text{ mm}$ sul primo e $f_1 = f_2 = 500 \text{ mm}$ sul secondo

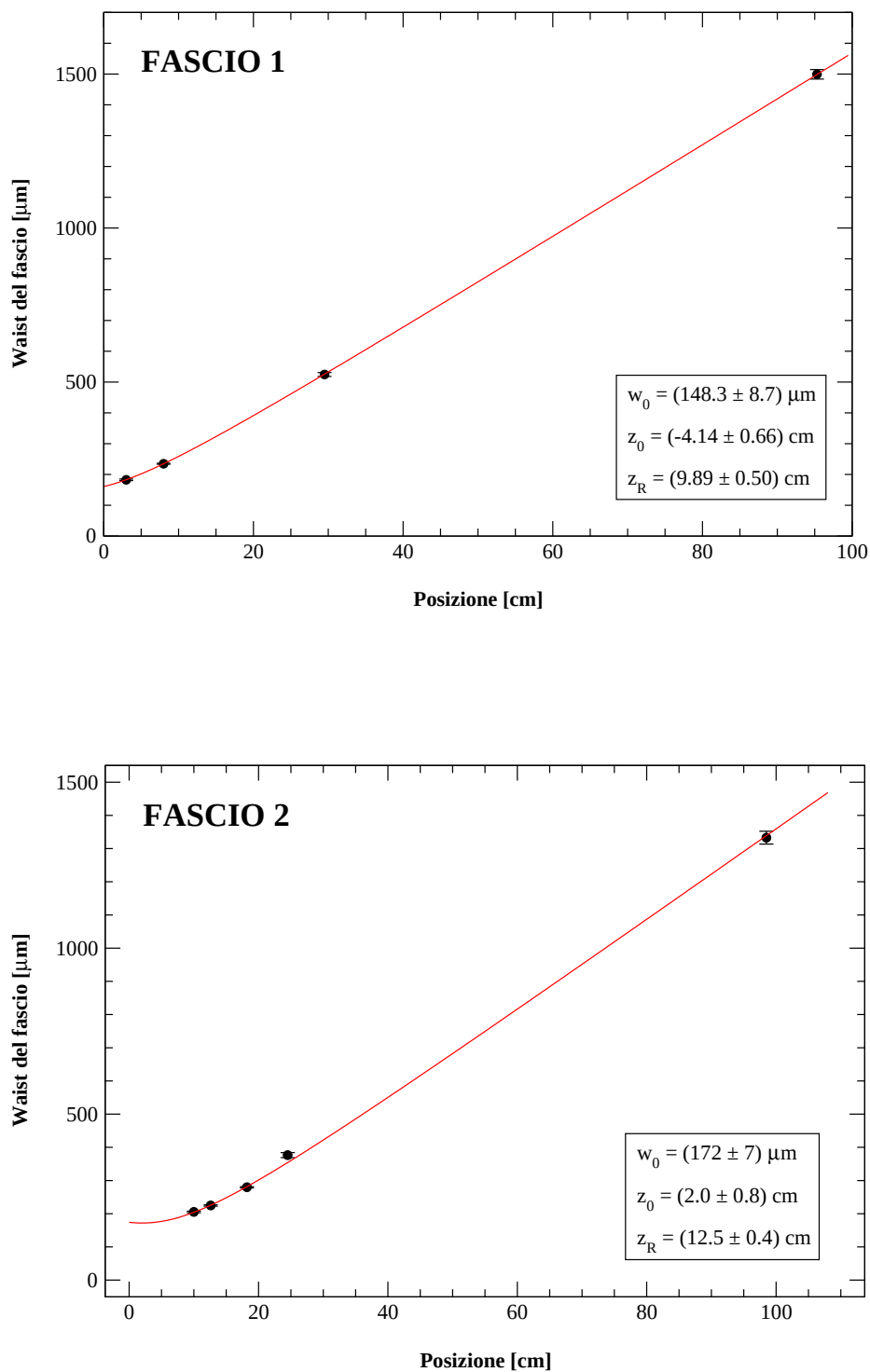


Fig. 4.1: Caratterizzazione dei fasci in uscita dalle fibre (cfr. fig. 3.8). Sono riportate le misure del diametro del fascio per diverse distanze dal collimatore posto in uscita di ciascuna fibra. Il significato dei simboli è spiegato nel testo.

fascio nelle posizioni indicate in figura 4.2. Il risultato ottenuto consente, lavo-

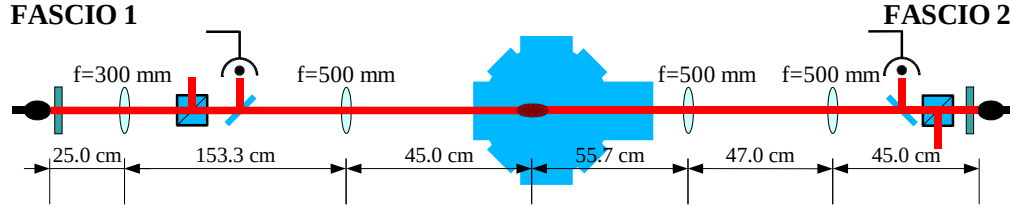


Fig. 4.2: Schema delle ottiche per la focalizzazione del reticolo: l’ellisse più scura indica la posizione approssimativa del centro della trappola magnetica. I raggi ottenuti sono rispettivamente: $(192.4 \pm 2.5) \mu\text{m}$ per il fascio 1 e $(212.8 \pm 1.5) \mu\text{m}$ per il fascio 2

rando alla lunghezza d’onda di 820.5 nm ¹, corrispondente ad un *detuning* dalla riga D1 ($\lambda_0 \simeq 795 \text{ nm}$) di quasi 100 THz, di raggiungere, con una stima ragionevole di 11 mW per fascio di potenza sulla cella, un valore del parametro s di circa 2 ed un corrispondente tasso di diffusione di fotoni pari a $\Gamma_{sc} \simeq 0.02 \text{ sec}^{-1}$, corrispondente ad un tempo di decadimento $\tau_{sc} \simeq 50 \text{ sec}$, molto maggiore di quello dovuto ai processi che avvengono in trappola magnetica.

Al paragrafo 3.1.1 abbiamo sottolineato che gli atomi nella trappola magnetica collidono con il gas di fondo presente nella cella e abbiamo già detto che a questo si aggiunge l’effetto di riscaldamento indotto dalle fluttuazioni del potenziale magnetico. Una stima di questi effetti è data dalla vita media degli atomi nella trappola magnetica a temperatura maggiore di quella critica che è pari a $\tau_{mag} \simeq 100 \text{ sec}$. Tuttavia, rispetto ad una nuvola di atomi “termici”, il condensato risente in maniera forte delle collisioni con gli atomi di rubidio ancora presenti nella trappola magnetica o aventi energie di poco superiori alla profondità della trappola. Infatti, dato che alle energie in gioco le collisioni sono prevalentemente elastiche (cfr. §1.2), questi atomi hanno la probabilità maggiore di indurre delle

¹Tale lunghezza d’onda è risultata la massima utilizzabile dal punto di vista sperimentale. Infatti, nonostante il laser utilizzato per generare il reticolo possa emettere a lunghezze d’onda ancora maggiori (cfr. 3.2.1), la riflettività degli specchi oltre 820 nm degrada rapidamente riducendo la potenza disponibile sulla cella.

perdite dal condensato. Questo si riflette nel fatto che la vita media del condensato nel solo potenziale magnetico è pari a soli (5.0 ± 0.3) sec.

Si può migliorare questo risultato se si agisce in modo da rimuovere continuamente gli atomi persi dal condensato che hanno una “temperatura” di poco superiore a quella critica. Questo può essere fatto applicando alla trappola magnetica un cosiddetto “scudo a radiofrequenza” [54]. In pratica la radiofrequenza viene lasciata accesa anche dopo il termine dell’evaporazione (cfr. §3.1.6): così facendo il processo di evaporazione forzata prosegue fissando la “temperatura” del sistema [51]. L’uso dello scudo a radiofrequenza ha consentito di aumentare la vita media del condensato nella sola trappola magnetica come illustrato in figura 4.3. Il riscaldamento connesso al potenziale magnetico rimane dominante rispetto a quello dovuto al reticolo, ma l’introduzione dello scudo a radiofrequenza migliora di molto la sensibilità del sistema ad altre fonti di perdita.

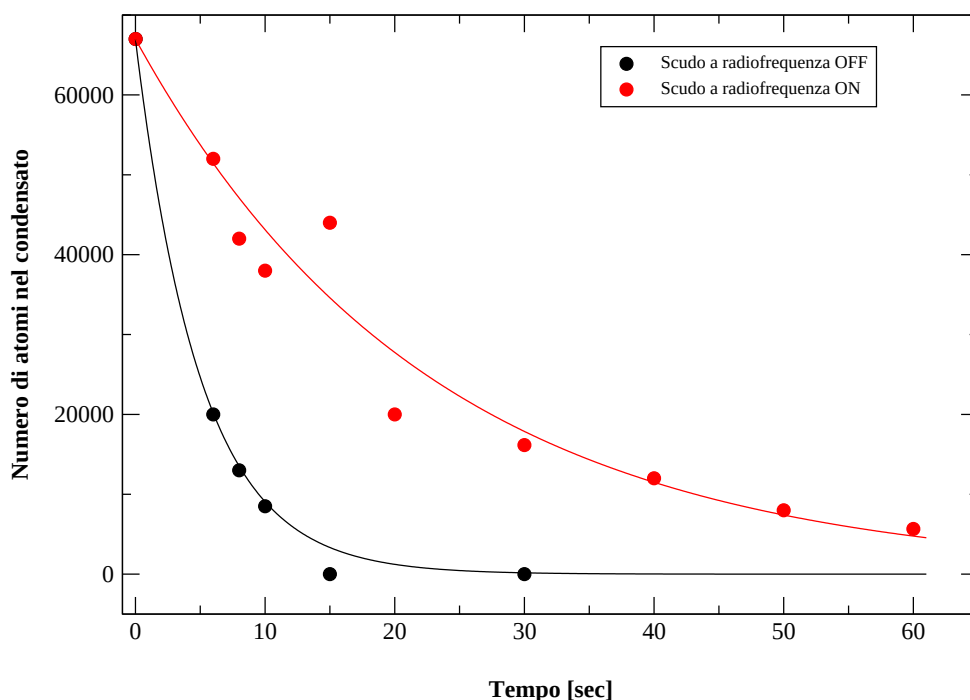


Fig. 4.3: Misura di vita media del condensato nel solo potenziale magnetico con scudo a radiofrequenza spento e acceso. Il valore di vita media passa dai (5.0 ± 0.3) sec ai (22.7 ± 2.7) sec.

Resta da valutare il contributo dovuto alle fluttuazioni strumentali del potenziale periodico. Queste sono come detto riconducibili al rumore di ampiezza del laser, alla sua larghezza spettrale di emissione e alle vibrazioni meccaniche sugli specchi. Per quanto riguarda il rumore di fase sul laser, abbiamo già notato al paragrafo 3.2.1 che questo non contribuisce alle fluttuazioni del potenziale periodico perché non si propaga alla fase relativa tra i due fasci che formano il reticolo. Il rumore in ampiezza invece può essere incluso nel nostro modello del reticolo come un rumore sul parametro s . Questo però non influisce sulle misure perché, come visto al paragrafo 3.2.2, la potenza inviata sugli atomi viene controllata in ogni ciclo di ripetizione dell'esperimento, consentendo così di rigettare le misure con eccessive fluttuazioni di intensità².

