

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FIRENZE  
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali



**Tesi di Laurea in Fisica**

# **Interazione tra un'onda di materia coerente e un reticolo ottico**

*Candidato:*

**Jacopo Catani**

*Relatore:*

**Prof. Massimo Inguscio**

Anno Accademico 2001-2002



# Ringraziamenti

Il primo grazie va al prof. Massimo Inguscio, per avermi proposto questa tesi di fisica atomica e per l'entusiasmo con cui mi ha stimolato durante il suo svolgimento. Alla mia famiglia sono grato per il costante interesse dimostrato nei riguardi del lungo lavoro che mi ha accompagnato nell'ultimo anno: grazie Ma, grazie Pa, grazie Biba, grazie Alfre. Un grazie anche ai miei amici: anche se negli ultimi tempi non mi si è visto spesso, preso com'ero dalla parte finale della tesi, vi ho sempre avuti in mente. A Giacomo un grazie sincero: esserci sempre è difficile, ma c'è chi ci riesce...

A te, Laura, per come hai saputo starmi accanto nei momenti duri e in quelli belli, un bacio.

Un grazie, poi, a Pasquale, Francesca, Ivan, Saverio, Luigi, Robert e Michal; grazie anche a Michele per il supporto teorico fornito durante l'esperimento. Poiché infine la componente umana è capace di rendere bellissimo anche il lavoro più duro, un ringraziamento particolare va a coloro che mi hanno insegnato a vivere in un laboratorio, e cioè a Chiara, Leo e Francesco. Il vostro modo di lavorare, giusto equilibrio di serietà, costanza, ma anche di genuina voglia di ridere (anche quando tutto va storto!) è stato per me di fondamentale importanza. Non posso scordare le mille risposte alle mille domande con cui vi ho assillato, che mi hanno permesso di imparare in un anno di tesi molto più di quanto credevo fosse possibile. Grazie!



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>1 Condensazione di Bose-Einstein</b>	<b>5</b>
1.1 Gas ideale di Bose in un potenziale armonico a $T=0$	5
1.2 Gas ideale di bosoni a $T>0$	8
1.3 Gas di bosoni interagenti a $T=0$	11
1.3.1 L'equazione di Gross-Pitaevskii	11
1.3.2 Lo stato fondamentale	13
1.3.3 L'approssimazione di Thomas-Fermi	15
1.4 Dinamica di un condensato di Bose-Einstein	17
1.4.1 Espansione libera da un potenziale armonico	17
<b>2 I reticoli ottici</b>	<b>23</b>
2.1 Il potenziale ottico ed il suo effetto sugli atomi	23
2.2 Meccanismi di riscaldamento	27
2.3 Potenziali periodici	28
2.4 La struttura a bande	31
2.5 Effetti di adiabaticità dell'accensione del reticolo	32
2.5.1 Accensione adiabatica	34
2.5.2 Spegnimento	35
2.5.3 Accensione istantanea	35
2.6 Scattering Bragg di un condensato	36

2.6.1	Scattering Bragg come metodo di taratura del reticolo	38
2.6.2	Larghezza della risonanza Bragg . . . . .	40
2.7	Modello 1D per l'espansione di un condensato di Bose-Einstein	42
<b>3</b>	<b>L'apparato sperimentale</b>	<b>47</b>
3.1	Realizzazione di un condensato di Bose-Einstein con atomi di $^{87}\text{Rb}$ . . . . .	47
3.1.1	Intrappolamento magneto-ottico (MOT) . . . . .	48
3.1.2	La prima MOT . . . . .	50
3.1.3	La seconda MOT . . . . .	52
3.1.4	Il sistema di vuoto differenziale . . . . .	54
3.1.5	Il trasferimento degli atomi dalla MOT1 alla MOT2 . .	54
3.1.6	Le sorgenti laser . . . . .	55
3.1.7	La fase di MOT compressa e melassa ottica . . . . .	57
3.1.8	La trappola magnetica . . . . .	58
3.1.9	Pompaggio ottico e raffreddamento evaporativo . . . .	61
3.1.10	Il sistema di rivelazione . . . . .	64
3.2	Il reticolo ottico mobile . . . . .	67
3.2.1	Il principio di funzionamento . . . . .	67
3.2.2	Le sorgenti laser . . . . .	68
3.2.3	Suddivisione dei fasci e loro modulazione . . . . .	72
3.2.4	Accoppiamento in fibra dei fasci . . . . .	78
3.2.5	Taratura della risposta degli AOM . . . . .	80
3.2.6	Taratura dell'altezza del reticolo mediante lo scattering Bragg . . . . .	83
3.2.7	Posizione e sezione dei fasci . . . . .	86
<b>4</b>	<b>Le misure</b>	<b>91</b>
4.1	Effetti di massa efficace sull'espansione del condensato . . . .	92

4.1.1	La procedura sperimentale . . . . .	93
4.2	Spettroscopia di bande di un condensato di Bose-Einstein . .	95
4.2.1	Misura indiretta della massa efficace $m^*$ del condensato	100
4.3	Focalizzazione di un'onda di materia coerente . . . . .	102
	<b>Conclusioni</b>	<b>113</b>



# Introduzione

La realizzazione e lo studio di campioni atomici freddi hanno portato al recente sviluppo della cosiddetta *ottica atomica*, disciplina che studia gli effetti legati alla natura ondulatoria degli atomi. Il raggiungimento sperimentale della condensazione di Bose-Einstein (BEC) ha poi aperto nuovi scenari, dei quali uno tra i più affascinanti è sicuramente lo studio dell'interazione di *onde di materia coerente* con luce coerente. In questi regimi, infatti, il comportamento ondulatorio della materia diviene evidente a livello *macroscopico*, ed il ruolo di luce ed atomi è sostanzialmente invertito rispetto agli esperimenti in cui i fasci luminosi vengono manipolati tramite gli ordinari dispositivi materiali. Nel presente lavoro è descritto un esperimento mirato all'indagine di questo tipo di interazione: un'onda stazionaria generata dall'interferenza di due fasci laser *reticolo ottico*, che per gli atomi costituisce un potenziale periodico, è utilizzata per indurre una struttura a bande nell'energia del condensato, analoga a quella con cui la fisica dello stato solido descrive il moto di un elettrone all'interno di un cristallo. L'onda di materia coerente viene utilizzata come sonda a velocità variabile per il potenziale periodico, e la diffrazione di onde di materia da parte del reticolo ottico viene sfruttata per caratterizzare il regime sperimentale scelto.

La condensazione di Bose-Einstein è una transizione di fase in un gas di bosoni, che in virtù della loro proprietà di simmetria per scambio di particelle, riescono ad occupare in particolari condizioni di densità e temperatura

lo stesso stato fondamentale. A rigore, la previsione teorica svolta nel 1925 da Einstein a partire da un lavoro di Bose sulla radiazione di corpo nero, rimane valida esclusivamente se le particelle che costituiscono il gas sono completamente non interagenti. Numerosi lavori teorici risalenti agli anni '60 hanno però evidenziato la possibilità di raggiungere un regime di degenerazione quantistica anche in sistemi interagenti; di qui l'idea di utilizzare campioni di elementi alcalini il cui comportamento in condizioni di forte diluizione, in virtù della debolezza delle interazioni tra questo tipo di atomi, si avvicina molto a quello previsto da Einstein, per quella che resta l'unica transizione di fase che non richiede l'interazione tra le particelle. Inoltre, data la semplicità della loro struttura elettronica, gli atomi alcalini sono relativamente facili da descrivere e manipolare, specialmente tramite l'applicazione di campi elettromagnetici sia statici che dinamici. Nel 2001 ad E. Cornell, C. Wieman e W. Ketterle viene consegnato il premio Nobel per la Fisica *per il raggiungimento della condensazione di Bose-Einstein nei gas diluiti (1995) e per i primi, fondamentali studi sulle proprietà dei condensati* [1, 2].

I reticoli ottici venivano utilizzati con diverse funzioni su atomi freddi già prima del raggiungimento sperimentale della BEC: era già nota la possibilità di impiegarli come divisori di fasci atomici [3, 4] o come acceleratori [5, 6]. La possibilità di impiegare un campione atomico *coerente* ha accresciuto l'interesse verso questo tipo di sistemi come utili strumenti di osservazione di fenomeni puramente quantistici quali: effetti di fase su scala macroscopica [7], diffrazione di Bragg del pacchetto d'onda atomico [8], *number squeezing* [9], correnti Josephson in catene lineari di giunzioni [10], transizione di fase quantistica dal regime superfluido a quello di isolatore di Mott [11] ed oscillazioni di Bloch [12].

Scopo di questo lavoro di tesi sono state la progettazione e realizzazione della parte di apparato sperimentale che permette la creazione di un reticolo ottico la cui velocità rispetto al sistema di riferimento del laboratorio possa essere decisa e controllata dall'esterno. Questo dispositivo ha reso possibile una dettagliata analisi dello spettro energetico di un condensato di Bose-Einstein in termini di velocità relativa al reticolo in analogia al caso di un elettrone che si muove in un cristallo: la piccola dispersione in impulso di un condensato di Bose-Einstein permette la definizione di un'unica *velocità di Bloch* per l'intero insieme di atomi. Questo significa che, tramite l'utilizzo del reticolo ottico mobile abbiamo potuto realizzare una precisa spettroscopia di bande del condensato, che si è dimostrato una sonda estremamente efficace nella caratterizzazione del potenziale periodico. La possibilità di variare la velocità del reticolo ha inoltre permesso l'osservazione di un *effetto lente* indotto dal reticolo ottico sulle dimensioni del condensato, interpretabile come risultato della diversa *massa efficace* che gli atomi hanno all'interno del potenziale periodico.

Le osservazioni sperimentali sono state poi confrontate con le previsioni ricavate da un modello efficace 1-D per l'espansione di un condensato di Bose-Einstein in un reticolo ottico recentemente presentato in [13].

La tesi è così strutturata: nel cap. 1 sono riportati i principali concetti e risultati teorici alla base del fenomeno della condensazione di Bose-Einstein in un gas diluito. Nel cap. 2, invece, l'usuale interazione tra radiazione e atomi viene applicata al caso di un condensato di Bose-Einstein dal punto di vista teorico, con particolare riguardo al caso dei potenziali ottici periodici. In fondo al capitolo è riportato il suddetto modello teorico per l'espansione del condensato in un reticolo ottico. Il cap. 3 racchiude una rapida descri-

zione dell'apparato sperimentale con cui si ottiene il condensato di  $^{87}\text{Rb}$  e quella, più dettagliata, della parte di apparato costruito durante il presente lavoro, che permette la realizzazione di un reticolo ottico mobile. Infine, nel cap. 4, sono riportati i risultati delle misure sul condensato in espansione all'interno del potenziale periodico: verranno mostrati i dati relativi alla spettroscopia di bande e quelli relativi all'osservazione di effetti di massa efficace sulle dimensioni del condensato; sarà mostrato come, attraverso l'utilizzo dell'apparato sperimentale descritto nel cap. 3, si può ottenere un *effetto lente* che focalizza o meno la nuvola atomica a seconda della velocità relativa al reticolo ottico [14].

# Capitolo 1

## Condensazione di Bose-Einstein

In questo capitolo sono riassunti i principali risultati teorici che descrivono le proprietà fondamentali di un condensato di Bose-Einstein in un gas debolmente interagente in presenza di un potenziale armonico di confinamento. Cominceremo col trattare il caso di un gas di Bose ideale, e cioè costituito da particelle non interagenti, evidenziandone i parametri energetici e spaziali rilevanti. L'effetto di una debole interazione tra le particelle è trattato tramite una teoria di campo medio nel formalismo di seconda quantizzazione, il cui importante risultato consiste nell'equazione di Gross-Pitaevskii, utile strumento nella descrizione di un condensato di Bose-Einstein.

### 1.1 Gas ideale di Bose in un potenziale armonico a $T=0$

Un condensato di Bose-Einstein è un *ensemble* di atomi che a temperatura  $T = 0$ , in virtù del loro carattere bosonico, occupano tutti lo stesso stato fondamentale. Consideriamo un insieme di  $N$  bosoni identici sottoposti all'azione di un potenziale di confinamento; la prima importante approssimazione, giustificata dalle proprietà delle trappole per atomi alcalini attualmente reperibili, consiste nel considerare tale potenziale come *armonico* nella regione

di interesse, che coincide con l'intorno di un suo minimo: qui infatti è lecito uno sviluppo in serie di potenze che dà luogo ad un termine quadratico nella distanza dal minimo. Possiamo assumere per il potenziale la forma

$$V_{trap} = \frac{m}{2}(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2). \quad (1.1)$$

L'assenza di interazioni tra le  $N$  particelle permette di scrivere l'Hamiltoniana di campo medio del sistema come somma delle Hamiltoniane di singola particella, i cui autovalori assumono la forma

$$\varepsilon_{n_x n_y n_z} = (n_x + 1/2)\hbar\omega_x + (n_y + 1/2)\hbar\omega_y + (n_z + 1/2)\hbar\omega_z \quad (1.2)$$

ove  $n_x$ ,  $n_y$  e  $n_z$  sono i numeri quantici associati ad ognuna delle direzioni definite dagli assi della trappola. A  $T = 0$  tutti gli atomi occuperanno lo stato fondamentale, che sarà quindi descritto da un'autofunzione data dal prodotto delle autofunzioni di singola particella  $\psi_0(\mathbf{r}_i)$ , nelle quali sia posto  $n_x = n_y = n_z = 0$ :

$$\Psi_0 = \prod_{i=1}^N \psi_0(\mathbf{r}_i), \quad (1.3)$$

con

$$\psi_0(\mathbf{r}) = \left(\frac{m\omega_{osc}}{\pi\hbar}\right)^{3/4} \exp\left(-\frac{m}{2\hbar}(\omega_x x^2 + \omega_y y^2 + \omega_z z^2)\right), \quad (1.4)$$

dove  $\omega_{osc} = (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3}$  rappresenta la media geometrica delle frequenze di oscillazione lungo le tre direzioni.

Dall'equazione 1.4 si evince che, assunta come densità di particelle la grandezza  $n(\mathbf{r}) = N|\psi_0(\mathbf{r})|^2$ , la distribuzione delle  $N$  particelle ha un'ampiezza media pari a

$$\sigma = a_{osc} = \left(\frac{\hbar}{m\omega_{osc}}\right)^{1/2}, \quad (1.5)$$

che corrisponde all'usuale lunghezza di oscillatore armonico tridimensionale. Questa è la prima scala di lunghezza di rilievo del nostro sistema, che negli

attuali esperimenti è dell'ordine di  $1 \mu\text{m}$ . Consideriamo ora il fatto che a  $T \neq 0$  gli atomi non occupano tutti lo stato fondamentale, ma sono distribuiti su un certo numero di stati eccitati; ragionando in maniera classica [15] ed utilizzando la distribuzione di Boltzmann si ha che  $n(\mathbf{r}) \propto \exp(-V/k_B T)$ , dove  $k_B$  è la costante di Boltzmann. Assumendo il potenziale armonico, si ricava che la larghezza della Gaussiana che rappresenta la distribuzione di particelle è  $\sigma_T = a_{osc}(k_B T / \hbar \omega_{osc})^{1/2}$ , quindi più grande della stessa lunghezza di oscillatore armonico. Questa semplice considerazione evidenzia la presenza di un picco molto più accentuato nella distribuzione degli atomi condensati rispetto ad una distribuzione di atomi sopra la temperatura critica. Potremo discutere con maggior rigore questo aspetto nella sezione successiva, quando verrà trattato il caso di temperatura finita.