La fonte principale di rumore strumentale è quindi costituita dalla vibrazione meccanica delle ottiche. I due fasci percorrono infatti cammini ottici molto diversi, come in parte si può evincere dalla figura 4.2 e, a causa di questa differenza, acquistano un rumore di fase relativo che ne limita la coerenza, degradando la qualità del potenziale periodico.

Questo effetto è stato da noi quantificato misurando la larghezza della nota di battimento tra i due fasci. Per un reticolo ideale come quello presentato al paragrafo 2.2, lo spettro di potenza è costituito da un picco a δ di Dirac centrato intorno alla frequenza $\Delta\nu = \Delta\omega/2\pi$ corrispondente al battimento tra i due fasci laser. La presenza di rumore di fase relativo fa sì che questo picco presenti una larghezza finita. Questa è stata misurata osservando lo spettro di potenza del segnale di un fotodiodo veloce su cui si sono inviati i due fasci. Si è ottenuto un profilo di riga gaussiano con una larghezza (σ_ν) di (160 ± 20) Hz con un tempo di integrazione di 50 ms e per una velocità corrispondente a $\Delta\nu = 8$ KHz.

²Questo vale ovviamente per fluttuazioni fino a frequenze di qualche decina di Kiloherz, data la frequenza di campionamento del segnale dei fotodiodi. Inoltre, nelle misure a tempi lunghi, si sono osservate derive di intensità non eliminabili perché dovute a gradienti di temperatura sugli AOM (cfr. §3.2.2), ma comunque contenute.

L'effetto di questo rumore meccanico influenza gli esperimenti in due modi: da un lato costituisce una indeterminazione sulla velocità del reticolo che, come si è visto, dipende da $\Delta\omega$, e dall'altro costituisce una fonte di riscaldamento, paragonabile alle altre fluttuazioni del potenziale periodico trattate al paragrafo 2.3.1. Il primo di questi fattori corrisponde ad una indeterminazione relativa dell'ordine di:

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\sigma_\nu}{\Delta\nu} \simeq 2\%$$

Il secondo aspetto invece influisce in maniera non facilmente predicibile ma sperimentalmente evidente come mostrato dalle misure riportate in figura 4.4. Come

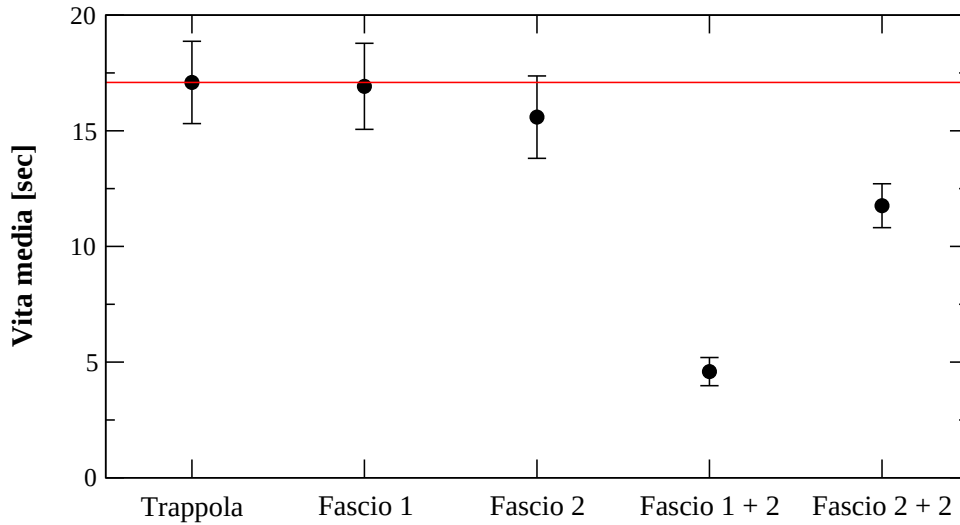


Fig. 4.4: Vite medie del condensato per diverse condizioni sperimentali: (da sin.) in presenza del solo potenziale magnetico, in presenza dei singoli fasci di reticolo, in presenza dei due fasci di reticolo contropropaganti ed infine in presenza di un solo fascio retrorifleso. In tutte le misure è applicato lo scudo a radiofrequenza ed i fasci di reticolo, ove presenti, sono calibrati per $s = 1.15$.

si vede il valore della vita media del condensato in trappola magnetica e quelli ottenuti illuminando il condensato con ciascuno dei fasci di reticolo singolarmente, sono uguali entro l'errore. Questo è in accordo con il calcolo *a priori* per cui la diffusione di momento indotta da ciascuno dei fasci è trascurabile rispetto ai pro-

cessi che avvengono nella trappola magnetica. Introducendo ambedue i fasci di reticolo alla stessa frequenza ($v = 0$), si assiste ad una netta riduzione della vita media non compatibile con la somma degli effetti su singolo fascio. Questa riduzione è causata dalle vibrazioni meccaniche sugli specchi: infatti, se si effettua la misura usando un singolo fascio retroriflesso anziché due fasci indipendenti, la vita media ottenuta, benché inferiore al valore della sola trappola magnetica, è di molto superiore al caso di fasci indipendenti. Questo perché, nel primo caso, le uniche vibrazioni meccaniche che hanno effetto sulla nota di battimento sono quelle dello specchio retroriflettente e sono quindi molto minori rispetto al caso dei due cammini indipendenti. Sfortunatamente in questa configurazione variare la velocità del reticolo non è tecnicamente possibile e di conseguenza essa non è stata applicata agli esperimenti effettuati. Si è anche osservato che l'entità del riscaldamento introdotto dalle vibrazioni meccaniche dipende dall'altezza del potenziale periodico e diviene il fattore dominante per $s \geq 1$.

4.2 Calibrazione del reticolo

Come abbiamo visto nel paragrafo 2.2 il parametro s che definisce l'altezza del reticolo ottico può essere calcolato se si conoscono le intensità dei due fasci. In pratica però, data l'impossibilità di controllare l'effettivo allineamento dei due fasci sul condensato e l'intensità effettiva agente sugli atomi, con questo metodo si potrebbero commettere errori sistematici nella determinazione del parametro s . Per ovviare a questo inconveniente la calibrazione dell'altezza del reticolo viene effettuata sperimentalmente con un metodo basato sulla cosiddetta diffrazione Bragg del condensato di Bose-Einstein [4]. Questo metodo si basa su un fenomeno fisico che può essere visto in due modi complementari. Rimanendo nell'ambito della teoria di Bloch, se si immagina di caricare in maniera non adiabatica il condensato con $q = q_B$, cioè al bordo della prima zona di Brillouin e quindi di spegnere il reticolo sempre in maniera non adiabatica, il risultato sarà quello di

popolare un numero molto elevato di bande, ciascuna delle quali evolverà nel reticolo ottico con un fattore esponenziale dato da $\exp(-iE_{n,q_B}t/\hbar)$. Il successivo spegnimento istantaneo proietterà stati di quasimomento in stati di momento separati di $2\hbar k$, ciascuno avente ampiezza data dall'interferenza dell'evoluzione temporale dei singoli stati di Bloch così come calcolabile dalla (2.29). Per un'altezza del reticolo sufficientemente bassa e per tempi di evoluzione all'interno del reticolo dell'ordine di alcune centinaia di microsecondi risulteranno popolate in maniera significativa solo le componenti aventi impulso rispettivamente 0 e $2\hbar k$. Dalla frequenza di oscillazione della popolazione di queste due componenti in funzione del tempo di interazione con il reticolo, misurata lasciando espandere la nuvola atomica, di modo che le due componenti possano essere spazialmente risolte, è possibile risalire all'altezza del reticolo s .

Questo stesso fenomeno può anche essere visto come una transizione Raman stimolata tra due stati d'impulso differenti come indicato in figura 4.5. L'atomo, per tempi di interazione sufficientemente brevi, viene trasferito da uno dei due fasci laser in uno stato virtuale dal quale ritorna allo stato fondamentale per emissione stimolata dall'altro fascio. Per la conservazione della quantità di moto, durante il processo l'atomo acquista un impulso $2\hbar k$ e di conseguenza un'energia cinetica pari a $4E_{rec}$, mentre perde un'energia data dalla differenza di energia tra i fotoni dei due fasci: $\hbar\Delta\omega$. Ne consegue che il processo è risonante se:

$$\Delta\omega = 4 \frac{\hbar k^2}{2m} \quad (4.4)$$

ovvero, come si ottiene usando la (2.17), se la velocità del reticolo è

$$v = \frac{\Delta\omega}{2k} = \frac{\hbar k}{m} \quad (4.5)$$

cui corrisponde un quasimomento $\hbar q = \hbar k = \hbar q_B$ pari a quello di bordo zona. Ovviamente se l'intensità dei laser è molto elevata o il *detuning* molto ridotto possono avere un effetto misurabile anche processi a quattro, otto ecc. fotoni il cui effetto è far comparire ulteriori componenti d'impulso come evidenziato

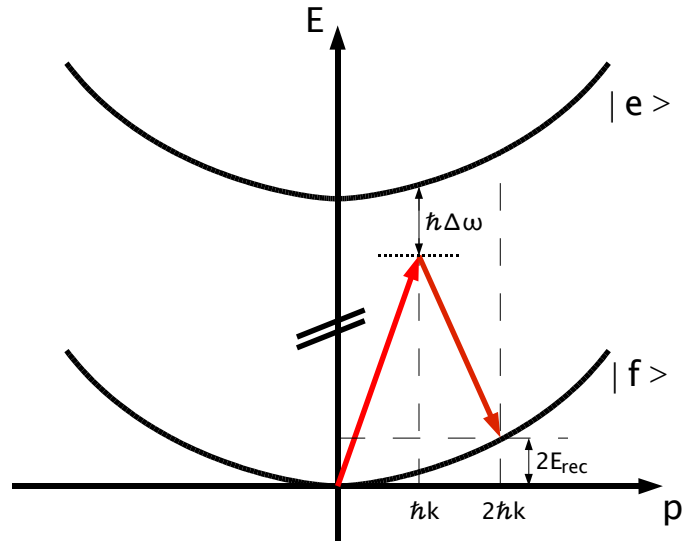


Fig. 4.5: Schema della transizione Bragg: l'atomo subisce un processo a due fotoni che non varia lo stato interno, ma cambia l'impulso da 0 a $2\hbar k$.

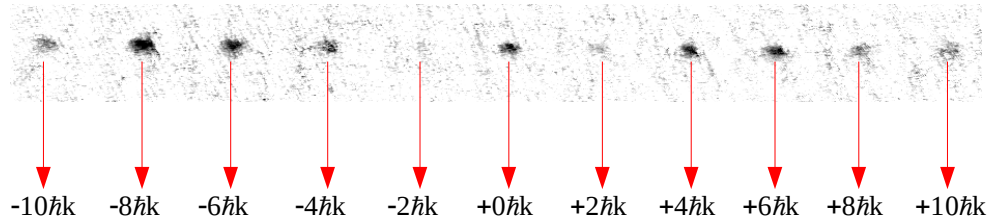


Fig. 4.6: Esempio di diffrazione Bragg di ordine elevato, le condizioni sperimentali sono un'intensità di circa 10 W/cm^2 ed un detuning di circa $2\pi \times 1 \text{ THz}$ dalla riga D2 del ^{87}Rb . Sono coinvolti processi a 10 fotoni come testimoniato dalla popolazione presente nello stato di momento $\pm 10\hbar k$.

in figura 4.6. Questo processo si può trattare come una vera transizione Raman stimolata la cui frequenza di Rabi è sperimentalmente misurabile seguendo l'evoluzione della popolazione relativa dei due picchi al variare del tempo di interazione tra il condensato ed il reticolo. Questa frequenza di Rabi è legata all'altezza del potenziale periodico dalla semplice relazione [55] $\nu_{Rabi} = V_0/h$ da cui, ricordando la definizione di s (2.16), si ottiene

$$s = \frac{2\nu_{Rabi}}{\nu_{rec}} \quad (4.6)$$

dove $\nu_{rec} = E_{rec}/h$. Sperimentalmente la procedura di misura è complicata dal fatto che, date le ridotte dimensioni dei fasci (cfr. §4.1), è necessario effettuare la calibrazione all'interno della trappola stessa. Così facendo, gli atomi che compiono la transizione Bragg sono in moto all'interno della trappola stessa e collidono con gli atomi fermi nel sistema di riferimento del laboratorio. Poiché a questa energia le collisioni sono in onda s e prevalentemente elastiche, l'effetto complessivo è creare una nuvola di atomi aventi impulso medio pari a $\hbar k$, che quindi riduce la visibilità dei due picchi con momento 0 e $2\hbar k$ come mostrato in figura 4.7. Questo inconveniente viene superato in due modi: da un lato si

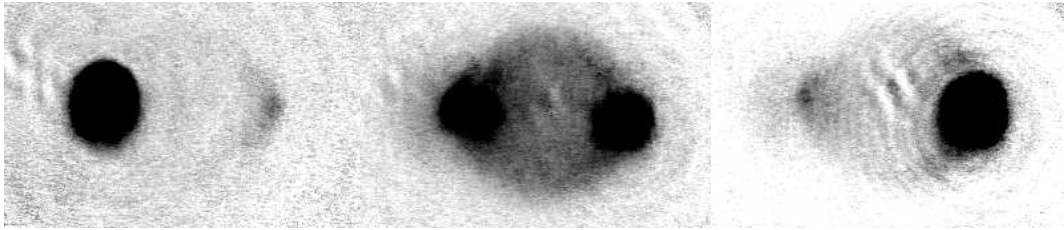


Fig. 4.7: Tre immagini ottenute applicando al condensato un impulso Bragg della durata rispettivamente di 83, 167 e 625 μs . In tutte e tre le immagini il condensato originario è quello a sinistra, mentre a destra è visibile il picco formato dagli atomi con momento $2\hbar k$: si noti l'alone circolare formato dagli atomi che hanno compiuto diffusione in onda s .

cerca di minimizzare il tempo che intercorre tra lo spegnimento del reticolo ed il rilascio degli atomi dalla trappola e dall'altro si effettua un fit del centro di massa

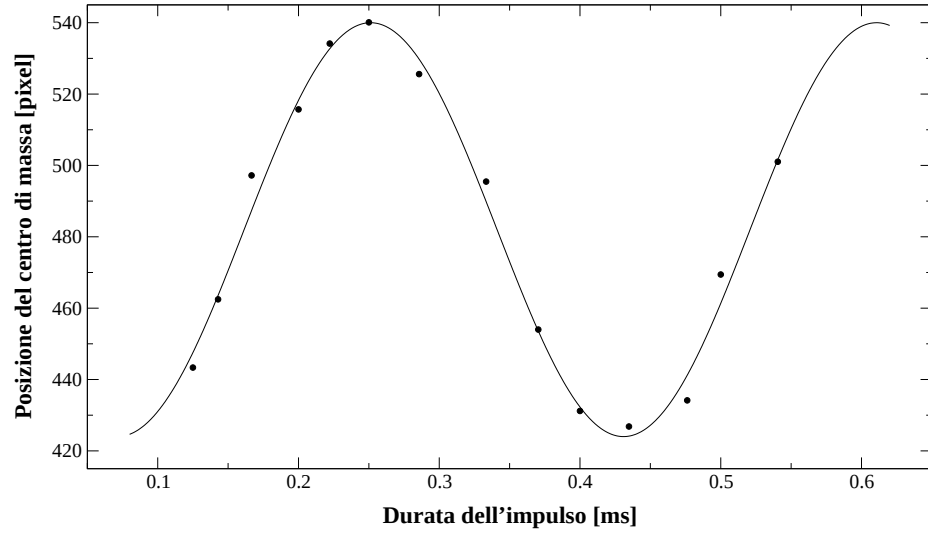


Fig. 4.8: Esempio di taratura del reticolo mediante diffrazione di Bragg. Il fit ad un'oscillazione sinusoidale fornisce la frequenza: $\nu_{Rabi} = (2.782 \pm 0.036)$ KHz. Usando la (4.6) si ottiene per $\lambda = 820.45(1)$ nm, il valore: $s = 1.631 \pm 0.021$.

della distribuzione di densità acquisita nell'immagine³. Così facendo, dato che la posizione degli atomi dipende dall'impulso che essi avevano al momento dello spegnimento della trappola, il centro di massa della distribuzione di densità nello spazio reale fornisce informazioni sul centro di massa nello spazio dei momenti e quindi sulla popolazione relativa di atomi aventi momento $2\hbar k$. Un esempio di calibrazione con questo metodo è illustrato in figura 4.8. Una volta ottenuto il valore di s , noto il segnale sui fotodiodi (v. fig. 3.8) si può impostare il reticolo all'altezza desiderata ricordando che, come indicato dalla (2.8), l'altezza del potenziale è proporzionale all'intensità.

³Viene calcolato il momento primo della distribuzione di densità ottica che, come visto al paragrafo 3.1.7 è uguale a quello della densità di massa:

$$\begin{cases} x_{CM} &= \sum_{z,y} z \cdot OD(z,y)/A \\ y_{CM} &= \sum_{z,y} y \cdot OD(z,y)/A \end{cases}$$

dove A indica il fattore di normalizzazione $\sum_{z,y} OD(z,y)$.

4.3 Vita media del condensato: instabilità dinamica

4.3.1 Procedura sperimentale

La procedura sperimentale adottata è la seguente: dopo aver prodotto il condensato come descritto nel capitolo precedente, il reticolo ottico viene acceso in maniera adiabatica con una rampa di durata t_{RAMP} e quindi spento in maniera adiabatica dopo un intervallo di tempo Δt . Contemporaneamente allo spegnimento del reticolo viene spento anche il potenziale armonico e, dopo 28 ms di espansione, viene misurato il numero di atomi presenti nel condensato mediante un'immagine in assorbimento come descritto al paragrafo 3.1.7. Ripetendo l'esperimento per diversi valori di Δt diviene possibile ricostruire l'andamento del numero di atomi rimasti nel condensato in funzione del tempo trascorso nel reticolo. Un tipico risultato di questa procedura è riportato in figura 4.9. Come si vede i risultati sono in accordo con un decadimento esponenziale tipico di un processo in cui la frazione di atomi persi nell'unità di tempo non dipende dal numero di atomi⁴:

$$\dot{N}/N = -\gamma \Rightarrow N(t) = N_0 e^{-\gamma t} \quad (4.7)$$

La costante γ indica il tasso di perdita per unità di tempo, mentre al suo inverso $\tau = 1/\gamma$ si può dare il significato di *vita media del condensato*.

Lo spegnimento adiabatico del reticolo è utile al tipo di misure descritte sopra, perché così facendo si riportano le diverse componenti d'impulso corrispondenti allo stato di Bloch in cui il condensato è stato caricato, ad un'unica componente, rendendo così più semplice il conteggio degli atomi. L'adiabaticità in fase di accensione del reticolo è ottenuta applicando una rampa approssimativamente lineare e di durata variabile ai *driver* dei due modulatori acusto-ottici inseriti sui

⁴Per le densità da noi raggiunte il contributo alle perdite dovuto a ricombinazioni a tre corpi ($\dot{N} \propto N^3$), è trascurabile [56]

fasci del reticolo (cfr. §3.2.3), mentre lo spegnimento adiabatico è garantito dal tempo di chiusura dell'otturatore meccanico inserito prima della suddivisione dei fasci (v. fig. 3.8) che è circa 0.5 ms.

L'adiabaticità dell'intera procedura viene verificata accendendo il reticolo con una rampa della durata di 0.5 ms e spegnendolo dopo circa 1 ms con una rampa della medesima durata: se la rampa è sufficientemente lenta da assicurare l'adiabaticità, allora dopo lo spegnimento si osserva una sola componente di momento uguale a quella iniziale del condensato: viceversa, se la rampa è troppo veloce, allora saranno popolate anche le componenti di momento $\pm 2\hbar k$ [5]. Nei punti più prossimi al bordo della zona di Brillouin, dove soddisfare al requisito di adiabaticità è più difficile (cfr. §2.4.2), si è applicata una rampa più lunga usando gli AOM anche in fase di spegnimento e verificando l'adiabaticità con la procedura esposta sopra ed illustrata in figura 4.10 per $t_{RAMP} = 2$ ms. Il tempo di rampa è stato comunque selezionato in modo da essere il più breve possibile per non influenzare la misura di vita media (si è cercato cioè di soddisfare la condizione $t_{RAMP} \ll \tau$).

4.3.2 Misure di vita media con scudo a radiofrequenza

Per essere sicuri di lavorare ogni volta con un condensato puro, la misura di vita media con scudo a radiofrequenza ha richiesto, per ogni valore di Δt , di ottimizzare il taglio a radiofrequenza. La condizione ottimale è data da quel taglio che dà il massimo numero di atomi: quando il condensato è puro infatti, la componente termica residua è minima e di conseguenza il sistema subisce un minore riscaldamento e, a parità di tempo, il numero di atomi condensati è maggiore.

Sono state effettuate tre serie di misure per diversi valori dell'altezza del reticolo s : 0.05, 0.20 e 1.15. L'incertezza nella determinazione di questo parametro è quella associata alla calibrazione mediante diffrazione di Bragg (cfr. §4.2) ed è tipicamente inferiore al 5%.

I risultati ottenuti per il tasso di perdita γ sono riportati nella prima colonna

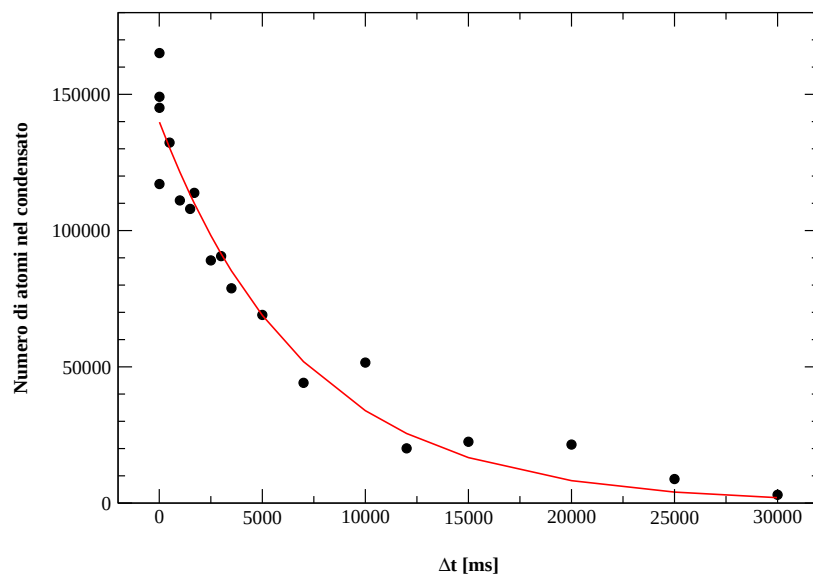


Fig. 4.9: Numero di atomi nel condensato in funzione del tempo trascorso nel reticolo ottico mobile con altezza pari a $s = 0.2$ e velocità $v = 0.3 v_B$. Il fit ad un decadimento esponenziale fornisce una vita media pari a (7.06 ± 0.72) sec.