Considerando la trasformata di Fourier della funzione d'onda atomica complessiva, possiamo ricavare informazioni sulla distribuzione di impulso. E' importante far notare che, usando nel caso termico una funzione di distribuzione classica, la larghezza del picco nello spazio degli impulsi rimane comunque minore nel caso condensato: la condensazione di Bose-Einstein *in presenza di un potenziale esterno* caratterizza ogni dimensione dello spazio delle fasi, e non solo quella degli impulsi, come invece avviene nel caso *libero* [15]. Questa peculiarità permette l'osservazione diretta di un condensato: nel caso libero atomi termici e non occuperebbero sostanzialmente la stessa posizione, mentre l'introduzione di un potenziale esterno "raccoglie" in una limitata regione di spazio esclusivamente la frazione di atomi al di sotto della temperatura di transizione (sez. 1.2).

Nel caso del nostro apparato sperimentale il potenziale di intrappolamento magnetico ha la caratteristica geometria cilindrica il cui asse maggiore è orientato lungo l'asse  $x$ ; la funzione d'onda di singola particella assume la

forma

$$\psi_0(\mathbf{r}) \propto \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_\perp}(\xi x^2 + \rho^2)\right), \quad (1.6)$$

con  $\xi$  (da qui in poi detta *aspect ratio*) rapporto tra il semiasse lungo una qualsiasi direzione radiale della trappola e quello lungo  $x$  (calcolabile tramite il semplice rapporto tra le frequenze di trappola  $\omega_x/\omega_\perp$ );  $\rho$  è la distanza radiale dal centro della trappola,  $\sqrt{y^2 + z^2}$ ; infine  $\sigma_\perp$  è la lunghezza di oscillatore armonico radiale, definita da  $\sigma_\perp = (\hbar/m\omega_\perp)^{1/2}$ . Nel nostro caso l'*aspect ratio*  $\xi$  in assenza di espansione dalla trappola magnetica è dell'ordine di 0.1.

## 1.2 Gas ideale di bosoni a $T > 0$

Un utile approccio statistico alla trattazione del caso  $T \neq 0$  può essere realizzato utilizzando l'insieme grancanonico. Qui infatti potremo scrivere il numero di particelle (indistinguibili) presenti ad una certa temperatura  $T$  e la loro energia rispettivamente come

$$N = \sum_{n_x, n_y, n_z} \left\{ \frac{1}{\exp\left[\frac{1}{k_B T}(\varepsilon_{n_x n_y n_z} - \mu)\right] - 1} \right\} \quad (1.7)$$

e

$$E(T) = \sum_{n_x, n_y, n_z} \varepsilon_{n_x n_y n_z} \left\{ \frac{1}{\exp\left[\frac{1}{k_B T}(\varepsilon_{n_x n_y n_z} - \mu)\right] - 1} \right\}, \quad (1.8)$$

dove  $\mu$  rappresenta il potenziale chimico, definito da  $\mu = \partial F / \partial N$ , con  $F$  energia libera del sistema composto da  $N$  particelle e  $\varepsilon_{n_x n_y n_z}$  energia dello stato fissato dai numeri quantici  $n_x$ ,  $n_y$  e  $n_z$ .

La forma della prima di queste equazioni mostra che per temperature sufficientemente basse l'unico stato ad avere una popolazione rilevante è quello ad energia più bassa; se poi il numero di particelle è fissato, tale popolazione diviene *macroscopica*: si ha così l'insorgenza della condensazione di Bose-Einstein. Allo scopo di dare una valutazione della temperatura critica per

il fenomeno conviene separare il termine che descrive lo stato fondamentale ( $n_x, n_y, n_z = 0$ ) dal resto della somma:

$$N - N_0 = \sum_{n_x, n_y, n_z \neq 0} \left\{ \frac{1}{\exp\left[\frac{1}{k_B T}(\varepsilon_{n_x n_y n_z} - \mu)\right] - 1} \right\}; \quad (1.9)$$

risulta chiaro che tale grandezza è prossima a 0 qualora  $\mu \rightarrow \mu_c = \frac{\hbar}{2}(\omega_x + \omega_y + \omega_z) = \frac{3\hbar\bar{\omega}}{2}$ . Assumendo che la separazione in energia tra i livelli diminuisca all'aumentare del numero di particelle  $N$ , e che quindi per un certo  $N$  sia più piccola dell'energia di eccitazione caratteristica del sistema, possiamo generalmente sostituire la sommatoria in 1.9 con un'integrale, sostituendo il valore  $\mu_c$ :

$$N - N_0 = \iiint \frac{d\mathbf{n}}{\exp\left[\frac{\hbar}{k_B T} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}\right] - 1}, \quad (1.10)$$

ove in  $\boldsymbol{\omega}$  e  $\mathbf{n}$  sono state raccolte le frequenze di trappola e i numeri quantici di ciascuna direzione. In generale la nostra assunzione di grandi energie di eccitazione corrisponderà alla posizione  $k_B T \gg \hbar\omega_{osc}$ , qualora si trascurino processi di eccitazione diversi da quelli termici. Andando a calcolare il precedente integrale si ottiene, utilizzando la funzione *Zeta di Riemann*  $\zeta(n)$ <sup>1</sup>:

$$N - N_0 = \zeta(3) \left( \frac{k_b T}{\hbar\omega_{osc}} \right)^{1/3}. \quad (1.11)$$

Imponendo che a  $T = T_c$  la frazione di atomi nello stato fondamentale sia 0 si può ottenere una temperatura critica per la condensazione:

$$T_c = \left( \frac{N}{\zeta(3)} \right)^{1/3} \frac{\hbar\omega_{osc}}{k_B}, \quad (1.12)$$

temperatura alla quale lo stato fondamentale comincia a popolarsi macroscopicamente. Sostituendo la 1.12 nella 1.11 si ha:

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^3, \quad (1.13)$$

<sup>1</sup>Tale funzione è definita come  $\zeta(n) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-n}$

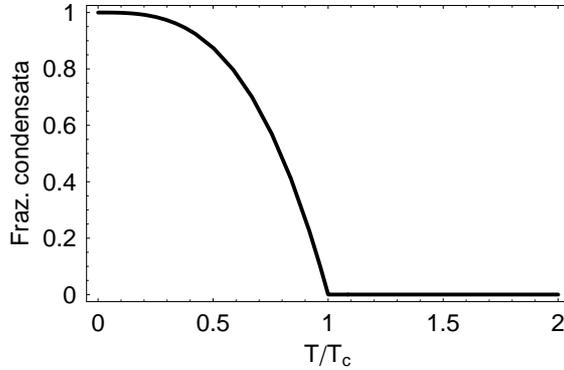


Figura 1.1: Frazione di atomi condensati in funzione del rapporto tra temperatura e temperatura critica  $T_c$

che esprime la frazione di atomi condensati qualora  $T < T_c$  (vd. fig. 1.1).

Dalle precedenti considerazioni si può dedurre che esistono due scale di energia rilevanti per il nostro sistema: l'energia termica di transizione  $k_B T_c$  e la separazione media tra i livelli di oscillatore armonico  $\hbar\omega_{osc}$ . Nel caso del nostro apparato sperimentale, dove  $\omega_x = 2\pi \cdot 9$  Hz,  $\omega_y = \omega_z = 2\pi \cdot 90$  Hz, si ottiene  $\omega_{osc} \simeq 2\pi \cdot 42$  Hz e una corrispondente separazione di 2 nK. Dalla 1.12 si ottiene, con  $N$  pari a 500000,  $T_c \simeq 150$  nK; poichè  $k_B T_c \gg \hbar\omega_{osc}$ , è sostanzialmente convalidata l'ipotesi semiclassica espressa nella 1.10.

Va notato che il numero di atomi a nostra disposizione non permette in realtà di raggiungere il limite termodinamico ( $N \rightarrow \infty$ ,  $N\omega_{osc}^3$  costante nella 1.12) nel quale la temperatura critica  $T_c$  è propriamente definita; è del resto intuitivo, ma può essere dimostrato [15], che l'effetto delle dimensioni finite del sistema porta ad una diminuzione della frazione di atomi condensati di un fattore che, all'ordine più basso, è proporzionale ad  $N^{-1/3}$ , ovvero ad un abbassamento della temperatura di transizione rispetto al caso limite.

Come ultima considerazione, potremmo utilizzare la funzione di partizione gran canonica per ottenere in modo formale il numero di particelle e di

stati che compongono il sistema; considerata poi la distribuzione di Maxwell-Boltzmann per l'impulso delle particelle si ottiene per  $\sqrt{\langle \delta p^2 \rangle}$  l'espressione  $(2k_B T m)^{1/2}$ ; se a tale grandezza diamo il significato di impulso di De Broglie "medio" dell'insieme di particelle, giungiamo [16] all'importante condizione per la condensazione:

$$\frac{N}{V} \lambda_{dB}^3 = 2.612, \quad (1.14)$$

con  $\lambda_{dB} = h p_{dB}^{-1}$ . Ciò che determina il regime di condensazione è il bilancio tra densità di particelle nello spazio reale e sovrapposizione delle singole funzioni d'onda atomiche; quando queste ultime raggiungono estensioni confrontabili con la separazione atomica (fenomeno questo che ovviamente ha una forte dipendenza dalla temperatura) si ha la nascita della coerenza macroscopica tra i vari pacchetti d'onda atomici.

## 1.3 Gas di bosoni interagenti a $T=0$

### 1.3.1 L'equazione di Gross-Pitaevskii

Consideriamo adesso il caso di  $N$  atomi tra loro interagenti confinati all'interno di un certo potenziale  $V_{trap}$ . Si può dunque scrivere l'Hamiltoniana del sistema sfruttando il formalismo di seconda quantizzazione [17]. Riscrivendo ogni grandezza in gioco nella rappresentazione  $N$  si avrà:

$$\begin{aligned} \tilde{H} = & \int d\mathbf{r} \tilde{\Psi}^*(\mathbf{r}) \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{trap} \right] \tilde{\Psi}(\mathbf{r}) + \\ & + \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \tilde{\Psi}^*(\mathbf{r}) \tilde{\Psi}^*(\mathbf{r}') \left[ V_{int}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right] \tilde{\Psi}(\mathbf{r}) \tilde{\Psi}(\mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (1.15)$$

In tale espressione, il secondo membro a destra rappresenta il termine di interazione atomo-atomo, mentre  $\tilde{\Psi}^*(\mathbf{r})$  e  $\tilde{\Psi}(\mathbf{r})$  sono operatori bosonici di campo che rispettivamente creano e distruggono una particella nella posizione  $\mathbf{r}$ , la cui forma è  $\tilde{\Psi}(\mathbf{r}) = \sum_j \alpha_j \psi_j(\mathbf{r})$  in funzione degli stati di singola

particella  $\psi_j(\mathbf{r})$ . La teoria di Bogoliubov fa leva sul fatto che la condensazione di Bose-Einstein corrisponde all'occupazione macroscopica di uno di questi stati, pertanto nel limite termodinamico ( $N \rightarrow \infty$ ),  $N_0/N$  avrà un valore finito per ogni temperatura minore di quella critica. In questa situazione gli operatori potranno essere trattati come semplici numeri complessi, con  $\alpha_j = \alpha_j^* = \sqrt{N_0}$ , dal momento che  $|N_0, \dots\rangle$  corrisponde in pratica a  $|N_0 \pm 1, \dots\rangle$ . La condensazione per un gas uniforme porta dunque all'occupazione dello stato di singola particella  $\tilde{\Psi}(\mathbf{r}) = \sqrt{N_0/V}$ , dove  $V$  è il volume occupato dal gas stesso: si noti che tale stato è descrivibile tramite un semplice operatore moltiplicativo indipendente da  $\mathbf{r}$  e da  $N$ . La teoria di Bogoliubov [18] che prende vita da tale assunzione per generalizzarla al caso non uniforme e dipendente dal tempo, scompone l'operatore di campo (in rappresentazione di Heisenberg) come:

$$\tilde{\Psi}(\mathbf{r}, t) = \Upsilon_0(\mathbf{r}, t) + \tilde{\Psi}'(\mathbf{r}, t), \quad (1.16)$$

dove  $\Upsilon_0$  altro non è che il valore d'aspettazione dell'operatore  $\tilde{\Psi}(\mathbf{r})$  che definisce quindi la densità di particelle nel condensato, mentre il secondo termine è un termine perturbativo.  $\Upsilon_0(\mathbf{r}, t)$  è un campo classico che prende il nome di *parametro d'ordine* o *funzione d'onda del condensato*. Nel caso si possa scrivere  $|\tilde{\Psi}'| \ll |\Upsilon_0|$ , si può ottenere un'equazione per l'evoluzione temporale del parametro d'ordine. Consideriamo infatti l'equazione di Schrödinger dipendente dal tempo nel formalismo di Heisenberg per l'Hamiltoniana 1.15:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\Psi}(\mathbf{r}, t) = [\tilde{\Psi}(\mathbf{r}, t), \tilde{H}]; \quad (1.17)$$

prendendo poi il potenziale "puntiforme"

$$V_{int}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = g \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (1.18)$$

con  $g$  costante di interazione, e sostituendo  $\tilde{\Psi}$  con  $\Upsilon_0$  nella 1.17 si ottiene l'equazione di Gross-Pitaevskii (1961):

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Upsilon_0(\mathbf{r}, t) = \left[(-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} + V_{trap}(\mathbf{r}) + g|\Upsilon_0(\mathbf{r}, t)|^2]\Upsilon_0(\mathbf{r}, t). \quad (1.19)$$

Nel sostituire l'operatore di campo con il parametro d'ordine abbiamo implicitamente assunto che il range di interazione del potenziale 1.18 fosse molto più piccolo dell'interdistanza atomica media. Se, come usualmente è fatto, prendiamo

$$g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}, \quad (1.20)$$

con  $a$  lunghezza di scattering per il sistema atomico, questo si traduce nella condizione  $\langle N/V \rangle a^3 \ll 1$ . Nel caso del  $^{87}\text{Rb}$ ,  $a \simeq 6$  nm; per la condizione di diluizione dovremo quindi avere  $N/V \ll 5 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ , che è ampiamente verificata negli attuali apparati in cui si realizza la condensazione di Bose-Einstein nei gas diluiti. In realtà una caratterizzazione molto migliore dell'interazione in un gas può essere fatta confrontando  $V_{int}$  con l'energia dello stato fondamentale di oscillatore armonico  $N\hbar\omega_{osc}$  [15]. In definitiva, l'equazione di Gross-Pitaevskii può essere utilizzata per calcolare variazioni del parametro d'ordine  $\Upsilon_0$  su distanze maggiori di quella interatomica a basse temperature. Inoltre la sua relativa semplicità si rivelerà di fondamentale importanza per la risoluzione numerica di problemi con potenziali dipendenti dal tempo, come vedremo nei capitoli successivi.

### 1.3.2 Lo stato fondamentale

Abbiamo già ricavato la forma della funzione d'onda macroscopica per un condensato nel caso siano assenti le interazioni tra particelle. Nella presente sezione potremo osservare come la presenza di queste, in particolare se repulsive ( $a > 0$ ), comporti una sostanziale modifica nel profilo di densità del nostro sistema.

Consideriamo l'equazione di moto 1.19; il calcolo dello stato fondamentale definito da questa diviene possibile, almeno numericamente, qualora si scelga come parametro d'ordine una funzione normalizzata al numero totale di particelle  $N$  della forma:

$$\Upsilon_0(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r})e^{-i\mu t/\hbar}, \quad (1.21)$$

dove  $\mu$  rappresenta il potenziale chimico delle  $N$  particelle e  $\phi(\mathbf{r})$  viene assunto reale. Sostituendo nella 1.19 si ottiene un'equazione non lineare che in assenza di interazioni si riduce all'usuale equazione di Schrödinger stazionaria per la singola particella:

$$\left( -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{trap}(\mathbf{r}) + g|\phi(\mathbf{r})|^2 \right) \phi(\mathbf{r}) = \mu \phi(\mathbf{r}). \quad (1.22)$$

Dalla forma dell'equazione risulta chiaro che

$$E = E_{cin} + E_{trap} + E_{int}, \quad (1.23)$$

mentre dalla sua integrazione diretta discende che

$$\mu = \frac{E_{cin} + E_{trap} + 2E_{int}}{N}, \quad (1.24)$$

che chiarifica il significato fisico del potenziale chimico nel nostro sistema. Da notare che il termine cinetico è originato dal principio di indeterminazione e dà luogo alla cosiddetta *pressione quantistica*, che svanisce nei sistemi uniformi. Nel caso il condensato venga osservato dopo un certo tempo dallo spegnimento della trappola magnetica, ovvero in espansione, va tenuto presente che la somma dell'energia di interazione con quella cinetica si deve conservare, pertanto

$$E_{cin} + E_{int} = E_{rel} \quad (1.25)$$

dove l'ultimo termine è detto *energia di rilascio* e gioca un ruolo importante negli esperimenti in cui si vuole osservare in espansione la nube atomica.

### 1.3.3 L'approssimazione di Thomas-Fermi

Abbiamo visto nella sezione precedente che la condizione di diluizione  $\langle N/V \rangle a^3 \ll 1$ , necessaria alla derivazione dell'equazione di Gross-Pitaevskii non pone particolari restrizioni a livello sperimentale. La successiva approssimazione, utile alla descrizione di un sistema condensato dal momento che permette sostanziali semplificazioni, è quella che definisce il cosiddetto regime di *Thomas-Fermi*.

Confrontando l'energia di interazione con l'energia cinetica associata a  $N$  oscillatori armonici ( $N\hbar\omega_{osc}$ ) si ottiene [15]:

$$\frac{E_{int}}{E_{cin}} \propto \frac{N|a|}{a_{osc}}; \quad (1.26)$$

Nel caso si possa scrivere  $\frac{N|a|}{a_{osc}} \gg 1$ , il termine cinetico  $-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m}$ , può essere trascurato rispetto al termine esterno e a quello di interazione, e l'equazione di Gross-Pitaevskii diviene

$$\left[ V_{trap}(\mathbf{r}) + g|\phi(\mathbf{r})|^2 \right] \phi(\mathbf{r}) = \mu \phi(\mathbf{r}); \quad (1.27)$$

questa equazione ammette la soluzione non banale:

$$|\phi(\mathbf{r})|^2 \doteq n(\mathbf{r}) = (\mu - V_{trap}(\mathbf{r}))g^{-1} \quad (1.28)$$

nella regione in cui  $\mu > V_{trap}$ , mentre all'esterno avremo la soluzione banale  $|\phi(\mathbf{r})|^2 = 0$ . Formalmente dunque la densità assume la forma del potenziale di confinamento ("distribuzione di Thomas-Fermi"): qualora la trappola sia di tipo armonico, tale distribuzione è rappresentata da una parabola rovesciata il cui massimo coincide col minimo del potenziale esterno. Inoltre  $n(\mathbf{r})$  va a zero *esattamente* quando  $\mu = V_{trap}(\mathbf{r})$ , che negli esperimenti correnti si verifica tipicamente intorno a  $100 \mu m$  dal centro della trappola in direzione assiale e  $10 \mu m$  in quella radiale.

La presenza di interazioni modifica dunque in modo consistente il profilo del parametro d'ordine, dato che nel caso ideale questo è dato da una distribuzione gaussiana (vd. sez. 1.1) che formalmente si estende fino all'infinito. Dalla normalizzazione della 1.28 si ricava una utile relazione che determina il potenziale chimico:

$$\mu = \frac{1}{2} \hbar \omega_{osc} \left( \frac{15Na}{a_{osc}} \right)^{2/5}. \quad (1.29)$$

Ricordando che il limite in cui stiamo lavorando è quello di interazione predominante sull'energia cinetica del sistema, la 1.23 potrà essere riscritta sommando il solo contributo esterno a quello di interazione:

$$E_{int} + E_{trap} = E; \quad (1.30)$$

inoltre, ricordando la definizione termodinamica di potenziale chimico e integrando la 1.29 si ricava

$$E = 5/7 \mu N \quad (1.31)$$

$$E_{int} \simeq E_{rel} = 2/7 \mu N \quad . \quad (1.32)$$

Per quanto detto poco sopra, considerando il punto di annullamento della distribuzione di particelle definito da  $\mu = V_{trap}(\sigma_{TF})$ , con  $V_{trap}(\sigma_{TF}) = 1/2 m \omega_{osc}^2 \sigma_{TF}^2$  nel caso di potenziale armonico, possiamo ricavare agilmente, esplicitando la 1.29, l'estensione spaziale di un condensato in regime di Thomas-Fermi per una trappola sferica :

$$\sigma_{TF} = a_{osc} \left( \frac{15Na}{a_{osc}} \right)^{1/5}, \quad (1.33)$$

con ovvia generalizzazione al caso anisotropo. Si noti che la dipendenza dell'estensione di un condensato dal numero di particelle è introdotta dalla presenza delle interazioni tra gli atomi che caratterizzano il regime di Thomas-Fermi.

## 1.4 Dinamica di un condensato di Bose-Einstein

Passiamo ora ad un breve studio dell'evoluzione dinamica di un condensato, analizzando la sua espansione dal potenziale di intrappolamento magnetico.

### 1.4.1 Espansione libera da un potenziale armonico

L'osservazione sperimentale di un condensato di Bose-Einstein, come avremo modo di discutere nel cap. 3, può essere realizzata in diverse configurazioni. Rimane comunque il fatto che le ridotte dimensioni dell'*ensemble* di atomi, confrontabili col limite di risoluzione dell'apparato, rappresentano un notevole ostacolo all'osservazione della sua dinamica. Risulta dunque di fondamentale importanza l'utilizzo di un metodo di rivelazione (*imaging*) che permetta l'osservazione degli atomi a seguito dello spegnimento del campo che genera il potenziale di intrappolamento: lasciando espandere la nube atomica sotto l'azione della propria energia interna per qualche istante, l'incertezza con cui si misurano alcuni parametri di interesse può diminuire di molto. Chiaramente sorge la necessità di ricavare la dinamica di espansione allo scopo di risalire, qualora si dimostri necessario, ai valori *in situ* di tali parametri.

Basandosi sulla trattazione di campo medio, nel caso  $T = 0$  si può descrivere il comportamento di un condensato di Bose-Einstein in espansione da una trappola tramite l'introduzione di alcuni parametri di scala [19]. Classicamente, ognuna delle particelle che costituisce il gas è sottoposta ad una forza che può essere descritta da

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = -\nabla(V_{trap}(\mathbf{r}, t) + g\rho(\mathbf{r}, t)), \quad (1.34)$$

dove  $\rho(\mathbf{r}, t)$  è la densità del nostro sistema descritta dalla 1.28,  $g$  è il para-

metro di interazione 1.20 e  $V_{trap}(\mathbf{r}, t)$  è il potenziale di intrappolamento che stavolta può dipendere dal tempo. Chiaramente in assenza di forze esterne alla trappola si riottiene la densità già calcolata nel regime di Thomas-Fermi. Considerando adesso una porzione infinitesima di gas in un potenziale armonico anisotropo lungo le tre direzioni spaziali, la dilatazione (o compressione) a cui questo è sottoposto segue una traiettoria

$$R_j(t) = \lambda_j(t)R_j(0) \quad j = 1, 2, 3 \quad ; \quad (1.35)$$

utilizzando la legge di Newton per ogni singolo volume infinitesimo

$$m\ddot{\mathbf{R}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{R}(t), t) \quad (1.36)$$

e sfruttando la 1.34 si può ottenere una relazione vettoriale sui parametri di scala [19]:

$$\ddot{\lambda}_j = \frac{\omega_j^2(0)}{\lambda_j \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} - \omega_j^2(t)\lambda_j \quad j = 1, 2, 3 \quad (1.37)$$

per qualunque condizione iniziale  $\mathbf{R}(0)$ . Nel caso del nostro apparato sperimentale si ha  $\omega_1 = \omega_x \ll \omega_2 = \omega_3 = \omega_\perp$ ; se la trappola viene aperta molto rapidamente a  $t = 0$  possiamo semplificare le 1.37 per ottenere

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\tau^2}\lambda_\perp &= \frac{1}{\lambda_\perp^3 \lambda_x}; \\ \frac{d^2}{d\tau^2}\lambda_x &= \frac{\xi^2}{\lambda_\perp^3 \lambda_x}. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Nelle precedenti equazioni si è introdotto il parametro adimensionale  $\tau = \omega_\perp t$ , mentre  $\xi = \omega_x/\omega_\perp \ll 1$  è l'aspect ratio (sez. 1.1). Sviluppando in serie di  $\xi$  si ottiene l'andamento temporale dei parametri di scala  $\lambda$  e quindi dell'estensione spaziale del condensato lungo le direzioni  $x$  e  $\perp$ :

$$R_\perp(t) \simeq R_\perp(0) \left[ \sqrt{1 + (\omega_\perp t)^2} \right] \quad (1.39)$$

$$R_x(t) \simeq R_x(0) \left[ 1 + \xi^2 \left( (\omega_\perp t) \arctan(\omega_\perp t) - \ln \sqrt{1 + (\omega_\perp t)^2} \right) \right]. \quad (1.40)$$

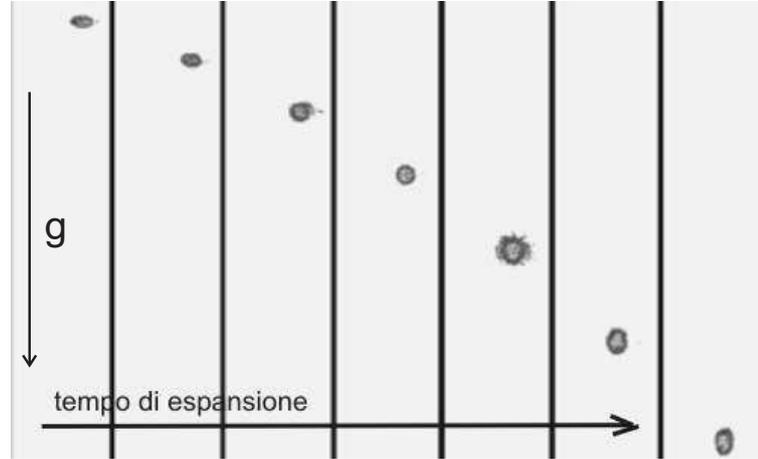


Figura 1.2: Immagini di un condensato in caduta libera realizzate a intervalli di tempo costanti dall'apertura della trappola, compresi tra 2 ms (immagine a sinistra) e 23 ms (immagine a destra). Si noti come la direzione assiale (orizzontale in queste immagini) espanda molto più lentamente di quella radiale (verticale).

Quindi la direzione assiale, nelle nostre condizioni sperimentali, presenta un'espansione molto limitata rispetto alla direzione radiale; osservando il condensato in espansione a diversi tempi dall'apertura della trappola (fig. 1.2) si possono infatti notare agevolmente i diversi comportamenti dei raggi lungo le due direzioni osservabili.

Riprendendo il concetto di energia di rilascio, definita nella 1.25, è importante notare come questa si conservi, dato che per sua definizione coincide con l'energia totale del sistema di atomi all'inizio dell'espansione. Nel caso si vogliano effettuare esperimenti sul condensato durante tale fase, si deve tener conto che l'energia di campo medio ha notevoli effetti sulla dinamica del sistema, ad esempio in presenza di potenziali ottici (cap. 2). Pertanto, un regime di interazione trascurabile è raggiunto soltanto dopo un certo tempo di espansione che può essere calcolato una volta noti i parametri di scala definiti nel precedente paragrafo.

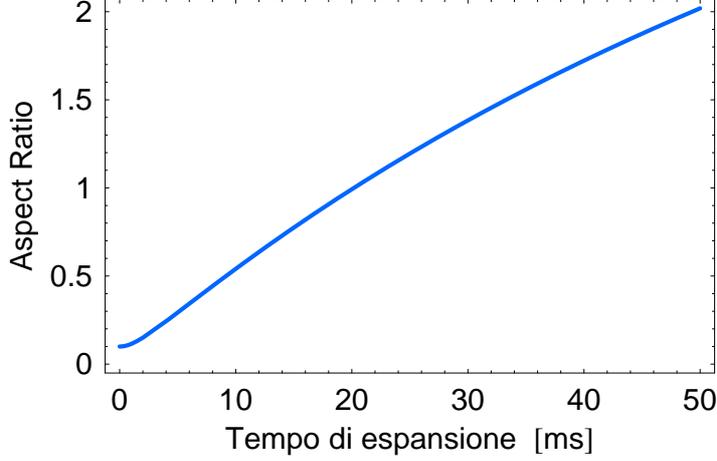


Figura 1.3: Evoluzione dell'aspect ratio  $\xi$  in funzione del tempo di espansione ( $t = 0$  corrisponde all'istante di apertura della trappola).

La 1.25 può infatti essere riscritta come [15]:

$$\frac{E_{rel}}{N} = \frac{2\mu}{7} \left( \frac{1}{\lambda_x \lambda_\perp^2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1,2,3} \frac{\dot{\lambda}_i^2}{\omega_i^2} \right), \quad (1.41)$$

dove il primo termine in parentesi rappresenta l'energia di campo medio residua per particella, mentre il secondo l'energia cinetica del sistema a seguito dell'apertura della trappola. Durante l'evoluzione del sistema l'energia di interazione si trasforma in energia cinetica, fino a che il primo termine non diviene zero e i raggi crescono a velocità costante ( $\dot{\lambda}_i = 0$ ). Imponendo la condizione

$$\frac{1}{\lambda_x \lambda_\perp^2} \ll \frac{1}{2} \sum_{i=1,2,3} \frac{\dot{\lambda}_i^2}{\omega_i^2} \quad (1.42)$$

e ricordando che  $\lambda_x \simeq 1$ ,  $\dot{\lambda}_x \simeq 0$ , si ottiene una stima del tempo necessario all'estinzione del contributo di campo medio:

$$t \gg \tau_{dil} \simeq \frac{1}{\omega_\perp}, \quad (1.43)$$

che nel nostro caso ( $\omega_\perp = 2\pi \cdot 90$  Hz) equivale a  $t \gg 1.8$  ms, condizione generalmente soddisfatta nelle nostre condizioni sperimentali (vd. cap. 2).