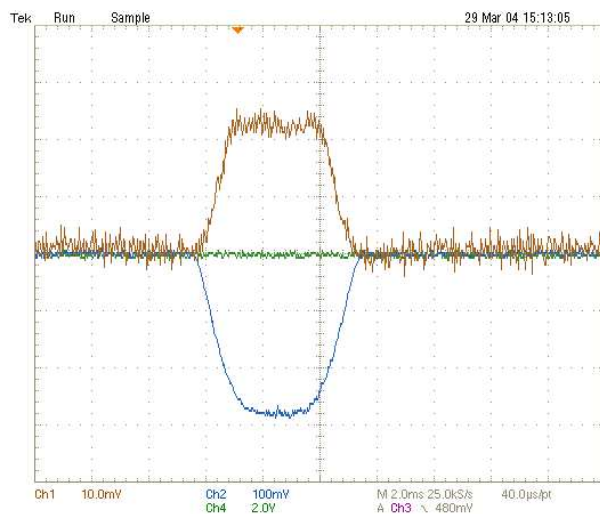


Fig. 4.10: Segnale dei fotodiodi (v. fig. 3.8) che illustra la procedura usata per il test di adiabaticità. La durata della rampa è di circa 2 ms.

della figura 4.11: il tasso di perdite dipende molto fortemente dal quasi-impulso e varia di quasi tre ordini di grandezza nella regione di parametri da noi studiata, passando da 0.07 sec^{-1} per $s = 0.05$, $q = 0$ (condensato stabile) a 0.07 ms^{-1} per $s = 1.15$, $q = 1.3$ (condensato dinamicamente instabile). Al crescere dell'altezza del reticolo l'andamento delle perdite in funzione del quasi-impulso cambia qualitativamente aspetto. Per il valore più basso dell'altezza del reticolo da noi studiato (fig. 4.11A) il tasso di perdita si presenta simmetrico rispetto al bordo tra la prima e la seconda zona di Brillouin e sperimentalmente non si osservano discontinuità in corrispondenza dell'instaurarsi dell'instabilità dinamica. Avvicinandosi al bordo tra la seconda e la terza zona di Brillouin, in particolare, il sistema si comporta come se fosse stabile: questo è dovuto al fatto che, per un valore così basso del potenziale periodico, lo spettro di particella libera e quello di onda di Bloch sono di fatto coincidenti e le uniche differenze sono apprezzabili solo in una regione molto vicina al bordo banda non accessibile dal punto di vista sperimentale a causa della non adiabaticità in fase di caricamento. Non appena però si aumenta l'altezza del reticolo di un fattore 4 (fig. 4.11B), il comportamento del tasso di perdita presenta una discontinuità per $q \simeq 0.55 q_B$ e diviene più asimmetrico rispetto al primo bordo-zona. Anche in questo caso però nella zona sperimentalmente accessibile non sono visibili effetti in vicinanza del secondo bordo-zona. Tali effetti diventano visibili per il valore più elevato da noi esaminato ($s = 1.15$, fig. 4.11C). Si ha infatti che, oltre ad una discontinuità per $q = 0.55 q_B$, il tasso di perdita aumenta avvicinandosi al primo bordo-zona, continua a crescere fino ad un massimo per $q \simeq 1.3 q_B$ e poi diminuisce fino al secondo bordo-zona. Qui si osserva una nuova discontinuità: il tasso di perdita aumenta bruscamente per poi continuare a diminuire man mano che ci si avvicina alla regione in cui spettro di Bloch e spettro di particella libera coincidono.

Questo comportamento è riprodotto in maniera qualitativa dal tasso di crescita del modo più instabile, ovvero il massimo della parte immaginaria $|\omega_i|$ dello spettro di $\sigma_z A$ (cfr. §2.5.2) che è riportato nella seconda colonna della figura

4.11. Questo tipo di confronto, effettuato qui per la prima volta, ha stimolato l'estensione del calcolo sulla stabilità del sistema anche oltre la prima banda cui si erano limitati tutti gli autori citati al paragrafo 2.5.

Come si vede, per ciascun valore di s , la teoria riproduce in modo qualitativo l'andamento del tasso di perdita in funzione del quasi-impulso. Un confronto quantitativo tra il tasso di perdita sperimentalmente misurato e quello di crescita del modo più instabile calcolato teoricamente non è possibile per diverse ragioni: la prima è che le previsioni teoriche sono ricavate in approssimazione lineare e questa, come già discusso al paragrafo 2.5.2, perde certamente di validità subito dopo i primi millisecondi di interazione quando le eccitazioni non sono più piccole perturbazioni della soluzione iniziale. L'osservazione sperimentale di un tasso di perdita inferiore a quello previsto suggerisce che, fuori dal regime lineare, intervengano alcuni meccanismi che smorzano la crescita dei modi instabili. Tra questi gioca sicuramente un ruolo fondamentale l'interazione tra i gradi di libertà assiali e quelli radiali: come mostra l'analisi teorica svolta in [23], la tridimensionalità del sistema unita al carattere non lineare delle interazioni fa sì che l'energia associata ai modi instabili (assiali) possa essere trasferita a quelli radiali permettendo al sistema di recuperare in parte la coerenza di fase⁵.

Inoltre si deve tenere presente che le previsioni teoriche si riferiscono al tasso di crescita del singolo modo instabile, mentre non si ha ragione per ritenere che nell'esperimento sia eccitato un singolo modo: anche in questo caso un'eventuale accoppiamento tra i diversi modi instabili complica il quadro teorico e va nella direzione di un abbassamento del tasso di perdita rispetto al valore di singolo modo.

Un accordo quantitativo è però presente se si analizza la soglia per l'instaurarsi dell'instabilità dinamica. Infatti, per i due valori di s più elevati (0.2 e 1.15), al di sopra di un certo valore di q (rispettivamente $(0.56 \pm 0.01) q_B$ e

⁵Il reticolo è presente solo in direzione assiale e quindi i modi radiali sono stabili e tendono a smorzarsi.

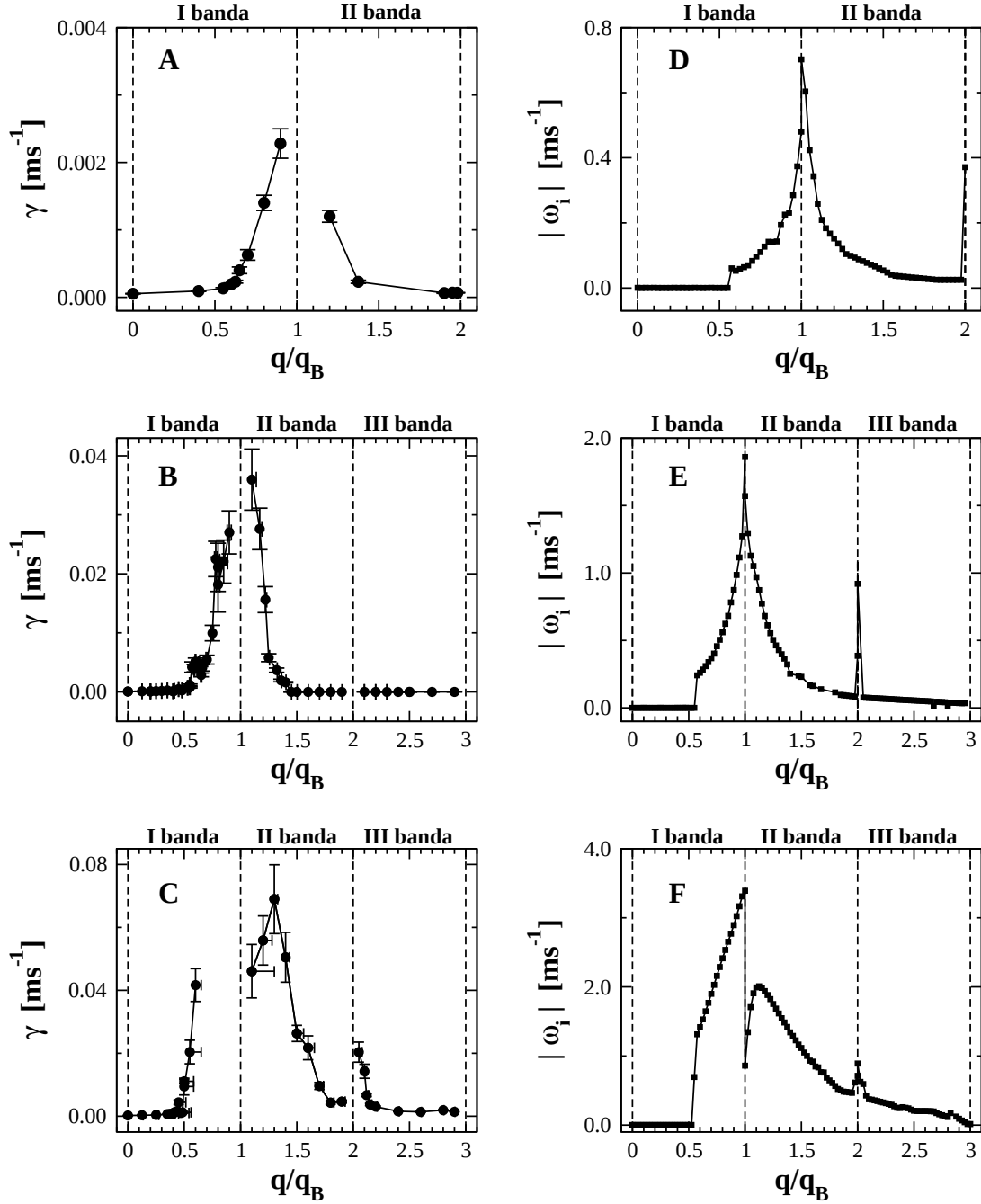


Fig. 4.11: Tasso di perdita (γ) misurato sperimentalmente (A-B-C) e tasso di crescita del modo più instabile ($\max |\omega_i|$) calcolato a partire dall'equazione NPSE (D-E-F) per $s=0.05$ (A-D), $s=0.2$ (B-E) e $s=1.15$ (C-F). L'errore sul tasso di perdita è quello ottenuto dal fit così come illustrato al paragrafo 4.3.1; per le barre di errore orizzontali si veda invece il paragrafo 4.3.3. Si notino le diverse scale verticali, ma l'andamento qualitativamente simile tra il dato teorico e quello sperimentalmente per ciascun valore del parametro s .

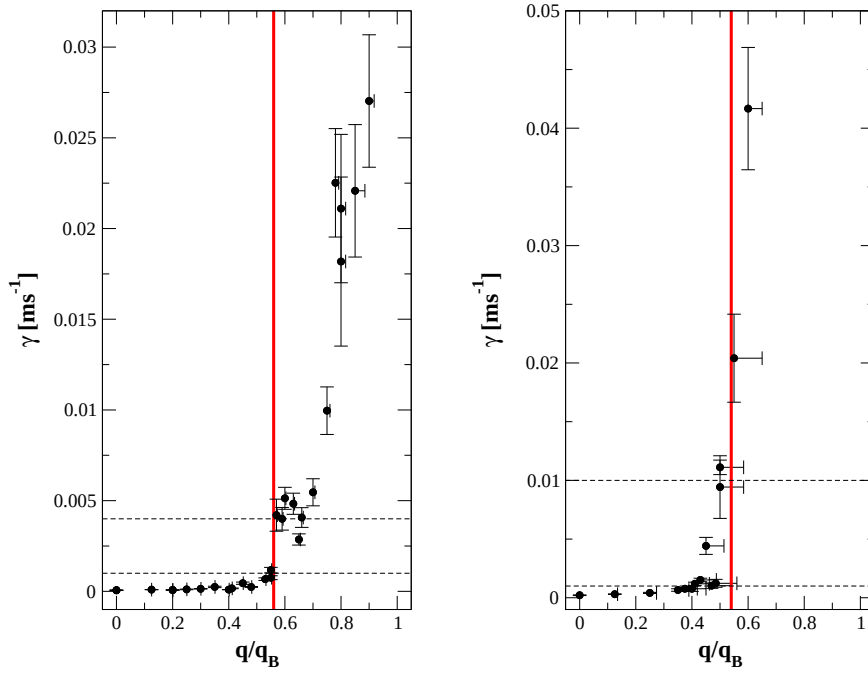


Fig. 4.12: Andamento del tasso di perdita di atomi dal condensato nella prima zona di Brillouin per $s = 0.2$ (*sinistra*) e $s = 1.15$ (*destra*). La riga verticale indica la soglia calcolata per l'instaurarsi dell'instabilità dinamica ($q = 0.56(1) q_B$ per $s = 0.2$ e $q = 0.54(1) q_B$ per $s = 1.15$). Le righe orizzontali in ciascuna figura evidenziano un aumento nel tasso di perdita rispettivamente di un fattore 4 per $s = 0.2$ e di un fattore 10 per $s = 1.15$ in corrispondenza dell'entrata nel regime di instabilità dinamica.

(0.52 ± 0.07) q_B), il tasso di perdita ha una marcata variazione aumentando di circa un ordine di grandezza, come evidenziato in figura 4.12. In tale figura la riga verticale corrisponde alla soglia sopra la quale la teoria predice l'esistenza di modi con $|\omega_i| \neq 0$ ed indica il primo punto di discontinuità nell'andamento di $|\omega_i|$ riportato nella seconda colonna di figura 4.11. Come si vede in questo caso l'accordo è quantitativo ad ulteriore conferma che il fenomeno osservato è proprio l'instabilità dinamica.

Inoltre, oltre questa soglia, nel profilo di densità del condensato compaiono strutture a frange. A titolo di esempio si riporta in figura 4.13 una sequenza di immagini raccolta per $s = 1.15$ in cui la presenza di queste frange è particolarmente

evidente. La presenza di questo tipo di strutture frangiate nella distribuzione di

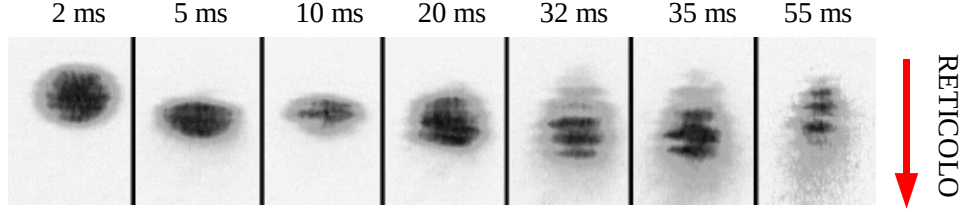


Fig. 4.13: Immagini in assorbimento del condensato di Bose-Einstein per diversi tempi di interazione con il reticolo avente $s = 1.15$ ed in moto con velocità $v = 0.55 v_B$. Si noti la presenza di strutture frangiate. Prima di acquisire le immagini il condensato viene lasciato evolvere per 50 ms nel solo potenziale magnetico.

densità rende meno affidabile il conteggio degli atomi ed è da mettere in connessione con disomogeneità nella fase della fusione d'onda che sono associate all'eccitazione dei modi dinamicamente instabili. Si può quindi ipotizzare che spegnendo il reticolo ottico, ovvero riportando il sistema in una zona di stabilità, l'ampiezza di queste eccitazioni debba ridursi progressivamente ed il sistema ritorni allo stato fondamentale.

Come si evince dalla figura 4.14 si è in effetti osservato che, lasciando il sistema evolvere all'interno della trappola magnetica dopo lo spegnimento del reticolo, le strutture frangiate scompaiono ed il condensato riacquista il profilo di densità regolare rendendo così nuovamente applicabile il fit ad una distribuzione di Thomas-Fermi. Si noti che questo processo avviene su tempi di alcune centinaia di millisecondi, molto maggiori di quelli caratteristici dell'insorgere dell'instabilità dinamica. Nei casi in cui queste strutture frangiate sono particolarmente pronunciate si è modificata la procedura sperimentale in modo da lasciare il condensato evolvere per un secondo nel solo potenziale magnetico. Questo ha consentito di estendere il più possibile l'analisi nelle regioni in cui l'instabilità è più forte, restando sostanzialmente limitati dal tempo necessario ad effettuare il caricamento adiabatico del condensato che, in queste regioni, diventa confrontabile con la vita media (cfr. §4.3.1).

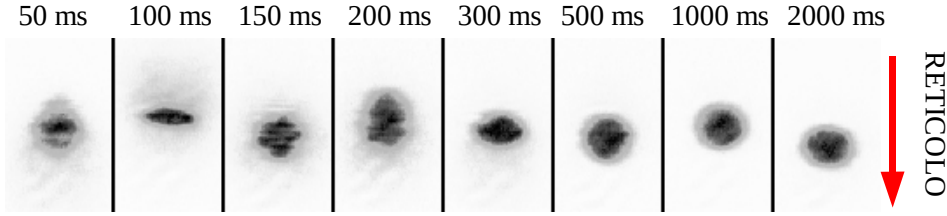


Fig. 4.14: Immagini in assorbimento che illustrano l'evoluzione del condensato nella trappola magnetica dopo un tempo di interazione con il reticolo di 3 ms. Il tempo indicato sopra ciascuna immagine si riferisce al tempo trascorso dal condensato nel solo potenziale magnetico. I parametri del reticolo sono $s = 1.15$ e $v = 1.3v_B$. Si noti la scomparsa delle frange per tempi sufficientemente lunghi.

4.3.3 L'effetto del potenziale armonico

Nelle analisi teoriche riportate nel paragrafo precedente, con cui si sono confrontati i risultati sperimentali, si prende in considerazione un condensato cilindrico, cioè si trascura il confinamento armonico nella direzione del reticolo. Come già accennato in precedenza, un confronto tra la soluzione numerica dell'equazione di Gross-Pitaevski tridimensionale ed i risultati ottenuti a partire dalla NPSE (cfr. §1.3) mostra che questi due approcci sono consistenti tra loro per quel che riguarda i parametri osservati negli esperimenti qui riportati [14]. Tuttavia, a causa della procedura di caricamento in singoli stati di Bloch, illustrata al paragrafo 2.4.2, il potenziale armonico introduce una dinamica nello spazio del quasi-impulso della quale si deve tener conto. La procedura di caricamento adiabatico infatti proietta onde piane in onde di Bloch; se si osserva l'andamento della velocità delle onde di Bloch data dalla (2.30) e riportata in figura 4.15, si nota che in prossimità del bordo banda questa velocità non coincide con quella di onda piana. Di conseguenza per questi valori di q il condensato si trova in moto nel sistema di riferimento della trappola magnetica. A causa di questo effetto il condensato si sposta dalla posizione di equilibrio e risente della forza di richiamo del confinamento magnetico. Il moto del centro di massa dovuto a questa forza può essere ricostruito in approssimazione semiclassica a partire dalle (2.32) che,

per la forza di richiamo armonica, nel sistema di riferimento del laboratorio, si scrivono:

$$\begin{cases} \dot{z} &= v_n(q) - v_{LAT} = v_n(q) - \hbar q_0/m \\ \hbar \dot{q} &= -m\omega_z^2 z \end{cases} \quad (4.8)$$

con condizioni iniziali $q(0) = q_0$ e $z(0) = 0$.

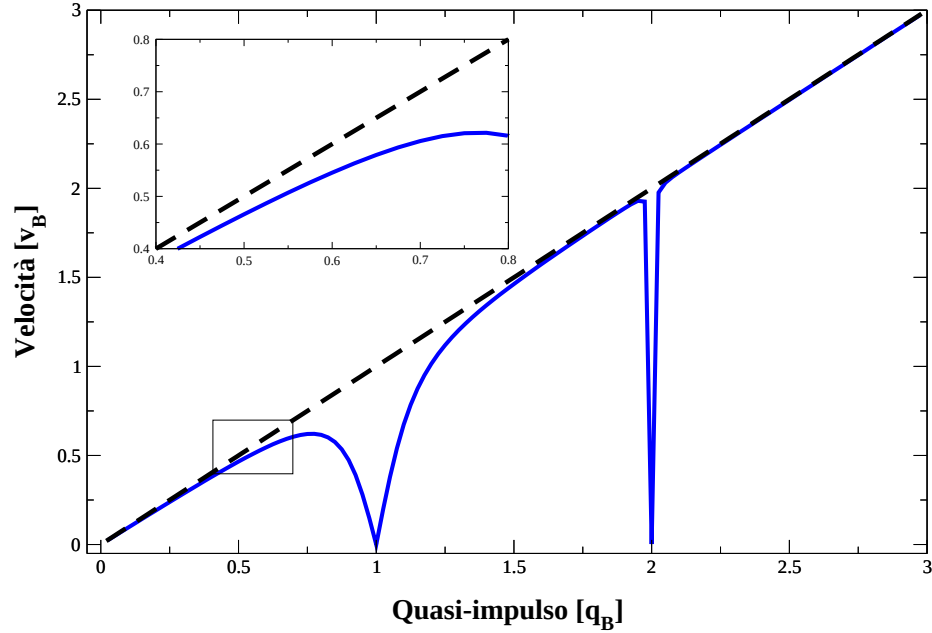


Fig. 4.15: Velocità delle onde di Bloch in funzione del quasi-impulso per un'altezza del reticolo pari a $s = 1.15$ nello schema di zona estesa; la riga nera tratteggiata indica la velocità di particella libera. La figura piccola riporta un ingrandimento della zona indicata dal rettangolo.

Risolvendo numericamente le (4.8) si osservano due tipi di soluzioni. Laddove è valida l'approssimazione quadratica della relazione di dispersione e si può quindi assumere $v_n(q) = (\hbar/m_{n,q_0})(q - q_0) + v_{n,q_0}$, il sistema (4.8) può anche essere risolto in modo analitico e conduce alla soluzione:

$$\begin{cases} z(t) &= -\sqrt{\frac{m^*}{m}} \frac{v_0}{\omega_z} \sin\left(\sqrt{\frac{m}{m^*}} \omega_z t\right) \\ q(t) &= q_0 + \frac{m^* v_0}{\hbar} \left(1 - \cos\left(\sqrt{\frac{m}{m^*}} \omega_z t\right)\right) \end{cases}$$

dove si è posto $v_0 = v_{n,q_0} - (\hbar/m) q_0$.