In fig. 1.3 è rappresentata l'evoluzione dell'aspect ratio in funzione del tempo di espansione dall'apertura della trappola: si nota la rapida conversione in energia cinetica dell'energia di campo medio, che dà luogo ad un'espansione molto più accentuata lungo la direzione radiale.

Va ricordato che nel nostro caso il tempo di espansione non può superare i 29 ms a causa delle ridotte dimensioni della finestra della cella attraverso cui vengono raccolte le immagini degli atomi (vedi sez. 3.1.10), che sotto l'azione della forza di gravità uscirebbero dalla zona della cella accessibile otticamente.



# Capitolo 2

## I reticoli ottici

In questo capitolo verranno analizzate le proprietà dei potenziali ottici periodici. In particolare sarà trattato il caso dei potenziali 1-dimensionali, e verranno mostrati gli effetti che questi, in via teorica, possono indurre in un condensato di Bose-Einstein. Sarà spiegata l'analogia che si ha col caso di un elettrone che si muove all'interno di un cristallo; verrà poi descritto il fenomeno della diffrazione di Bragg del condensato da parte di un reticolo ottico, nel quale fotoni e materia giocano un ruolo praticamente invertito rispetto all'usuale fenomeno della diffrazione di luce da parte di un cristallo. Nella parte finale del capitolo sarà brevemente riportato un modello che descrive l'espansione di un condensato all'interno di un potenziale periodico [13].

### 2.1 Il potenziale ottico ed il suo effetto sugli atomi

Lo studio dei potenziali che regolano l'interazione della luce con la materia è alla base della realizzazione degli strumenti che comunemente vengono utilizzati per la manipolazione e l'indagine di atomi ultrafreddi.

Consideriamo un atomo immerso in un campo elettrico  $\mathbf{E}$ ; la presenza

di tale campo indurrà nell'atomo la formazione di un dipolo elettrico  $\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}$ , con  $\alpha$  polarizzabilità complessa dell'atomo stesso. Il *potenziale ottico dipolare* può essere definito come

$$U_{dip} = -\frac{1}{2} \langle \mathbf{p} \cdot \mathbf{E} \rangle, \quad (2.1)$$

dove la media temporale annulla i termini rapidamente oscillanti. Ricordando che per l'intensità di campo si ha  $I = 2\epsilon_0 c |\mathbf{E}|^2$ , possiamo scrivere [20]:

$$U_{dip} = -\frac{1}{2\epsilon_0 c} \text{Re}(\alpha) I. \quad (2.2)$$

Pertanto la forza dipolare che agisce sull'atomo sarà:

$$F_{dip} = \frac{1}{2\epsilon_0 c} \text{Re}(\alpha) \nabla I. \quad (2.3)$$

Ricavando dalle precedenti equazioni la potenza assorbita dall'atomo, potremo calcolare il tasso di diffusione del sistema (*rate di scattering*) come numero di cicli di assorbimento nell'unità di tempo:

$$\Gamma_{sc} = \frac{P_{ass}}{\hbar\omega} = \frac{1}{\hbar\epsilon_0 c} \text{Im}(\alpha) I. \quad (2.4)$$

Nel caso la frequenza della radiazione  $\omega$  sia sufficientemente vicina alla frequenza di transizione propria dell'atomo  $\omega_0$  saremo nella condizione in cui  $|\Delta| \ll \omega_0$  ( $\Delta = \omega - \omega_0$  è usualmente detto *detuning* della radiazione rispetto alla transizione atomica). Nella cosiddetta *approssimazione di onda rotante* potremo pertanto trascurare i termini al cui denominatore compare  $\omega + \omega_0$  per mantenere soltanto quelli in cui compare  $\Delta$ . In tale situazione possiamo riscrivere il potenziale dipolare e il rate di scattering come:

$$U_{dip} = \frac{3\pi c^2}{2\omega_0^3} \frac{\Gamma}{\Delta} I \quad (2.5)$$

$$\Gamma_{sc} = \frac{3\pi c^2}{2\hbar\omega_0^3} \left( \frac{\Gamma}{\Delta} \right)^2 I. \quad (2.6)$$

Queste due equazioni rendono conto delle basi fisiche su cui si fondano le trappole ottiche in cui il detuning sia piccolo rispetto alla frequenza di transizione, ma sufficientemente elevato da poter trascurare eventuali fenomeni di saturazione del campione atomico. Dal rapporto tra le due precedenti equazioni si ricava

$$\hbar\Gamma_{sc} = \frac{\Gamma}{\Delta}U_{dip}, \quad (2.7)$$

che esprime due proprietà rilevanti dell'interazione luce-atomo:

- Il potenziale dipolare dipende linearmente da  $I/\Delta$ , mentre il rate di scattering, che porta al riscaldamento del campione atomico, da  $I/\Delta^2$ ; pertanto converrà realizzare trappole con i maggiori valori di intensità dei fasci e detuning a disposizione, allo scopo di ottenere il minor rapporto tra rate di scattering spontaneo e potenziale dipolare, compatibilmente con l'intensità di intrappolamento necessaria.
- Il segno del detuning  $\Delta = \omega - \omega_0$  determina il carattere dell'interazione tra luce ed atomi; infatti, nel caso di cosiddetto detuning rosso ( $\Delta < 0$ ), il segno del potenziale dipolare è positivo e gli atomi tenderanno ad accumularsi in regioni in cui l'intensità luminosa è maggiore, così da minimizzare l'energia del sistema. Qualora il detuning sia blu ( $\Delta > 0$ ), la regione di raccolta degli atomi sarà quella a intensità più bassa. In generale, dunque, le trappole blu presentano, a parità di energia di confinamento, una vita media al loro interno assai più lunga rispetto a quelle rosse, dato che la zona di accumulo degli atomi è caratterizzata da un rate di scattering spontaneo molto minore.

Nel caso in cui, per realizzare una trappola ottica, si utilizzi un fascio gaussiano propagantesi lungo l'asse  $z$ , il suo profilo di intensità sarà descritto

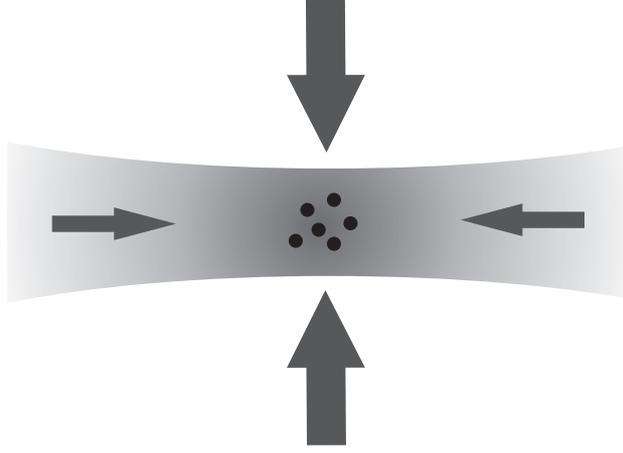


Figura 2.1: In figura è rappresentata schematicamente una trappola ottica *rossa*, ossia con  $\Delta < 0$ . La dimensione relativa delle frecce rappresenta l'intensità della forza che agisce sugli atomi: lungo l'asse il confinamento è molto più debole che in direzione radiale, dove il forte gradiente di intensità dà luogo ad un intenso gradiente di potenziale.

da:

$$I(r, z) = \frac{2P}{\pi w(z)^2} \exp\left(-\frac{2r^2}{w^2(z)}\right) \quad (2.8)$$

dove  $P$  denota la potenza del fascio di trappola mentre la sua estensione radiale  $w(z)$ , ossia la distanza dall'asse a cui l'intensità cala ad  $1/e^2$  volte l'intensità massima, è data da:

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + (z/z_R)^2}, \quad (2.9)$$

con  $w_0$  *waist* del fascio e  $z_R$  distanza di Rayleigh definita da  $z_R = \pi w_0^2/\lambda$ . Quest'ultima grandezza rappresenta la larghezza assiale del profilo di intensità: dalla sua forma possiamo notare come l'intensità decada molto più rapidamente in direzione radiale che in quella assiale. Pertanto, il potenziale dipolare, e quindi il confinamento, sarà molto più efficace in direzione perpendicolare all'asse, mentre in direzione parallela sarà praticamente assente.

## 2.2 Meccanismi di riscaldamento

Generalmente le trappole ottiche vengono utilizzate allo scopo di raccogliere in una zona accessibile e stabilmente osservabile un pacchetto di atomi raffreddati a basse temperature; per come è realizzata la trappola risulta chiaro che una grandezza di rilievo per dispositivi di questo tipo è rappresentata dalla temperatura di rinculo

$$T_{Rec} = \frac{\hbar^2 k^2}{k_B m}, \quad (2.10)$$

che altro non è che la temperatura associata all'energia cinetica guadagnata da un atomo che emette spontaneamente un fotone ( $k_B$  è la costante di Boltzmann). Nel caso del  $^{87}\text{Rb}$  in una trappola in cui  $\lambda = 780$  nm, la temperatura di rinculo risulta pari a 350 nK. I principali meccanismi che tendono a riscaldare il campione atomico sono principalmente due: lo scattering spontaneo di fotoni di trappola da parte degli atomi, che per sua natura introduce delle fluttuazioni nel potenziale dipolare stesso, e la casualità della direzione di emissione spontanea di un fotone, che introduce una fluttuazione nell'energia cinetica che diviene sempre più rilevante con l'avvicinarsi alla temperatura di rinculo. La somma di questi effetti conduce ad un incremento della temperatura cinetica del sistema pari a  $2E_{rec}$  ogni  $\Gamma_{sc}^{-1}$ . Il rate di riscaldamento per una trappola ottica può essere ricavato a partire dal rate di scattering spontaneo  $\Gamma_{sc}$  utilizzando uno sviluppo in serie di potenze per il potenziale ottico [20]. Il risultato è:

$$\dot{T}_{red} = \frac{2/3}{1 + \kappa} T_{Rec} \frac{\Gamma}{\hbar |\Delta|} |U_0| \quad (\Delta < 0); \quad (2.11)$$

$$\dot{T}_{blue} = \frac{\kappa}{1 + \kappa} T_{Rec} \frac{\Gamma}{\hbar \Delta} k_B T \quad (\Delta > 0). \quad (2.12)$$

Nelle precedenti espressioni con  $\kappa$  è indicata la quantità  $2/3 \sum_{i=x,y,z} n_i^{-1}$ , in cui  $n_i$  sono gli esponenti che compaiono nello sviluppo in serie di potenze di

$U_{dip}$  per ognuna delle tre coordinate spaziali:

$$U_{dip} = U_0 + \sum_{i=x,y,z} c_i i^{n_i}. \quad (2.13)$$

Dunque, in una trappola blu la temperatura ha un incremento esponenziale nel tempo, mentre in una trappola rossa il riscaldamento è lineare; d'altro canto, poichè nella prima gli atomi tendono ad accumularsi in una zona a bassa intensità luminosa, il rate di scattering sarà molto ridotto rispetto alla seconda.

### 2.3 Potenziali periodici

L'interferenza di due fasci luminosi che si propagano lungo lo stesso asse, ma in opposta direzione, può essere sfruttata per creare un'onda stazionaria che, in virtù della 2.5, costituisce per un atomo un potenziale periodico analogo a quello che un reticolo cristallino rappresenta per un elettrone di valenza. Per questo motivo i potenziali ottici che presentano una certa periodicità sono detti *reticoli ottici*.

Consideriamo adesso due onde piane propagantisi lungo l'asse  $z$  con la stessa frequenza  $\omega$  e con uno sfasamento  $\varphi$  costante nel tempo:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\rightarrow} &= \hat{\kappa} E_1 \cos(kz - \omega t) \\ \mathbf{E}_{\leftarrow} &= \hat{\kappa} E_2 \cos(kz + \omega t + \varphi), \end{aligned} \quad (2.14)$$

ove  $\hat{\kappa}$  è il vettore di polarizzazione della radiazione e  $k$  il vettore d'onda. Per l'intensità potremo scrivere:

$$I(z, \varphi) = 2\epsilon_0 c |\mathbf{E}_{\rightarrow} + \mathbf{E}_{\leftarrow}|^2 = 2\epsilon_0 c [E_1^2 + E_2^2 + 2E_1 E_2 \cos(2kz + \varphi)]. \quad (2.15)$$

L'ultimo termine, che descrive l'interferenza tra le due onde, modula spazialmente l'intensità dando luogo a nodi separati di  $\lambda/2$  (con  $\lambda$  lunghezza d'onda della radiazione); tale pertanto sarà la periodicità del profilo di intensità.

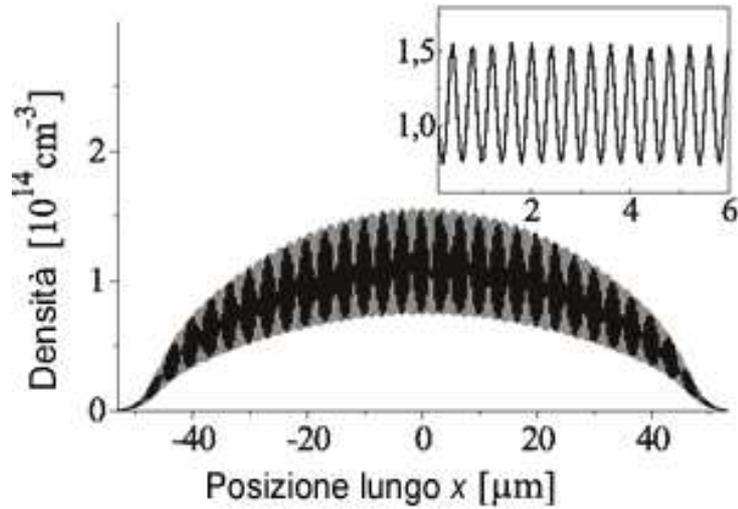


Figura 2.2: In figura è rappresentato il profilo di densità di un condensato di Bose-Einstein in presenza di un reticolo realizzato con due fasci contropropaganti con  $\lambda = 780$  nm. Il riquadro mostra un ingrandimento di una zona in prossimità del massimo.