In questo regime il condensato compie oscillazioni sia nello spazio q , sia nello

spazio reale alla frequenza di trappola riscalata per mezzo della massa efficace. Mentre l'ampiezza delle oscillazioni nello spazio q può essere significativa al livello di qualche parte per cento, l'oscillazione nello spazio reale avviene con ampiezze inferiori al micron e non è quindi misurabile con il nostro apparato di rivelazione (cfr. §3.1.7).

Quando invece l'approssimazione quadratica della relazione di dispersione non è più valida, l'andamento non è più quello oscillatorio, ma si assiste alla comparsa di soluzioni in cui il centro di massa del condensato si allontana definitivamente dal valore iniziale, tanto nello spazio q , quanto nello spazio reale, come mostrato in figura 4.16.

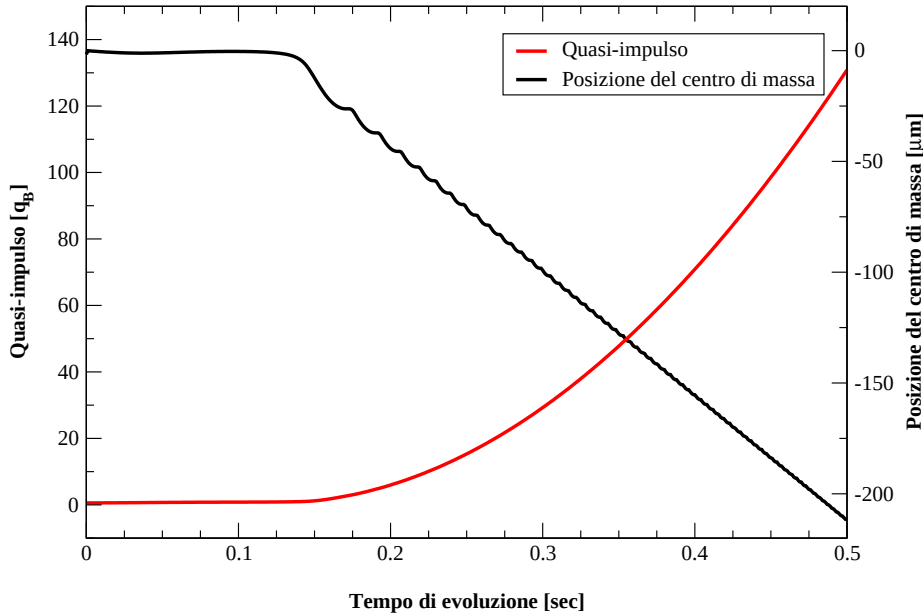


Fig. 4.16: Soluzione delle equazioni semiclassiche di moto (4.8) per $s = 1.15$, $q_0 = 0.6 q_B$: risulta evidente che il condensato non è più confinato ed il suo quasi-impulso cresce indefinitamente

Abbiamo tenuto conto di questo effetto introducendo un errore sistematico sul valore q_0 selezionato durante il caricamento adiabatico pari all'ampiezza delle oscillazioni nello spazio q . Le misure riportate si riferiscono solo al caso oscillatorio dato che l'altro comportamento si riferisce a zone prossime al bordo della

zona di Brillouin di difficile accesso dal punto di vista sperimentale a causa delle non-adiabaticità in fase di caricamento.

4.4 Il ruolo della frazione termica: instabilità energetica

Si è osservato che per tutti i valori di s la vita media diminuisce già per valori di q in cui il sistema è dinamicamente stabile. Di conseguenza esiste un meccanismo di perdita di atomi dal condensato non collegato all'instabilità dinamica. I risultati sperimentali mostrano che questo meccanismo, benché ineliminabile, è fortemente accentuato dalla presenza di una frazione termica, come evidenziato in figura 4.17. In figura sono riportate due sequenze di immagini in assorbimento per $\Delta t = 14$ s e diversi valori del quasi-impulso. Nella sequenza superiore l'evaporazione è arrestata ad un livello in cui è presente in trappola una piccola componente termica residua ($N_c/N_{tot} \sim 80\%$), nella sequenza inferiore viceversa, l'evaporazione si arresta in prossimità del fondo della trappola lasciando praticamente un condensato puro. Come si vede, la presenza di una componente termica anche piccola riduce drasticamente la vita media del condensato non appena la velocità del reticolo è non nulla.

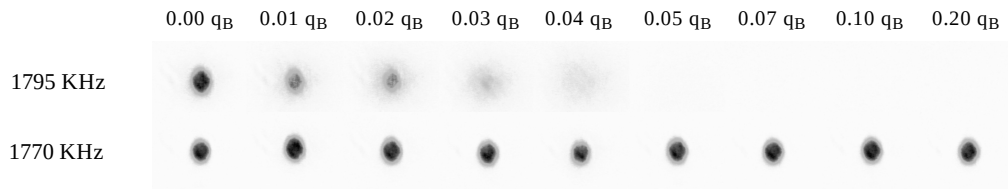


Fig. 4.17: Immagini in assorbimento del condensato raccolte dopo un tempo $\Delta t = 14$ sec di interazione con un reticolo ottico avente $s=0.2$ per diversi valori del quasi-impulso segnati in alto nella figura. In tutti i casi è stato applicato uno scudo a radiofrequenza al valore indicato a sinistra. Pertanto nell'immagine superiore la temperatura è fissata ad un valore più alto.

Un comportamento analogo è stato riscontrato studiando, a tempo fissato, l'an-

damento del numero di atomi in funzione della radiofrequenza applicata. Come si evince dalla figura 4.18, il comportamento del sistema è qualitativamente diverso se il reticolo è o meno in movimento. Infatti, mentre nel caso di reticolo fermo il numero di atomi condensati non varia significativamente aumentando il valore finale della radiofrequenza, nel caso di reticolo in moto si osserva una drastica diminuzione del numero di atomi quando la radiofrequenza applicata fissa la “temperatura” del sistema ad un valore di poco inferiore a T_c e quindi è presente una frazione termica iniziale non trascurabile. Proprio la dipendenza di questo meccanismo dalla presenza di una componente termica fa ipotizzare che esso sia dovuto all’insorgere di instabilità energetica (cfr. §2.5.1), anche se la mancanza di un andamento a soglia della vita media rispetto a q sembrerebbe in prima approssimazione escludere questa interpretazione.

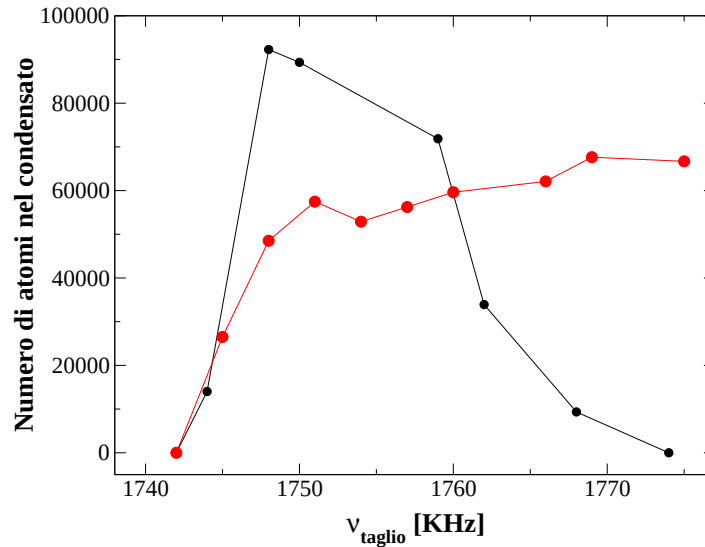


Fig. 4.18: Andamento del numero di atomi nel condensato in funzione del valore dello scudo a radiofrequenza (cfr. §3.1.6) dopo un’interazione di 6 sec con un reticolo ottico avente $s = 0.2$ e velocità rispettivamente $v = 0$ (rosso) e $v = 0.4 v_B$ (nero). Il valore della radiofrequenza non deve essere confrontato con quello di figura 4.17.

In realtà la non omogeneità del sistema potrebbe far passare con continuità dal regime stabile a quello energeticamente instabile. Esaminando la (2.48), infatti,

si nota che la soglia di instabilità energetica dipende dalla velocità del suono. Questa, come si evince dalla (2.49), dipende dalla radice della densità e di conseguenza per un sistema omogeneo (qual è il condensato cilindrico considerato al paragrafo 2.5.3) è costante in ogni punto del condensato. Nel nostro caso tuttavia la presenza del confinamento armonico in direzione assiale rende il profilo di densità non costante lungo questa direzione. Di conseguenza anche la velocità del suono diminuisce muovendosi dal centro della trappola verso le zone periferiche. Supponendo di poter fare un'approssimazione di densità locale, mediando su una lunghezza caratteristica l tale che $\lambda/2 \ll l \ll a_{hoz}$, si ha che la condizione di stabilità in regime idrodinamico (cfr. §2.5.3 ed in particolare la (2.48)) viene a dipendere dalla posizione del condensato:

$$q^2 < \left(\frac{m v_s(\mathbf{r})}{\hbar} \right)^2 = C n(\mathbf{r})$$

dove v_s indica la velocità del suono e C una costante non dipendente dalla posizione e dal quasi-impulso. Si noti che la (2.48) è ricavata nell'approssimazione $v \propto q$ che è ampiamente verificata per i valori di s e q considerati nel seguito.

Di conseguenza, per ogni fissato valore di q , la frazione di atomi stabile è data dalla frazione di volume in cui la densità è maggiore del valore critico q^2/C [12]:

$$f_{q_0}(q) = \frac{\int_{\mathcal{V}_{q^2/C}} n(r_\perp, z) d\mathbf{r}}{\int_{\mathcal{V}_0} n(r_\perp, z) d\mathbf{r}} = \frac{5}{2} \left(1 - \frac{q^2}{q_0^2} \right)^{3/2} - \frac{3}{2} \left(1 - \frac{q^2}{q_0^2} \right)^{5/2} \quad (4.9)$$

dove $n(\mathbf{r})$ è data dalla (1.17), $\mathcal{V}_x$ indica il volume individuato da $n(\mathbf{r}) \geq x$ e q_0 il valore critico per la stabilità energetica di un condensato omogeneo avente densità picco n_0 .

È lecito dunque aspettarsi che, non appena il condensato si trova in moto rispetto al reticolo, nelle regioni energeticamente instabili, si possano creare delle eccitazioni che danno luogo ad una riduzione del numero di atomi. Tali perdite sono tanto maggiori quanto maggiore è la frazione instabile. Tuttavia, raggiunto il valore critico q_0 , il condensato è interamente energeticamente instabile e di conseguenza il numero di atomi non cambia al variare del quasi-impulso⁶. Se

⁶Resta ovviamente la dipendenza dovuta all'instaurarsi dell'instabilità dinamica.

tale processo di perdita avviene su una scala di tempo molto più rapida rispetto a quella degli altri meccanismi di perdita ci si può attendere che il numero di atomi presenti nel condensato segua un andamento dato da:

$$N(q, t) = (N_0 - b(t)) f_{q_0}(q) + b(t) \quad (4.10)$$

dove, per le considerazioni fatte in precedenza, il parametro b ha un andamento di tipo esponenziale

$$b(t) = b_0 e^{-t/\tau_b} \quad (4.11)$$

e il valore critico q_0 è indipendente dal tempo.