Nel caso più generale in cui le due onde abbiano una differenza di frequenza  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$  (e quindi in vettore d'onda  $\Delta k = k_2 - k_1$ ), piccola se confrontata con la frequenza stessa, possiamo ripetere il calcolo precedente, per semplicità assumendo che le due onde abbiano stessa ampiezza  $E$  e sfasamento iniziale  $\varphi = 0$ :

$$E(\Delta\omega) = \left[ 2E \cos\left(\frac{k_1 + k_2}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right) \right] \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right), \quad (2.16)$$

per cui, dato che  $k \simeq (k_1 + k_2)/2$  e  $\omega \simeq (\omega_1 + \omega_2)/2$ , possiamo scrivere

$$I_{tot}(\Delta\omega, \Delta k) = 8\epsilon_0 c E^2 \cos^2\left(kx - \frac{\Delta\omega}{2}t\right) \cos^2\left(\frac{\Delta k}{2}x + \omega t\right). \quad (2.17)$$

Per ottenere il potenziale che effettivamente agisce sugli atomi, l'ultimo termine fortemente oscillante nella 2.17 andrà mediato nel tempo; poichè

$$\frac{\omega}{2\pi} \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \cos^2\left(\frac{\Delta k}{2}x + \omega t\right) dt = 1/2, \quad (2.18)$$

nell'espressione dell'intensità risultante sparisce la dipendenza diretta da  $\Delta k$ ; potremo pertanto scrivere:

$$\bar{I}(\Delta\omega) = \bar{I}_0 \cos^2 \left( kx - \frac{\Delta\omega}{2}t \right), \quad (2.19)$$

con  $\bar{I}_0 = 4\epsilon_0 c E^2$ , che corrisponde al doppio dell'intensità trasportata da un singolo fascio. Ricordando la 2.5, infine, possiamo ricavare l'espressione per il potenziale ottico efficace che agisce sugli atomi:

$$U_{dip} = s E_{Rec} \cos^2 \left( kx - \frac{\Delta\omega}{2}t \right), \quad (2.20)$$

dove si è introdotto il parametro adimensionale  $s$  che misura la profondità massima del potenziale in unità di energia di rinculo  $E_{Rec} = \hbar^2 k^2 / 2m$ .

Le precedenti equazioni dimostrano che il profilo di intensità dell'onda risultante ha una periodicità spaziale su breve scala di  $\lambda/2$ , e possiede una modulazione a bassa frequenza  $\Delta\omega$ ; pertanto tale profilo si muoverà nello stesso verso dell'onda a frequenza maggiore con velocità

$$v_{lat} = \frac{\Delta\omega}{2k} = \frac{\lambda}{2} \Delta\nu. \quad (2.21)$$

Nel caso del nostro esperimento, dunque, se  $\lambda \simeq 780$  nm, la spaziatura tra i vari nodi risulta  $0.39 \mu\text{m}$ , mentre l'estensione assiale del condensato corrisponde a  $\simeq 100 \mu\text{m}$ : fissato un sito reticolare, da questo punto di vista potremo considerare il sistema condensato praticamente infinito, approssimazione che, nel limite in cui le interazioni siano trascurabili, permette di utilizzare una teoria a singola particella analoga a quella utilizzata nel caso di un elettrone quasi libero che si muove all'interno di un cristallo.

Inoltre, nel caso del  $^{87}\text{Rb}$  la velocità di rinculo è pari a  $5.89$  mm/s, alla quale, sfruttando la 2.21, corrisponde una differenza in frequenza tra i due fasci di  $15.1$  kHz: nel capitolo 3 vedremo che questa si può agevolmente ottenere tramite l'utilizzo di due modulatori acustoottici agganciati in fase.

## 2.4 La struttura a bande

L'aspetto più affascinante dell'utilizzo di reticoli ottici mobili in esperimenti sulla condensazione di Bose-Einstein è la possibilità di invertire l'usuale concezione di effetti di interazione tra radiazione e materia come la diffrazione: se è vero che la diffrazione di un fascio ottico da parte di un reticolo materiale è ormai fenomeno noto e dettagliatamente studiato, molto invece ancora rimane da chiarire sul comportamento di onde *di materia* che si propagano attraverso reticoli ottici. Il naturale punto di partenza per un'indagine in tale direzione è costituito dai concetti base della teoria delle bande per un elettrone che si muove all'interno di un cristallo [21].

Come già osservato, l'estensione della funzione d'onda atomica su circa 250 siti reticolari permette di trattare il condensato come un'onda piana la cui dispersione in impulso è dell'ordine di  $1.2 \cdot 10^{-3} \hbar k$ , e quindi molto limitata se confrontata con la velocità di rinculo di un atomo.

La periodicità del potenziale ottico induce nel condensato la formazione di bande energetiche, nonché la discretizzazione dell'impulso relativo al reticolo (quasiimpulso) che questo può assumere. In virtù dell'elevata compattezza in velocità che possiede il condensato, potremo descrivere gli autostati di Bloch  $|n, q\rangle$  del sistema tramite i numeri quantici  $n$  (indice di banda), e  $q$  (quasiimpulso), che caratterizzeranno gli autovalori energetici  $E_{n,q}$ . Lo spettro energetico sarà del resto periodico nello spazio delle fasi di multipli del vettore fondamentale del reticolo reciproco  $2k$ , che corrisponde a  $4\pi/\lambda$ . Concetto utile alla descrizione dinamica di un condensato nelle nostre condizioni è quello di *massa efficace*: il comportamento di una particella con massa  $m$  che si propaga all'interno di un potenziale periodico unidimensionale è identico a quello di una particella libera con una massa  $m^*$  ridefinita dal potenziale

stesso:

$$m_{n,q}^* = \frac{\hbar^2}{\partial^2 E_{n,q} / \partial q^2}, \quad (2.22)$$

che si muove con una velocità relativa al reticolo pari alla velocità di Bloch:

$$v_{n,q} = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E_{n,q}}{\partial q}. \quad (2.23)$$

In fig. 2.3 è rappresentata la previsione teorica per energia (prime tre bande), velocità e massa efficace (prima banda), calcolate nel sistema di riferimento del potenziale periodico, per una particella che si muove all'interno del potenziale 2.20.

Ciascuno degli stati di Bloch potrà essere scomposto sulla base di onde piane  $|\phi_p\rangle$  che, data la periodicità della struttura in cui si propagano, avranno un impulso  $p = q + 2m\hbar k$ , ove  $k$  è il vettore d'onda del laser utilizzato nella creazione del reticolo ottico e vale  $2\pi/\lambda$ :

$$|n, q\rangle = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{n,q}(m) |\phi_{q+2m\hbar k}\rangle. \quad (2.24)$$

E' necessario ricordare che dal punto di vista sperimentale la base di onde piane costituisce la nostra base di misura; dalla precedente equazione possiamo capire che, osservando un condensato con un certo impulso  $q$  dopo un certo tempo di espansione dallo spegnimento del reticolo, si potranno distinguere componenti separate in impulso di un multiplo di  $2\hbar k$ , la cui popolazione relativa, nel sistema in quiete col reticolo, è data dai coefficienti  $c_{n,q}$ .

## 2.5 Effetti di adiabaticità dell'accensione del reticolo

Nella 2.24 compare l'indice di banda  $n$ : ciò significa che, a seconda della modalità con cui accendiamo il reticolo (che formalmente corrisponde a proiettare un'onda piana con un certo impulso  $p$  sugli infiniti stati di Bloch

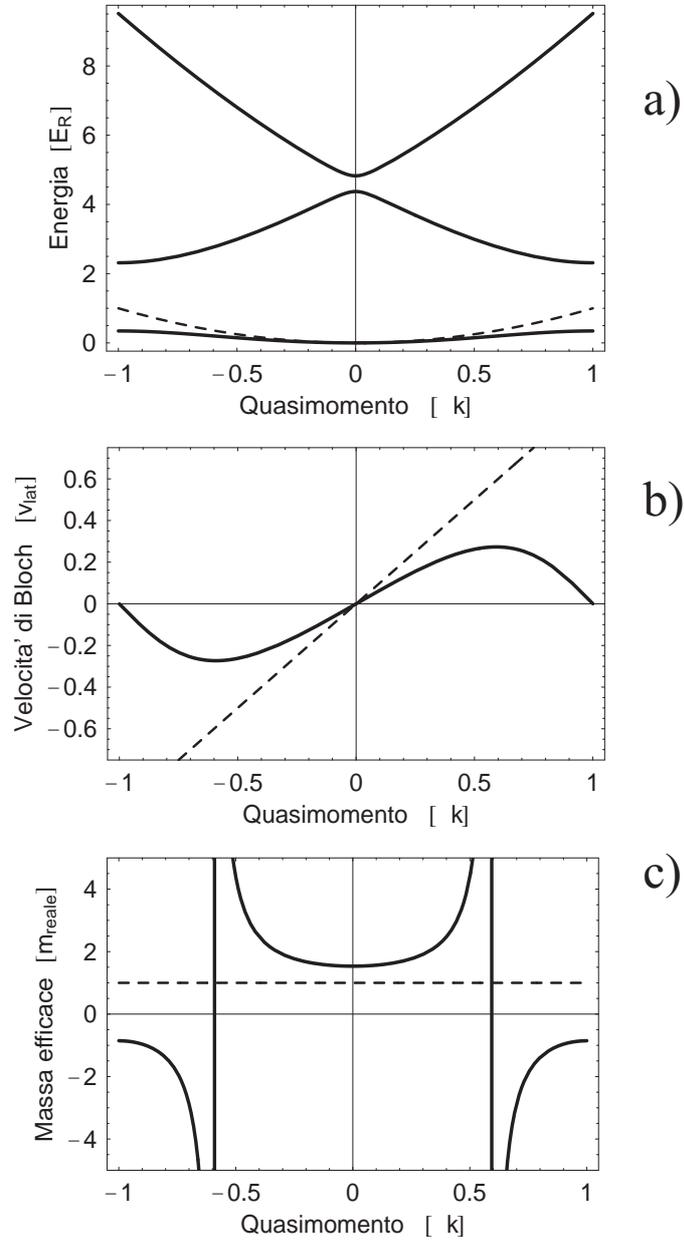


Figura 2.3: In figura sono rappresentate energia (fig. a), velocità (fig. b) e massa efficace (fig. c) per una particella in presenza di un reticolo ottico della forma 2.20 nel sistema di riferimento del potenziale periodico per  $s = 4$ . Il calcolo tiene conto dell'interazione tra i primi cinque livelli di ogni sito reticolare. La linea tratteggiata in fig. a e fig. c indica rispettivamente l'energia e la massa reale per una particella libera con impulso compreso tra  $-2\pi/\lambda$  e  $+2\pi/\lambda$ , mentre quella in fig. b rappresenta la velocità relativa tra particella e reticolo nel caso in cui  $s \rightarrow 0$ .

di numeri quantici  $n$  e  $q$ ), possiamo selezionare il regime sperimentale da indagare [22].

### 2.5.1 Accensione adiabatica

Nel caso il potenziale ottico periodico venga attivato su tempi sufficientemente lunghi, il condensato avrà un quasiimpulso ben definito  $q$  rispetto al reticolo, e la banda popolata sarà in pratica una sola. In altre parole, sarà possibile trasferire il condensato in un unico stato di Bloch  $|n, q\rangle$ . La condizione da verificare al fine di eseguire un trasferimento adiabatico sarà [23]

$$\left| \left\langle i, q \left| \frac{\partial H}{\partial t} \right| 0, q \right\rangle \right| \ll \frac{(E_{i,q}(t) - E_{0,q}(t))^2}{\hbar}, \quad (2.25)$$

dove  $|i, q\rangle$  rappresenta lo stato eccitabile più vicino al fondamentale  $|0, q\rangle$ . Poichè il termine che potrà avere una maggiore variazione nell'Hamiltoniana sarà ragionevolmente il potenziale 2.20, per mantenere l'adiabaticità del processo per  $q = 0$  sarà ampiamente sufficiente imporre

$$\dot{s}(t)E_{Rec} \ll 16E_{Rec}^2/\hbar, \quad (2.26)$$

dal momento che il minimo gap energetico in tale condizione è  $4E_{Rec}$  (vd. fig 2.3.a). Considerando la rampa di intensità del reticolo lineare nel tempo abbiamo:

$$\Delta t \gg \frac{s}{16\omega_{Rec}}, \quad (2.27)$$

che per  $s = 4$  dà  $\Delta t \gg 10 \mu s$ . I dettagli sperimentali sull'accensione del reticolo e sul controllo della tempistica sono riportati nel cap. 3.

Tale criterio di adiabaticità è stato di fondamentale importanza per l'ottenimento di risultati sperimentali riguardanti la spettroscopia di bande di un condensato di Bose-Einstein all'interno di un reticolo ottico (vd. cap.

4), poichè in tali casi è necessario caricare quanto più possibile gli atomi all'interno di un'unica banda.

### 2.5.2 Spegnimento

Nella sezione precedente si è discusso l'effetto di un'accensione adiabatica del reticolo sulla dinamica di un condensato. Non bisogna però dimenticare che anche lo spegnimento gioca un ruolo analogo, dato che sperimentalmente corrisponde a scomporre gli stati di Bloch, autostati dell'Hamiltoniana in presenza del potenziale ottico, sulla base di onde piane, autostati di particella libera. Pertanto, la trattazione svolta in precedenza rende conto dell'osservazione del condensato *all'interno* del potenziale ottico, e non a seguito del suo spegnimento. Supponiamo, infatti, di spegnere improvvisamente il reticolo e osservare il condensato dopo un tempo d'espansione sufficientemente lungo in modo da separare le componenti in impulso: i picchi di densità rappresenteranno le componenti dello stato  $|n, q\rangle$  sulla base di onde piane, calcolabili seguendo lo schema illustrato nella prossima sezione.

### 2.5.3 Accensione istantanea

Nel caso in questione, lo stato che rappresenta il condensato all'interno del reticolo a seguito della sua rapida accensione sarà una sovrapposizione lineare di stati di Bloch con indici di banda anche diversi, ma comunque in un unico stato di quasiimpulso iniziale  $q$ :

$$|\Upsilon(t=0)\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} |n, q\rangle \underbrace{\langle n, q | \phi_q \rangle}_{c_{n,q}^*(m=0)}. \quad (2.28)$$

Applicando l'evolvente temporale per ogni  $n, q$ , e proiettando sulla base di misura otteniamo le popolazioni di ogni componente di onda piana con

impulso  $q$  relativo al reticolo:

$$a_q(m) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n,q}^*(m=0) c_{n,q}(m) \exp\left(-i \frac{E_n(q)}{\hbar} \tau\right), \quad (2.29)$$

ove  $\tau$  è il tempo di permanenza del condensato all'interno del reticolo. Al variare del tempo  $\tau$  le popolazioni oscillano a causa dell'interferenza tra i fattori esponenziali che compaiono come ultimi termini nella precedente formula. Qualora vengano popolate più bande l'oscillazione non risulta sinusoidale, ma un battimento tra diverse frequenze, ognuna corrispondente al gap energetico tra la banda che rappresenta e la banda con  $n = 0$ .

## 2.6 Scattering Bragg di un condensato

Proprio questo regime di non adiabaticità risulta utile nella calibrazione dell'altezza del potenziale ottico. A bordo banda, infatti, si ha l'insorgenza di un fenomeno di diffrazione di Bragg degli atomi da parte del reticolo che fornisce un metodo rapido e preciso per determinarne l'intensità.

Classicamente, lo scattering Bragg si manifesta nell'interazione di un'onda elettromagnetica con un reticolo materiale: l'impulso trasferito al cristallo da parte dei fotoni incidenti può assumere esclusivamente valori multipli del vettore fondamentale del reticolo reciproco moltiplicato per  $\hbar$ , a cui corrisponde la nota condizione sugli angoli di diffrazione  $n\lambda = 2d \sin(\theta/2)$ .