Allo scopo di verificare questa interpretazione sono state effettuate tre serie di misure riportando il numero di atomi nel condensato per diversi tempi e diversi valori del quasi-impulso tutti compresi nella regione di *stabilità* dinamica. I risultati ottenuti sono riportati in figura 4.19, dove le linee continue sono il fit dei dati sperimentali con la funzione (4.10) con parametri liberi N_0 , b e q_0 . Come si vede la (4.10) riproduce bene l'andamento dei dati riportati e, coerentemente con quanto espresso sopra, i valori di q_0 ottenuti dal fit sono in accordo tra loro, come evidenziato nell'inserito di figura 4.19. In figura è anche riportato il valore di soglia di q per cui la teoria predice che un condensato omogeneo, con densità pari al valore n_0 misurato, divenga energeticamente instabile. Come si vede, nonostante le due quantità non siano in accordo, la loro discrepanza non è significativa. In ogni caso il dato sperimentale sovrastima quello teorico. Questo accade perché la stima del parametro q_0 è particolarmente sensibile sia all'andamento dei punti sperimentali intorno a questo valore, sia al numero di atomi residuo a $q > q_0$. Ambedue questi aspetti dipendono fortemente dalla frazione condensata presente inizialmente e, dal punto di vista sperimentale, questo parametro è molto difficile da controllare. Inoltre, a causa dell'instaurarsi dell'instabilità dinamica, non è possibile misurare con precisione il comportamento del sistema nella regione per $q/q_B \simeq 0.5$.

A prescindere da queste considerazioni, visto che queste misure si riferiscono ad

un sistema dinamicamente stabile, costituiscono un'analisi dell'effetto dell'instabilità energetica. In particolare la costante di tempo τ_b risulta di circa 400 ms (corrispondente a $\gamma_b \simeq 2.5 \text{ sec}^{-1}$). Da un lato questo valore non può essere confrontato con i valori presentati in figura 4.11 perché queste misure sono ottenute a partire da un condensato non puro, ma allo stesso tempo costituisce una misura della scala di tempo a cui si manifestano gli effetti dell'instabilità energetica.

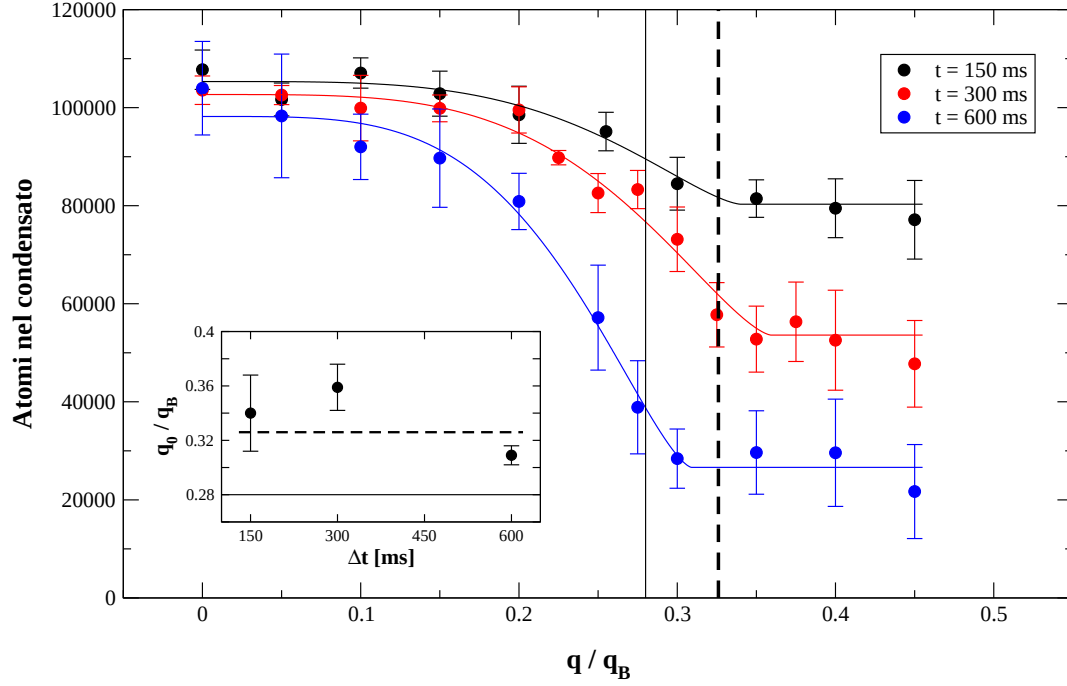


Fig. 4.19: Andamento del numero di atomi presenti nel condensato in funzione del quasi-impulso per un campione con una frazione condensata del 65% e per diversi valori del tempo trascorso in un reticolo con $s = 0.2$. Nel riquadro è riportato in funzione del tempo il valore di q_0 (cfr. testo) ottenuto dal fit alla funzione (4.10). La linea tratteggiata è la media pesata dei risultati ottenuti ($q_0 = (0.32 \pm 0.01)q_B$); la linea continua è invece la soglia prevista dalla teoria per l'instaurarsi dell'instabilità energetica ($q_0 = 0.28(1)q_B$). Ambedue le linee sono riportate in verticale nel grafico grande.

Conclusioni

In questo lavoro si è dato conto dell'osservazione, separazione e caratterizzazione sperimentale dei diversi regimi di instabilità di un condensato di Bose-Einstein in un reticolo ottico unidimensionale.

Questo è stato possibile effettuando per la prima volta un'analisi risolta in tempo della perdita di atomi dal condensato per diversi valori dell'altezza del potenziale periodico e per diverse bande di Bloch. In particolare, come ci si aspettava dalla trattazione teorica, è emerso che l'effetto sul condensato dell'instabilità energetica dipende dalla presenza di meccanismi dissipativi, quali quelli dovuti all'interazione del condensato con una nube di atomi a temperatura di poco maggiore di quella critica, mentre l'instabilità dinamica prescinde dall'esistenza di questa componente termica. Inoltre, grazie all'approccio sperimentale adottato, è stato possibile distinguere i due regimi di instabilità anche sulla base delle relative scale temporali.

Il risultato più significativo è l'evidenza sperimentale della dipendenza dei tempi caratteristici della dinamica del condensato dal quasi-impulso. In generale, la vita media del condensato diminuisce drasticamente per valori di quasi-impulso prossimi al bordo-zona e in corrispondenza di questi valori si è osservata la presenza di frange nel profilo di densità che però scompaiono una volta rimosso il reticolo. Queste strutture sono da mettersi in connessione con la creazione di domini di fase nel condensato. Abbiamo inoltre osservato che, per valori alti del quasi-impulso, il sistema diviene di fatto metastabile, nel senso che la presenza del reticolo cessa di essere il meccanismo di perdita dominante. Abbiamo spiega-

to questo comportamento con il fatto che, per le altezze del potenziale periodico da noi esaminate, già nelle prime bande eccitate, lo spettro di Bloch coincide con quello di particella libera e quindi l'effetto del reticolo ottico è apprezzabile solo in corrispondenza del bordo-zona. Queste osservazioni sperimentali sono risultate in accordo con le previsioni teoriche per il regime di instabilità dinamica. Specificamente, si è ottenuto un perfetto accordo per quel che riguarda la soglia di attivazione dell'instabilità dinamica, mentre, per quel che riguarda il comportamento oltre questa soglia, l'accordo tra il tasso di perdita del condensato e il tasso di crescita del modo più instabile è solo qualitativo.

Per quello che riguarda l'instabilità energetica, si è osservato che per essa non esiste un andamento a soglia, ma si assiste ad una riduzione del numero di atomi non appena si mette in moto il reticolo. I risultati ottenuti sono compatibili con l'osservazione che, per un condensato non omogeneo, la soglia di instabilità non è univoca, ma il condensato diviene localmente instabile dando luogo ad una progressiva riduzione del numero di atomi. Si è inoltre osservato che la scala di tempo su cui avvengono i fenomeni dissipativi connessi all'instabilità energetica dipende fortemente dalla frazione condensata e che in generale è più lenta di quella associata all'instabilità dinamica.

L'osservazione del fenomeno dell'instabilità dinamica ha molteplici analogie in diversi campi della fisica in cui siano presenti dinamiche non-lineari e ripropone il condensato di Bose-Einstein come un sistema controllato dove indagare questioni fondamentali di meccanica quantistica. D'altro canto questo tipo di osservazioni risolte in tempo costituiscono un utile punto di riferimento per tutte le applicazioni di questo tipo di sistemi. Nonostante queste considerazioni, questo lavoro non esaurisce la ricchezza del problema. Se infatti si sono date spiegazioni qualitative alle strutture frangiformi osservate nel profilo di intensità nel regime dinamicamente instabile, un'analisi approfondita potrebbe gettare ulteriore luce su quali siano i modi che contribuiscono all'instabilità dinamica ed i meccanismi che intervengono a limitare il tasso di perdita osservato rispetto alla previsione

teorica. Restano inoltre da indagare i meccanismi di rilassamento che riportano il sistema nella sua configurazione di equilibrio dopo lo spegnimento del reticolo. Un ulteriore approfondimento è poi particolarmente necessario per quel che riguarda l'instabilità energetica: la teoria infatti predice che in questo regime il sistema abbassi la propria energia dando luogo ad eccitazioni. Anche in questo caso uno studio sistematico di queste eccitazioni potrebbe fare chiarezza sull'importante aspetto delle interazioni tra il condensato e la nube termica con particolare riferimento alla fisica collisionale che determina il trasferimento di energia tra le due fasi.

Bibliografia

- [1] P.L. Gould *et al.*, *Diffraction of atoms by light: the near-resonant Kapitza-Dirac effect*, Physical Review Letters **56** p.827 (1986)
- [2] P.J. Martin *et al.*, *Bragg scattering of atoms from a standing light wave*, Physical Review Letters **60** p.515 (1988)
- [3] M. Ben Dahan *et al.*, *Bloch oscillation of atoms in an optical potential*, Physical Review Letters **76** p.4508 (1996)
- [4] M. Kozuma *et al.*, *Coherent splitting of Bose-Einstein condensed atoms with optically induced Bragg diffraction*, Physical Review Letters **82** p.871 (1999)
- [5] J. Hecker Denschlag *et al.*, *A Bose-Einstein condensate in an optical lattice*, Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics **35** p.3095 (2002)
- [6] O. Morsch *et al.*, *Bloch oscillations and mean-field effects of Bose-Einstein condensates in 1D optical lattices*, Physical Review Letters **87** 140402 (2001)
- [7] B.P. Anderson e M.A. Kasevich, *Macroscopic quantum interference from atomic tunnel arrays*, Science **282** p.1686 (1998)
- [8] F.S. Cataliotti *et al.*, *Josephson junction arrays with Bose-Einstein condensates*, Science **293** p.843 (2001)