Nel caso di un condensato di Bose-Einstein che si muove all'interno di un reticolo ottico, esiste una notevole analogia col fenomeno appena citato: anche onde di materia, interagendo coi siti reticolari creati dal potenziale ottico periodico, mostrano scambi di impulso discreti e ben determinati in direzione. Poiché un reticolo ottico nasce dall'interferenza di due fasci laser contropropaganti, la diffrazione Bragg all'ordine  $n$  può essere vista come un processo Raman di assorbimento e riemissione stimolata a  $2n$  fotoni da parte

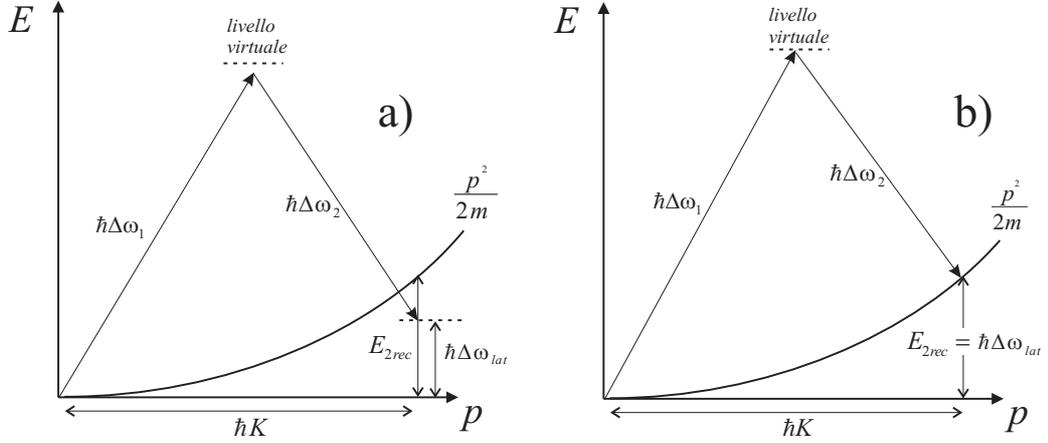


Figura 2.4: Rappresentazione schematica di un processo Bragg al primo ordine. In fig a) la differenza in frequenza  $\Delta\omega_{lat}$  tra i fasci non permette la conservazione dell'energia ( $E_{2rec} \neq \hbar\Delta\omega_{lat}$ ), e pertanto il processo sarà fortemente sfavorito. Nel caso della fig. b), invece, l'energia è perfettamente conservata e lo scattering Bragg può avvenire. Si noti come nei due casi l'impulso trasferito rimanga praticamente invariato, dato che la lunghezza d'onda della radiazione, e quindi il vettore d'onda dei fotoni, non subiscono cambiamenti apprezzabili.

di un atomo che assorbe un fotone da un fascio, appoggiandosi ad un livello virtuale, per poi essere stimolato all'emissione dall'altro: lo stato interno dell'atomo, al termine del processo, non viene alterato, mentre il suo impulso subisce una variazione pari a:

$$\hbar K = 2\hbar k \sin(\theta/2), \quad (2.30)$$

con  $k$  modulo del vettore d'onda del laser e  $\theta$  angolo tra i due fasci tale che  $\theta = 180^\circ$  quando questi sono collineari (si noti in che tal caso il vettore d'onda trasferito  $K$  coincide col vettore d'onda di doppio rinculo  $2k = k_{2rec}$ ). Il bilancio di energia tra il campo elettromagnetico e l'atomo inizialmente

fermo impone che

$$\begin{aligned} \Delta E_{atomo} &= \Delta E_{lat} \\ &\Downarrow \\ \frac{(n\hbar K)^2}{2m} &= n\hbar\Delta\omega_{lat}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

dove  $\Delta\omega_{lat}$  è la differenza di frequenza tra i due fasci.

Tali equazioni danno una condizione di risonanza sulla differenza in frequenza tra i fasci, cioè sull'energia scambiata tra i fasci e l'atomo, che ovviamente si riflette in un'imposizione sull'impulso trasferito. Nel caso  $\theta = 180^\circ$ , dalla fig. 2.4 risulta chiaro che nel caso non sia verificata la 2.31, il processo Raman risulta proibito; mentre l'impulso trasferito, se la variazione di frequenza tra i fasci è piccola rispetto alla frequenza propria dell'onda, rimane comunque  $\hbar K$ , l'energia scambiata a fine processo è direttamente proporzionale a  $\Delta\omega$ . Pertanto, piccole variazioni sul detuning tra i fasci influenzeranno pesantemente l'efficienza del processo Bragg. La 2.31 impone che tale fenomeno di diffrazione si presenti in pratica esclusivamente a bordo zona, ovvero in prossimità dei piani di Bragg per un reticolo pluridimensionale. Si noti inoltre che, sempre in virtù della 2.31, la condizione di risonanza si ha per  $\Delta E_{lat} = E_{2Rec} = 4E_{Rec} = 4\hbar^2 k^2 / 2m$ .

### 2.6.1 Scattering Bragg come metodo di taratura del reticolo

Nella nostra interpretazione, il processo di diffrazione non è niente di più che una transizione Raman tra due livelli. Pertanto, utilizzando le equazioni di Bloch, nel formalismo della matrice densità, non è difficile capire che la presenza di un reticolo ottico con un detuning tra i fasci instaura un'oscillazione nella popolazione dei due stati di impulso, la cui frequenza è la

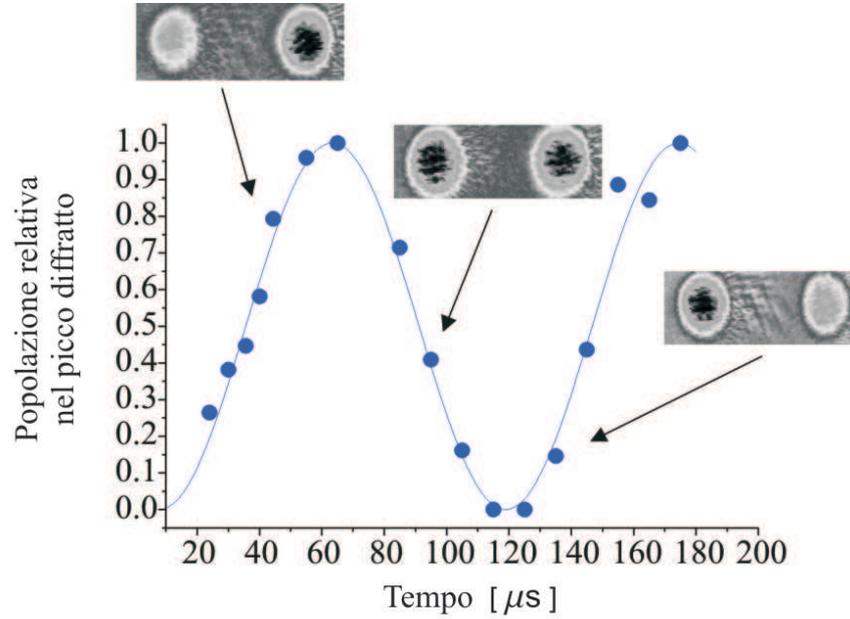


Figura 2.5: Utilizzo dello scattering Bragg come metodo di taratura del reticolo. In figura è rappresentata un'oscillazione completa della popolazione relativa tra due stati con differente valore di quasiimpulso,  $0\hbar k$  (inserto sulla sinistra), e  $+2\hbar k$  (inserto sulla destra). Le foto sono eseguite dopo un tempo di espansione di 28 ms, che permette di avere una buona separazione spaziale tra i due stati di impulso. Dal valore della frequenza di oscillazione delle popolazioni si ricava un'altezza del reticolo  $s \simeq 5$ .

frequenza di Rabi per il sistema [24]:

$$\Omega_{Rabi} = \frac{\Omega_1 \Omega_2}{2\Delta} = \frac{|U_{dip}|}{2\hbar}, \quad (2.32)$$

dove  $\Omega_1 \simeq \Omega_2$  sono le frequenze di Rabi dei due fasci e  $\Delta$  è il detuning comune rispetto alla risonanza atomica. Questa relazione, ricordando l'espressione per l'altezza del potenziale dipolare  $|U_{dip}| = sE_{Rec}$  (eq. 2.20), permette di ricavare sperimentalmente l'altezza  $s$  misurando direttamente la frequenza di Rabi del sistema:

$$s = \frac{2\hbar\Omega_{Rabi}}{E_{Rec}}. \quad (2.33)$$

Abbiamo sfruttato questa relazione per calibrare il reticolo ottico mobile durante lo svolgimento del presente lavoro (vedi cap. 3). La relativa rapidità di messa in opera e la notevole riproducibilità del fenomeno ne fanno anche un efficace strumento di controllo per l'allineamento *in itinere* del reticolo.

L'osservazione sperimentale della popolazione relativa nei due stati di impulso (vedi fig. 2.5) va chiaramente eseguita dopo un tempo di espansione dall'impulso Bragg sufficiente a separare spazialmente le due componenti, che a  $t = 0$  sono sovrapposte. Per i dettagli sperimentali sulla misura dell'altezza del potenziale ottico si veda la sez. 3.2.6.

### 2.6.2 Larghezza della risonanza Bragg

Bisogna ricordare che un condensato di Bose-Einstein intrappolato in un potenziale di confinamento presenta una forte inomogeneità, oltre che una dimensione finita. Tali caratteristiche influenzano notevolmente la larghezza e la frequenza di risonanza dello scattering Bragg, per effetto delle interazioni tra gli atomi descritte dalla 1.20.

Le dimensioni finite della nube atomica all'interno della trappola magnetica introducono un allargamento dovuto al principio di indeterminazione che può essere stimato calcolando il modulo quadro della trasformata di Fourier del parametro d'ordine nell'approssimazione di Thomas-Fermi definito in 1.28 [25] :

$$\Delta\nu_{dim} = \sqrt{\frac{21}{8}} \frac{\hbar k}{\pi m \sigma_{x_{TF}}} , \quad (2.34)$$

dove  $\sigma_{x_{TF}}$  è l'estensione assiale del condensato (lungo la direzione del reticolo) nel regime di Thomas-Fermi (eq. 1.33). L'inomogeneità, invece, porta ad una deviazione dallo spettro di particella libera pari a  $\frac{4}{7} \frac{n_0 g}{h}$ , dove  $n_0$  è la densità di picco del condensato e  $g$  la costante di interazione definita nella

1.20, e ad un allargamento

$$\Delta\nu_{dens} = \sqrt{\frac{8}{147} \frac{n_0 g}{h}}. \quad (2.35)$$

Se fino ad ora abbiamo considerato effetti che derivano esclusivamente da caratteristiche intrinseche del condensato, adesso prendiamo in esame l'impulso di luce usato per diffrangere gli atomi. Poichè la durata degli impulsi ha valori compresi tra i 50  $\mu$ s e 1 ms, non potremo trascurare la dispersione in frequenza generata dal principio d'indeterminazione:

$$\Delta\nu_{pulse} \simeq \frac{1}{2\pi\Delta t_{pulse}} \Rightarrow 160 \text{ Hz} < \Delta\nu_{pulse} < 3.2 \text{ kHz}. \quad (2.36)$$

In definitiva, mettendo insieme i precedenti risultati, calcolati nel caso del nostro esperimento, si avrà

$$\begin{aligned} \Delta\nu_{lat} &= n \frac{2\hbar k^2}{m} + \underbrace{\frac{4}{7} \frac{n_0 g}{h}}_{50 \text{ Hz}} \quad (\text{spostamento}) \\ \Delta\nu_{rms} &= \sqrt{\underbrace{\Delta\nu_{dim}^2}_{60 \text{ Hz}} + \underbrace{\Delta\nu_{dens}^2}_{60 \text{ Hz}} + \Delta\nu_{pulse}^2} \quad (\text{allargamento}). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Dalle precedenti stime si deduce che l'allargamento della risonanza nello scattering Bragg subisce una notevole alterazione soprattutto a causa della durata dell'impulso che lo genera. In particolare tale deviazione aumenterà all'aumentare dell'altezza del potenziale ottico. La frequenza di Rabi dell'oscillazione, infatti, cresce linearmente con  $s$ , e pertanto il tempo di permanenza del condensato all'interno del reticolo ottico, dell'ordine del periodo di un'oscillazione di Rabi completa, diminuisce; per il principio di Heisenberg, la corrispondente dispersione in frequenza dovrà quindi aumentare.

Come ultima osservazione, la natura delle precedenti modifiche alla frequenza di risonanza ne impedisce la misura in espansione, dato che, come già dimostrato nella sez. 1.4.1, l'energia di campo medio si converte molto rapidamente in energia cinetica; pertanto, eventuali misure di larghezza di riga

Bragg mirate alla descrizione di queste deviazioni dovranno essere eseguite sul condensato ancora racchiuso all'interno della trappola magnetica.

## 2.7 Modello 1D per l'espansione di un condensato di Bose-Einstein

Seguendo i risultati ottenuti da P. Massignan e M. Modugno in [13], procediamo ora ad una breve analisi di un modello 1D efficace per la descrizione dell'espansione di un condensato da una trappola magnetica nel caso in cui, durante tale espansione, sia presente un reticolo ottico in movimento.

Il modello descrive l'evoluzione di condensati di Bose-Einstein elongati in potenziali dipendenti dal tempo, la cui componente radiale sia armonica; nessuna limitazione è invece imposta sulla componente assiale.

Sfruttando trasformazioni unitarie di scala, è possibile fattorizzare la parte radiale della funzione d'onda del condensato mediante un'ipotesi gaussiana per la sua forma. Questo rende possibile non solo la descrizione del sistema in termini di un'equazione di Gross-Pitaevskii efficace, ma permette di valutare anche l'effetto del potenziale periodico 1D (le cui variazioni più brusche avvengono lungo la direzione assiale  $x$ ) sulla dinamica di espansione radiale, necessaria alla completa descrizione dell'evoluzione del sistema.

La funzione d'onda  $\Psi(\mathbf{r}, t)$  normalizzata all'unità può essere riscritta [19] in termini di una funzione d'onda riscalata  $\tilde{\Psi}(\mathbf{x}, t)$ :

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \exp\left(i\frac{m}{2\hbar} \sum_j r_j^2 \frac{\dot{\lambda}_j(t)}{\lambda_j(t)}\right) \frac{\tilde{\Psi}(\{r_j/\lambda_i(t)\}, t)}{\sqrt{\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)}}, \quad (2.38)$$

dove le variabili  $\lambda_j(t)$  sono i fattori di scala definiti nella sez. 1.4.1 e determinati dall'eq. 1.44. Secondo questa trasformazione, si può dimostrare che, nel limite di Thomas-Fermi (vd. sez. 1.3.3), la funzione  $\tilde{\Psi}$  è determinata dai valori iniziali delle frequenze di trappola che descrivono il campo di confina-

mento magnetico, e pertanto rimane congelata al suo valore iniziale: l'evoluzione dinamica è praticamente inclusa nel primo fattore a secondo membro della 2.38 (come già avevamo ricavato per via classica nella sez. 1.4.1). E' dunque possibile applicare la seguente fattorizzazione della funzione d'onda anche a seguito dello spegnimento della trappola magnetica:

$$\tilde{\Psi}(\mathbf{x}, t) = \tilde{\phi}(\sigma_x(x, t); y, z, t) \tilde{\psi}(x, t) \quad (2.39)$$

$$x = \frac{r_1}{\lambda_1}, \quad y = \frac{r_2}{\lambda_2}, \quad z = \frac{r_3}{\lambda_3} \quad , \quad (2.40)$$

dove  $\tilde{\psi}(x, t)$  è la componente assiale e  $\tilde{\phi}(\sigma_x(x, t); y, z, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma} \exp \frac{y^2+z^2}{2\sigma^2}$  quella componente radiale, che viene supposta gaussiana, caratterizzata dalla larghezza  $\sigma(x, t)$ . Come successiva approssimazione consideriamo trascurabile la variazione assiale della funzione d'onda radiale rispetto alla sua variazione radiale [26]:

$$\nabla^2 \tilde{\phi} \simeq \nabla_{\perp}^2 \tilde{\phi}. \quad (2.41)$$

Questa assunzione permette di arrivare, richiedendo la stazionarietà dell'azione

$$S[\Psi] = \int dt \int d^3\mathbf{r} \Psi^* \left[ i\hbar\partial_t + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - U - \frac{gN}{2} |\Psi|^2 \right] \Psi, \quad (2.42)$$

all'equazione di Gross-Pitaevskii *riscalata dinamicamente* (dr-GPE):

$$i\hbar\partial_t \tilde{\psi}(x) = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\lambda_x^2} \nabla_x^2 + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\lambda_{\perp}^2} + U(\lambda_x x, t) + \frac{1}{\lambda_x \lambda_{\perp}^2} \left[ \frac{m\omega_x^2(0)}{2} x^2 + \frac{m\omega_{\perp}^2(0)}{2} \sigma^2 + \frac{gN}{2\pi\sigma^2} |\tilde{\psi}|^2 \right] \right\} \tilde{\psi}(x), \quad (2.43)$$

dove  $g$  è il parametro di interazione definito nell'eq. 1.20 e  $\sigma$  è dato dalla relazione:

$$\sigma(x, t) = \sqrt{\hbar/m\omega_{\perp}(0)} \sqrt[4]{\lambda_x(t) + 2aN|\tilde{\psi}(x, t)|^2}, \quad (2.44)$$

mentre l'estensione radiale della funzione d'onda reale risulta

$$\Sigma(r_x, t) = \lambda_{\perp} \sqrt{\hbar/m\omega_{\perp}(0)} \sqrt[4]{\lambda_x(t)(1 + 2aN|\psi(r_x, t)|^2)}, \quad (2.45)$$

dove  $\omega_{\perp}(0)$  è la frequenza di trappola radiale e  $a$  è la lunghezza di scattering. Una caratteristica notevole di questo modello è dunque quella di poter descrivere l'interconnessione tra moto longitudinale e assiale del condensato a seguito di una modulazione lungo la sola direzione assiale. Ciò significa che in linea di principio, nel caso specifico di un reticolo 1D come quello da noi utilizzato, è possibile descrivere effetti di massa efficace negativa valutando il valore dell'*aspect ratio* del condensato (che ricordiamo essere il rapporto tra la dimensione radiale e quella assiale) al variare del suo quasiimpulso. L'*aspect ratio* può essere calcolata come rapporto tra i raggi quadratici medi della nube atomica lungo le due direzioni

$$\begin{aligned}\sigma_{rms_{\perp}} &= \sqrt{\int \Sigma(r_x) |\Psi|^2 d^3\mathbf{r}} \\ \sigma_{rms_x} &= \sqrt{\int r_x |\Psi|^2 d^3\mathbf{r}}.\end{aligned}\quad (2.46)$$

In figura 2.6 è raffigurata la previsione teorica dell'evoluzione del raggio assiale per diversi valori del quasiimpulso  $q$  del condensato rispetto al reticolo. Nel calcolo viene assunta una rampa in intensità lineare nel tempo (15 ms), dopodichè l'altezza  $s$  del potenziale è considerata costante e pari a 2. Come si può vedere dalla simulazione, per valori di  $q$  corrispondenti a  $m^* < 0$  il raggio arriva anche ad invertire il suo andamento in funzione del tempo, comprimendosi anzichè espandere. Infatti, il segno del termine diffusivo  $-\hbar^2 \nabla^2 / 2m^*$  nell'equazione di Gross-Pitaevskii dipende da quello della massa efficace; il valore di  $m^*$  determina pertanto il carattere di repulsione o attrazione tra gli atomi durante l'espansione. E' interessante notare come, nel caso  $q/\hbar k = 0.685$ , a cui corrisponde  $m^* \rightarrow \infty$ , l'espansione è praticamente inibita, dato che il termine diffusivo si annulla.

Poiché il modello permette di calcolare anche l'evoluzione radiale del condensato, è possibile valutare il comportamento della sua *aspect ratio*, che è

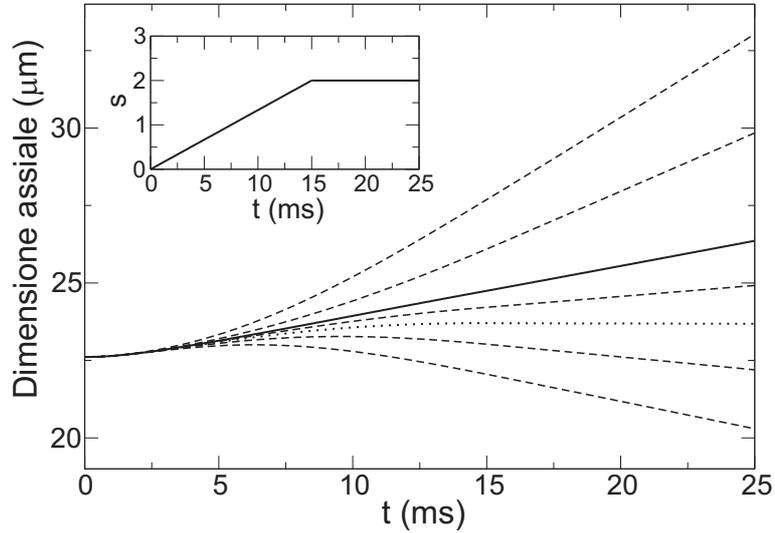


Figura 2.6: Evoluzione del raggio quadratico medio assiale di un condensato in espansione all'interno di un reticolo ottico mobile per diversi valori del quasiimpulso  $q$ ; partendo dall'alto le linee rappresentano i raggi per  $\frac{q}{\hbar k}=1.3, 1.2, 0, 0.4, 0.685, 0.75, 0.8$ . Il reticolo è acceso con una rampa lineare della durata di 15 ms, ed il valore finale dell'altezza del potenziale  $s$  è 2 (vedi riquadro).

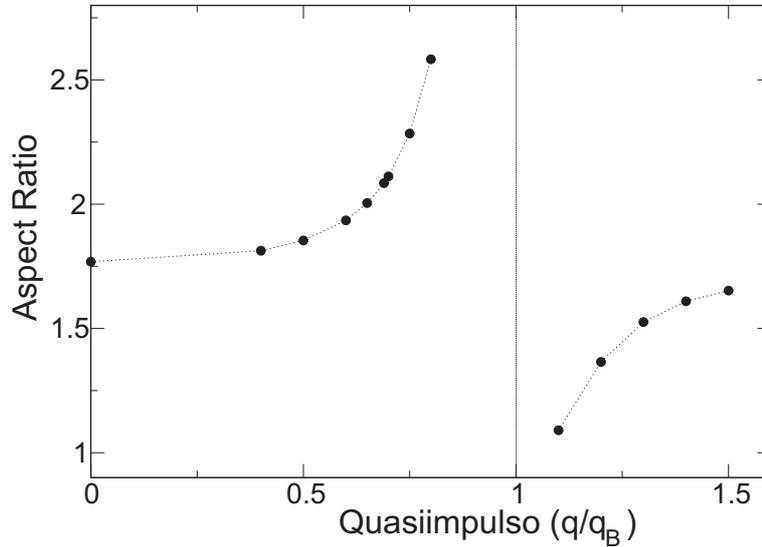


Figura 2.7: Aspect ratio del condensato calcolata per un tempo di espansione di 25 ms e per un'altezza del potenziale  $s = 2$ , in funzione del quasiimpulso.

riportato in figura 2.7 per un tempo di espansione di 25 ms: come si nota, in corrispondenza del bordo zona ( $q = q_B = \hbar k$ ) si ha una discontinuità nel rapporto tra i raggi del condensato, che riflette quella nella curvatura dell'energia che si ha nel passaggio tra prima e seconda banda.

La capacità di accedere a regioni dinamiche con massa efficace negativa tramite l'utilizzo di un reticolo ottico mobile dà la possibilità di cambiare segno alla relazione di dispersione di un'onda di materia. In linea di principio potranno dunque essere osservate drammatiche alterazioni delle caratteristiche del sistema atomico rispetto al caso libero. Questo modello effettivo 1-D è stato utilizzato per interpretare i risultati di un'indagine sperimentale mirata allo studio degli effetti della presenza di un potenziale periodico sull'espansione di un condensato di  $^{87}\text{Rb}$ , i cui risultati verranno discussi nel cap. 4.

# Capitolo 3

## L'apparato sperimentale

In questo capitolo saranno sinteticamente mostrate le caratteristiche sperimentali dell'apparato utilizzato nella produzione e nell'indagine di condensati di  $^{87}\text{Rb}$  già trattate dettagliatamente in [27, 28]. Sarà dedicato poi ampio spazio alla descrizione della realizzazione e dell'inserimento di un reticolo ottico mobile 1-D in tale apparato.

### 3.1 Realizzazione di un condensato di Bose-Einstein con atomi di $^{87}\text{Rb}$ .

Il processo che viene utilizzato nel nostro laboratorio permette di raggiungere la condensazione di Bose-Einstein in un campione atomico diluito attraverso due distinte fasi (vd. anche fig. 3.3). Nella prima il campione viene intrappolato e raffreddato mediante una trappola magneto-ottica (MOT) [29, 30], mentre nella seconda il campione viene raccolto mediante una trappola magnetostatica e raffreddato con un metodo di evaporazione a radiofrequenza (RF) [31], necessario ad incrementare la densità nello spazio delle fasi raggiunta durante la fase di MOT ( $\simeq 10^{-7}$ ). Nelle trappole puramente magnetiche, infatti, l'assenza di fotoni permette di abbassare la minima temperatura raggiungibile e di aumentare consistentemente la den-

sità del campione rispetto al caso delle MOT. I tempi su cui si estende un ciclo di evaporazione RF sono dell'ordine del minuto; questo significa che anche la vita media della trappola magnetica, limitata dalla pressione della cella in cui si trovano gli atomi, deve essere di quest'ordine di grandezza. Tale condizione richiede una pressione nella cella in cui viene realizzata la trappola dell'ordine dei  $10^{-11}$  Torr. Per questo motivo, nel nostro apparato viene utilizzato un sistema a doppia MOT: nella prima (sez. 3.1.2), dove la pressione è  $10^{-9}$  Torr, vengono raccolti e preraffreddati gli atomi; questi vengono poi inviati in una seconda cella tramite una guida magnetica (sez. 3.1.5), che ha anche il compito di mantenere un vuoto differenziale tra le due regioni: in prossimità della prima cella è situata una pompa ionica, mentre il vuoto nella seconda è mantenuto da una pompa ionica e da una pompa a sublimazione di titanio. Nella seconda cella, la pressione è così bassa da permettere il buon funzionamento di una trappola puramente magnetica ( $10^{-11}$  Torr), che ha una vita media di  $\simeq 100$  s. Di seguito sono riportati i principi di funzionamento di ognuna delle fasi.

### 3.1.1 Intrappolamento magneto-ottico (MOT)

Il compito da assolvere per raggiungere il regime di degenerazione quantistica di una nuvola atomica è quello di incrementare la sua densità nello spazio delle fasi (vd. sez. 1.2). Il primo stadio di questo processo, come già detto, è l'intrappolamento magneto-ottico.

La MOT viene realizzata mediante una combinazione di tre coppie di fasci laser, ortogonali tra loro, che si intersecano nel punto in cui si trova lo zero di un campo magnetico quadrupolare, generato da due bobine in configurazione antiHelmholtz. I fasci che costituiscono ogni coppia sono contropropaganti, ed hanno polarizzazione circolare opposta e detuning rosso (vd. sez. 2.1)

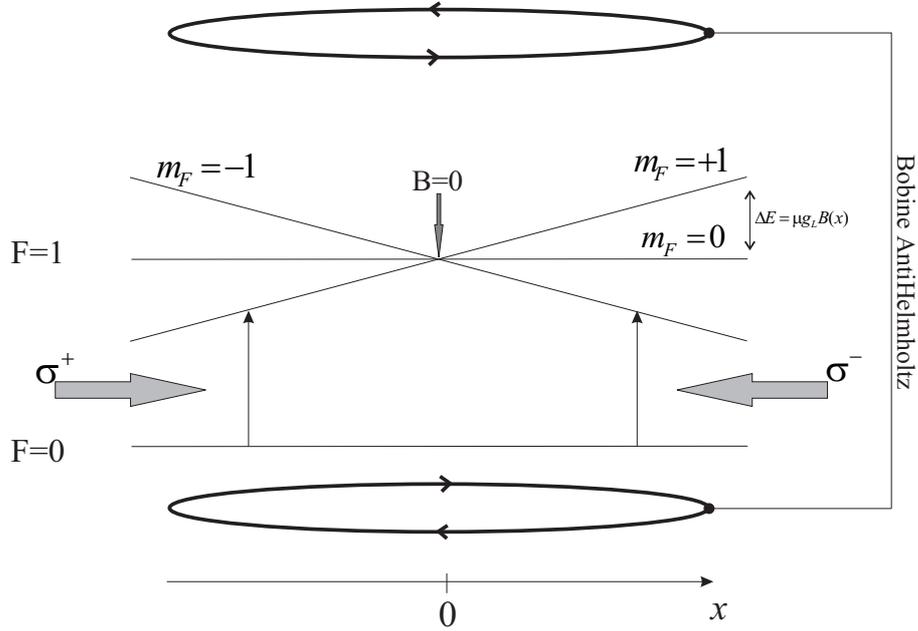


Figura 3.1: Schema di funzionamento di una MOT nel caso semplice di un atomo a due livelli il cui stato fondamentale abbia momento angolare iperfine  $F = 0$ . Lo spostamento Zeeman  $\Delta E = \mu_B g_L m_F B(x)$  dipende dalla distanza dal centro della trappola a causa dell'anisotropia del campo magnetico quadrupolare generato dalle due bobine in configurazione antiHelmholtz. Per un atomo l'effetto risultante è quello di essere rallentato e richiamato da una forza di tipo armonico verso il minimo di campo magnetico, mentre la distribuzione in velocità subisce una compressione e la temperatura del campione diminuisce .

rispetto alla transizione atomica. Consideriamo la figura 3.1, e prendiamo un atomo che si muove verso sinistra (per  $x < 0$ ) con una certa velocità  $v$ ; a causa dell'effetto Doppler, questo assorbirà preferenzialmente fotoni provenienti dal fascio con polarizzazione  $\sigma^+$  che si propaga in direzione opposta a quella in cui si sta muovendo. In virtù di questo processo, l'atomo verrà portato nel livello  $m_F = +1$ , e subirà una variazione della propria quantità di moto che tenderà a rallentarlo. Viceversa, se un atomo si muove verso destra, i fotoni assorbiti apparterranno al fascio con polarizzazione  $\sigma^-$  e l'effetto

sarà ancora un rallentamento. Una volta invertito il moto e oltrepassato lo zero di campo, l'atomo tornerà di nuovo ad assorbire fotoni dell'altro fascio. Poiché la direzione dell'emissione spontanea dei fotoni assorbiti è casuale, e in media nel tempo non porta a uno spostamento dell'atomo, l'effetto netto di tale processo è non solo un raffreddamento del gas dovuto all'interazione con la radiazione (come del resto si ha nelle cosiddette *melasse ottiche*), ma una consistente forza di richiamo armonica, in un intorno del minimo di campo magnetico, che tende a confinare gli atomi in una limitata regione di spazio, con dimensioni variabili da qualche centinaio di  $\mu\text{m}$  a qualche mm a seconda dell'intensità del campo magnetico e dei laser utilizzati.