- [9] M. Greiner *et al.*, *Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms*, Nature **415** p. 39 (2002)
- [10] G. Brennen *et al.*, *Quantum logic gates in optical lattices*, Physical Review Letters **82** p. 1060 (1999)
G. Brennen *et al.*, *Quantum logic for trapped atoms via molecular hyperfine interactions*, Physical Review A **65** 022313 (2002)
- [11] F.S. Cataliotti *et al.*, *Superfluid current disruption in a chain of weakly coupled Bose-Einstein condensates*, New journal of physics **5** p. 71 (2003)
- [12] S. Burger *et al.*, *Superfluid and dissipative dynamics of a Bose-Einstein condensate in a periodic optical potential*, Physical Review Letters **86** p.4447 (2001)
- [13] C. Fort *et al.*, *Collective excitations of a trapped Bose-Einstein condensate in the presence of a 1D optical lattice*, Physical Review Letters **90** 140405 (2003)
- [14] M. Modugno, comunicazione personale, febbraio 2004
- [15] A. Leggett, *Bose-Einstein condensation in the alkali gases*, Review of Modern Physics **73** p.307 (2001)
- [16] O. Penrose e L. Onsager, *Bose-Einstein condensation in superfluid helium*, Physical Review **104** p.576 (1956)
- [17] S. Dalfovo *et al.*, *Bose-Einstein condensation in trapped gases*, Review of Modern Physics **71** p.463 (1999)
- [18] J. Weiner *et al.*, *Experiments and theory in cold and ultracold collisions*, Review of Modern Physics **71** p.1 (1999)
- [19] E. Fermi, *Sul moto dei neutroni nelle sostanze idrogenate*, La ricerca scientifica (II serie) **2** p.13 (1936), citato in modo errato in

- N.P. Proukakis, *Generalized mean fields for trapped atomic Bose-Einstein condensates*, Journal of Researches of NIST **101** p. 457 (1996)
- [20] E.P. Gross, *Structure of a quantized vortex in boson systems*, Nuovo Cimento (X serie) **20** p.454 (1961)
L.P. Pitaevskii, *Vortex lines in an imperfect Bose gas*, Soviet physics journal of experimental and theoretical physics **13** p.451 (1961)
citati in [15, 17].
- [21] J.L. Roberts *et al.*, *Controlled collapse of a Bose-Einstein condensate*, Physical Review Letters **86** p.4211 (2001)
- [22] F. Zambelli *et al.*, *Dynamic structure factor and momentum distribution of a trapped Bose gas*, Physical Review A **61** 063608 (2000)
- [23] F. Nesi, *Studio della transizione dinamica superfluido-isolante in un condensato di Bose-Einstein in presenza di un reticolo ottico*, Tesi di Laurea in Fisica, Firenze a.a. 2002/2003
F. Nesi e M. Modugno, *Loss and revival of phase coherence in a Bose-Einstein condensate moving through an optical lattice*, Journal of Physics B **37** p. S101 (2004)
- [24] L. Salasnich, *Pulsed quantum tunneling with matter waves*, Laser Physics **12** p. 198 (2002)
L. Salasnich *et al.*, *Effective wave equations for the dynamics of a cigar-shaped and disk-shaped Bose condensates*, Physical Review A **65** 043614 (2002)
- [25] D.A. Steck, *Rubidium 87 D Line Data*, <http://steck.us/alkalidata>, Los Alamos National Laboratories

- [26] H.M.J.M. Boesten *et al.*, *Observation of a shape resonance in the collision of two cold ^{87}Rb atoms*, Physical Review A **55** 636 (1997)
- [27] C. Cohen-Tannoudji, *Manipulating atoms with photons*, Review of modern physics **70** p.703 (1998)
W.D. Phillips, *Laser cooling and trapping of neutral atoms*, ibidem p.721
S.Chu, *The manipulation of neutral particles*, ibidem p.685
- [28] C. Cohen-Tannoudji *et al.*, *Atom-photon interactions, basic processes and applications*, I ed., Wiley, New York (1992), II ed. (1998)
- [29] J. Dalibard e C. Cohen-Tannoudji, *Dressed-atom approach to atomic motion in laser light: the dipole force revisited*, Journal of the Optical Society of America B **2** p.1707 (1985)
- [30] J.P. Gordon e A. Ashkin, *Motion of atoms in a radiation trap*, Physical Review A **25** p.1606 (1980)
- [31] L. Allen e J.H. Eberly, *Optical resonance and two-level atoms*, Wiley, New York (1975)
- [32] R. Grimm *et al.*, *Optical dipole traps for neutral atoms*, condmat/9902072 (1999)
- [33] P.L. Gould *et al.*, *Momentum transfer to atoms by a standing light wave: transition from diffraction to diffusion*, Physical Review A **43** p.585 (1991)
- [34] N.W. Ashcroft e N.D. Mermin, *Solid state physics*, Saunders, Philadelphia (1976)
- [35] L. Fallani *et al.*, *Optically induced lensing effect on a Bose-Einstein condensate expanding in a moving lattice*, Physical Review Letters **91** 240405 (2003)

-
- [36] A. Messiah, *Quantum Mechanics vol. II*, VI ed., North Holland, Amsterdam (1970)
- [37] A. Trombettoni e A. Smerzi, *Discrete solitons and breathers with dilute Bose-Einstein condensate*, Physical Review Letters **86** p.2353 (2001)
- [38] A. Smerzi *et al.*, *Dynamical superfluid-insulator transition in a chain of weakly coupled Bose-Einstein condensates*, Physical Review Letters **89** 170402 (2002)
- [39] M. Machholm *et al.*, *Band structure, elementary excitations, and stability of a Bose-Einstein condensate in a periodic potential*, Physical Review A **67** 053613 (2003)
- [40] B. Wu e Q. Niu, *Superfluidity of Bose-Einstein condensate in an optical lattice: Landau-Zener tunneling and dynamical instability*, New Journal of Physics **5** p.104 (2003)
- [41] B. Wu e Q. Niu, *Landau and dynamical instabilities of the superflow of Bose-Einstein condensates in optical lattices*, Physical Review A **64**, 061603(R) (2001) e
Bloch waves and Bloch bands of Bose-Einstein condensates in optical lattices, ibidem **65**, 025601 (2002)
- [42] K.W. Mahmud *et al.*, *Bose-Einstein condensates in a one-dimensional double square well: analytical solutions of the nonlinear Schrödinger equation*, Physical Review A **66** 063607 (2002)
- [43] C. Menotti *et al.*, *Superfluid dynamics of a Bose-Einstein condensate in a periodic potential*, New Journal of Physics **5** 112.1 (2003)
- [44] C. Fort *et al.*, *Collective excitations of a ^{87}Rb Bose-Einstein condensate in a Thomas-Fermi regime*, Europhysics Letters **49** p.8 (2000)

- M. Fattori, *Esperimenti di interferometria spaziale e temporale con condensati atomici di Bose-Einstein*, Tesi di Laurea in Fisica, Firenze a.a. 2000-2001
- P. Maddaloni, *Experiments on macroscopic quantum coherence in Bose-Einstein condensates*, Tesi di Dottorato in Fisica, Padova (2003)
- [45] J. Catani, *Interazioni tra un'onda di materia coerente e un reticolo ottico*, Tesi di Laurea in Fisica, Firenze a.a. 2001/2002
- [46] E.L. Raab *et al.*, *Trapping of neutral sodium atoms with radiation pressure*, Physical Review Letters **59** p.2631 (1987)
- [47] C. Monroe *et al.*, *Very cold trapped atoms in a vapor cell*, Physical Review Letters **65** p.1571 (1990)
- [48] W. H. Wing, *On neutral particle trapping in a quasistatic electromagnetic fields*, Progress in Quantum Electronics **8** p. 181 (1984)
- [49] T. Esslinger *et al.*, *Bose-Einstein condensation in a quadrupole-Ioffe-configuration trap*, Physical Review A **58** p.2664(R) (1998)
- [50] E. Majorana, *Atomi orientati in campo magnetico variabile*, Nuovo Cimento **9** p.43 (1932)
- [51] M.-O. Mewes *et al.*, *Bose-Einstein condensation in a tightly confining DC magnetic trap*, Physical Review Letters **77** p.416 (1996)
- [52] W. Ketterle *et al.*, *Making, probing and understanding Bose-Einstein condensates* in *Bose-Einstein condensation in atomic gases*. Atti della scuola internazionale di fisica "Enrico Fermi", corso CXL, a cura di M. Inguscio, S. Stringari e C.E. Wieman, IOS Press, Amsterdam (1999)
- [53] Arron Campi (Crystal Technology), comunicazione personale, dicembre 2003

- [54] E.A. Cornell *et al.*, *Experiments in dilute atomic Bose-Einstein condensation* in *Bose-Einstein condensation in atomic gases*. Atti della scuola internazionale di fisica “Enrico Fermi”, corso CXL, a cura di M. Inguscio, S. Stringari e C.E. Wieman, IOS Press, Amsterdam (1999)
- [55] E. Peik *et al.*, *Bloch oscillation of atoms, adiabatic rapid passage, and monokinetic atomic beams*, *Physical Review A* **55** p. 2989
- [56] E.A. Burt *et al.*, *Coherence, correlations and collisions: what one learns about Bose-Einstein condensates from their decay*, *Physical Review Letters* **79** p. 337 (1997)

Ringraziamenti

Questi risultati sono il frutto del lavoro di una *équipe* sperimentale eccezionale della quale sono onorato di far parte. A queste persone straordinarie quindi va il mio commosso e sincero ringraziamento: al professor Inguscio, che ha scommesso su di me offrendomi la possibilità di entrare a far parte del gruppo e mi è sempre stato vicino mantenendo vivo l'impegno e l'interesse anche nei momenti in cui i risultati sembravano non voler arrivare; alla dottoressa Chiara Fort, che con pazienza e umiltà ha saputo insegnarmi tanto quanto non pensavo sarei riuscito ad imparare. Grazie ai due colleghi che dall'estero sono venuti a lavorare presso il LENS dando un contributo fondamentale a questo lavoro: il dottor Robert Saers e la dottoressa Jessica E. Lye. Grazie al dottor Jacopo Catani, che mi ha introdotto a molti dettagli dell'apparato sperimentale ed il cui lavoro di tesi è la premessa di questo e grazie al dott. Michele Modugno, cui si devono i risultati teorici qui presentati e che ha sempre risposto con sollecitudine a tutti i miei quesiti, anche i più strampalati. Non me ne vorranno gli altri se per ultimo faccio un ringraziamento particolare al dottor Leonardo Fallani: sapere sempre qual è la cosa giusta da fare è un dono grande e prezioso, non solo nel lavoro di laboratorio, ma saper anche spiegare il perché con parole semplici è qualcosa che, per un ragazzo alle prime armi e con molte (troppe) idee confuse, è davvero inestimabile. Un grazie sentito infine a tutti i membri dello staff del LENS dai quali ho ricevuto tanti preziosi consigli: tra tutti il prof. Cataliotti, i dott. Nicola Poli e Saverio Bartalini, Mauro Giuntini e Marco De Pas.

Questo conclude i ringraziamenti per così dire istituzionali. Non posso però dimenticare tutte le persone che con il loro affetto, la loro simpatia e la loro pazienza hanno contribuito in maniera determinante a fare del periodo trascorso in laboratorio un periodo di grande crescita, umana e professionale. Di nuovo non posso non ricordare Chiara, Jacopo, Robert e Leonardo che hanno seppellito con tante risate i momenti di insuccesso e di difficoltà. Un grazie sentito ai miei

genitori che in modo diverso, ma meravigliosamente complementare mi hanno sostenuto ed indirizzato lungo tutto il corso di laurea e hanno saputo sopportare le assenze, i silenzi e le tristezze senza mai imporsi o lamentarsi. Un grazie a Giulia, Antonio e Katja che mi hanno sostenuto con il loro affetto e a Valentina che non si è mai tirata indietro e mi è stata vicino, sempre. Un grazie infine agli amici che non hanno dimenticato: Rodolfo, Ludovico, Barbara, Umberto, Antonio, Lorenzo e tutti gli altri. Non c'è niente di più bello che guardarsi indietro e accorgersi di aver tante tante persone da ringraziare: che Dio vi benedica tutti quanti!

Luigi