Le temperature che si possono raggiungere con tecniche di raffreddamento sub-Doppler [32, 33, 34] sono limitate dalla presenza di scattering di fotoni da parte degli atomi, ed il limite inferiore è rappresentato dalla temperatura di rinculo (eq. 2.10). Come vedremo più avanti, dispositivi che utilizzino il solo confinamento magnetico permettono di raggiungere temperature più basse anche di qualche ordine di grandezza rispetto a quelle ottenibili con le MOT.

### 3.1.2 La prima MOT

La prima MOT ha lo scopo di intrappolare e raffreddare il massimo numero di atomi a partire dalla pressione di vapore saturo di un campione solido di  $^{87}\text{Rb}$ , il cui schema dei livelli è riportato in fig. 3.2.

I tre fasci (ognuno dei quali viene retroriflesso mediante uno specchio) hanno un diametro approssimativo  $D = 2$  cm, che aiuta nella collezione di un grande numero di atomi nella zona di intersezione. La potenza totale dei fasci di raffreddamento è circa 60 mW, accordati  $2\Gamma$  sotto la transizione  $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$  ( $\Gamma$  è la larghezza naturale di riga del  $^{87}\text{Rb}$  e vale

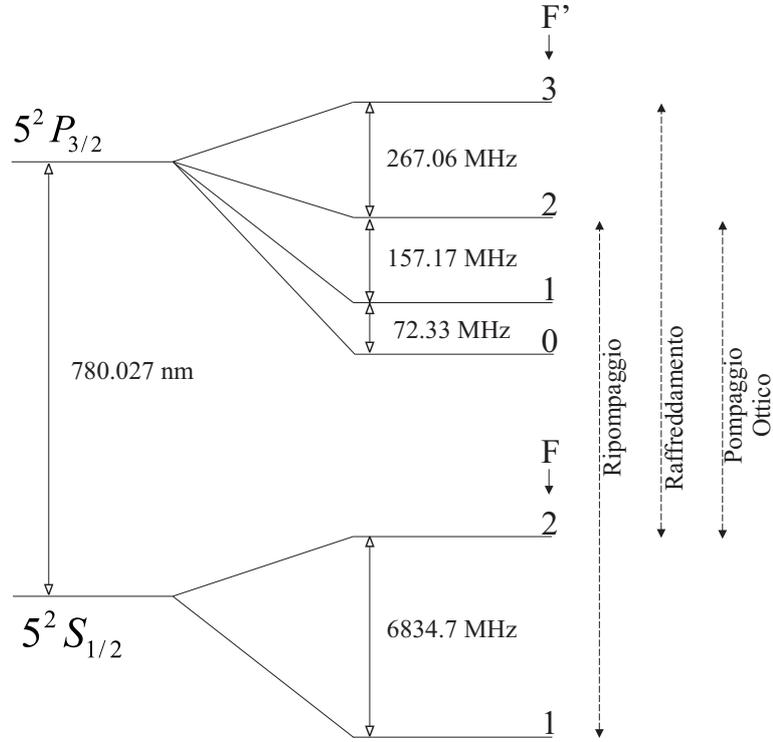


Figura 3.2: Schema dei sottolivelli iperfini della transizione  $D_2$  a  $\simeq 780$  nm del  $^{87}\text{Rb}$ , utilizzata per il raffreddamento laser.

6 MHz). Nonostante le regole di selezione di dipolo elettrico impediscano il rilassamento  $|F' = 3\rangle \rightarrow |F = 1\rangle$  (vedi fig. 3.2), il livello fondamentale  $|F = 2\rangle$  utilizzato nel ciclo di raffreddamento verrebbe rapidamente spopolato a causa delle transizioni di ordine superiore e il raffreddamento stesso inibito. Per evitare questo ai fasci di MOT ne viene sovrapposto un altro, detto di ripompaggio, delle stesse dimensioni e di potenza 3 mW, risonante con la transizione  $|F = 1\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$ , che ripopola durante questa fase il livello  $|F = 2\rangle$  mediante il rilassamento  $|F' = 2\rangle \rightarrow |F = 2\rangle$ .

Le bobine di quadrupolo della prima MOT sono realizzate avvolgendo del semplice filo di rame ( $\varnothing = 0.8$  mm) attorno ad un supporto di alluminio raffreddato per contatto termico con un circuito di raffreddamento ad acqua.

Sono percorse da una corrente di circa 4 A fornita da un alimentatore stabilizzato. Il campo che si ottiene ha un gradiente, nell'intorno del suo minimo, pari a 7 Gauss/cm. La presenza di campi magnetici spurî quali quello terrestre e quello generato dalle pompe ioniche è controbilanciata da tre bobine di compensazione, tra loro ortogonali, in cui scorre una corrente che, a regime, non supera 1 A. La prima MOT è in grado di raccogliere e raffreddare circa  $10^{10}$  atomi a temperature di circa 100  $\mu\text{K}$  e densità di  $10^9 \text{ cm}^{-3}$ .

### 3.1.3 La seconda MOT

La MOT2 viene realizzata nella cella in cui si raggiunge la pressione più bassa ( $10^{-11}$  Torr). Stavolta il ciclo di raffreddamento utilizza sei fasci indipendenti per ridurre eventuali sbilanciamenti in potenza dovuti alla retro-riflessione. Con questa configurazione si ha anche un miglior controllo sulla polarizzazione di ognuno dei fasci, necessario all'ottimizzazione del processo sub-Doppler che permette di raggiungere temperature di qualche decina di  $\mu\text{K}$ . Ognuno dei fasci ha una potenza di circa 10 mW, una sezione di circa 2 cm, e polarizzazione circolare che viene regolata da lamine  $\lambda/4$ .

Il campo di quadrupolo necessario al funzionamento della MOT2 è creato da una coppia di bobine ( $Q_1$  e  $Q_2$  in fig. 3.5) che contribuiscono anche alla fase di trappola magnetostatica utilizzata nella successiva fase di raffreddamento evaporativo. Il gradiente del campo generato risulta di 7 Gauss/cm, mentre le temperature sono appena più basse di quelle raggiunte nella MOT1. Poichè il successivo trasferimento degli atomi nella trappola puramente magnetica è un punto cruciale del processo, e la sua ottimizzazione è lo scopo principale della seconda MOT, stavolta il set di bobine di compensazione è composto da tre coppie, ciascuna delle quali in configurazione di Helmholtz. Variando opportunamente il valore della corrente possiamo sia cor-

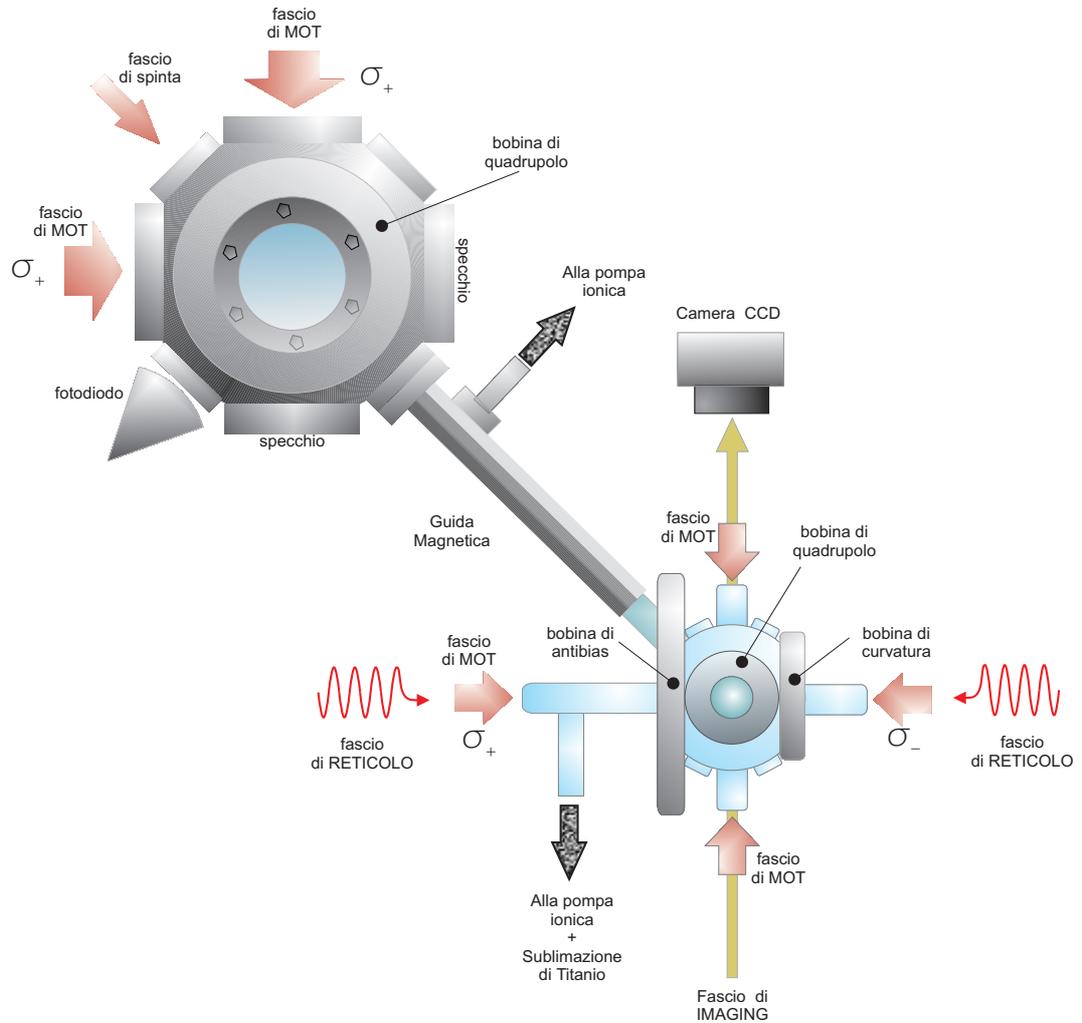


Figura 3.3: Rappresentazione delle due celle in cui si realizzano le MOT. Sulla sinistra si ha la prima MOT, in cui gli atomi vengono raffreddati e dalla quale sono inviati attraverso la guida magnetica nella seconda MOT. Qui possono essere poi trasferiti nella trappola puramente magnetica all'interno della quale può essere portato a termine il raffreddamento evaporativo. In figura non sono rappresentate le bobine di compensazione delle due MOT.

reggere anomalie del campo magnetico derivanti dall'esterno, sia ottimizzare il trasferimento della nuvola atomica fredda all'accensione della trappola magnetica.

### 3.1.4 Il sistema di vuoto differenziale

Di fondamentale importanza in esperimenti come quello da noi realizzato è l'apparato con cui si crea il vuoto all'interno delle celle nelle quali vengono poi raccolti gli atomi. Il raffreddamento degli atomi senza un adeguato regime di bassa pressione porterebbe ad un tasso di perdite dalle trappole che impedirebbe l'insorgenza della degenerazione quantistica nel sistema atomico. Come già accennato, questo è il motivo per cui il nostro apparato prevede la presenza di un sistema di vuoto differenziale tra le due celle. Come indicato in figura 3.3, in prossimità della prima cella è situata una pompa ionica da 25 l/s (Varian VacIon Plus 2), mentre nella seconda cella il vuoto è mantenuto da una pompa ionica da 55 l/s (Varian VacIon Plus 55) ed una pompa a sublimazione di titanio (Varian 916-0017). Le due celle sono connesse da un tubo metallico lungo circa 40 cm e con una sezione di 11 mm che consente di mantenere il regime di vuoto differenziale. Infatti, nel caso la pressione sia sufficientemente bassa, la conduttanza di flusso di un tubo sottile segue la legge

$$C = \left(\frac{d^3}{L}\right) \cdot 12.1 \text{ l/s}, \quad (3.1)$$

dove  $d$  è la sezione del tubo e  $L$  la sua lunghezza. Nel nostro caso la pressione risulta  $10^{-9}$  Torr per la prima MOT e  $10^{-11}$  Torr per la seconda.

### 3.1.5 Il trasferimento degli atomi dalla MOT1 alla MOT2

Il sistema a doppia MOT necessita di una procedura efficiente di trasferimento degli atomi dalla prima alla seconda cella. Nel nostro caso viene

utilizzato uno schema di trasferimento impulsato: la MOT1 viene caricata per 225 ms dalla pressione di vapore del campione, quindi i fasci ed il campo magnetico che generano la trappola vengono spenti, mentre un fascio detunato di  $\Gamma$  (6 MHz) sotto la transizione di raffreddamento, allineato lungo il tubo di trasferimento, colpisce la nuvola atomica che si trova nella prima cella, imprimendo agli atomi un impulso in direzione della seconda MOT. La durata di tale impulso luminoso di spinta è 2.5 ms, mentre la potenza è di 4 mW; gli atomi trasferiti nella seconda cella vengono raccolti dalla MOT2. Tale ciclo di carica della MOT1 e trasferimento degli atomi viene ripetuto per circa 200 volte fino ad ottenere nella MOT2 un numero di atomi sufficiente ( $10^9$ ) alla successiva fase di evaporazione. Per ottimizzare l'efficienza di trasferimento, attorno al tubo metallico vengono poste delle strisce di materiale magnetico che realizzano un campo esapolare il cui minimo coincide con l'asse del tubo. Il fascio di spinta ha polarizzazione circolare, in modo tale da pompare otticamente gli atomi nel livello  $|F = 2, m_F = 2\rangle$ ; in virtù del fattore di Landé positivo questi tenderanno a seguire la guida magnetica lungo la linea di campo minimo anche qualora vi siano piccole deviazioni dalla traiettoria ideale che congiunge le due celle.

### 3.1.6 Le sorgenti laser

Come abbiamo visto nelle precedenti sezioni, l'intrappolamento ed il pre-raffreddamento degli atomi richiede l'utilizzo di un notevole numero di fasci laser accordati intorno alla transizione  $D_2$  del  $^{87}\text{Rb}$  di cui si devono poter controllare intensità e frequenza. Nel caso del nostro esperimento, tuttavia, sono sufficienti due diodi laser, uno dei quali amplificato in intensità grazie ad un amplificatore a stato solido. Entrambi i diodi sono montati in cavità estesa [35] per migliorare le caratteristiche spettrali dell'emissione.

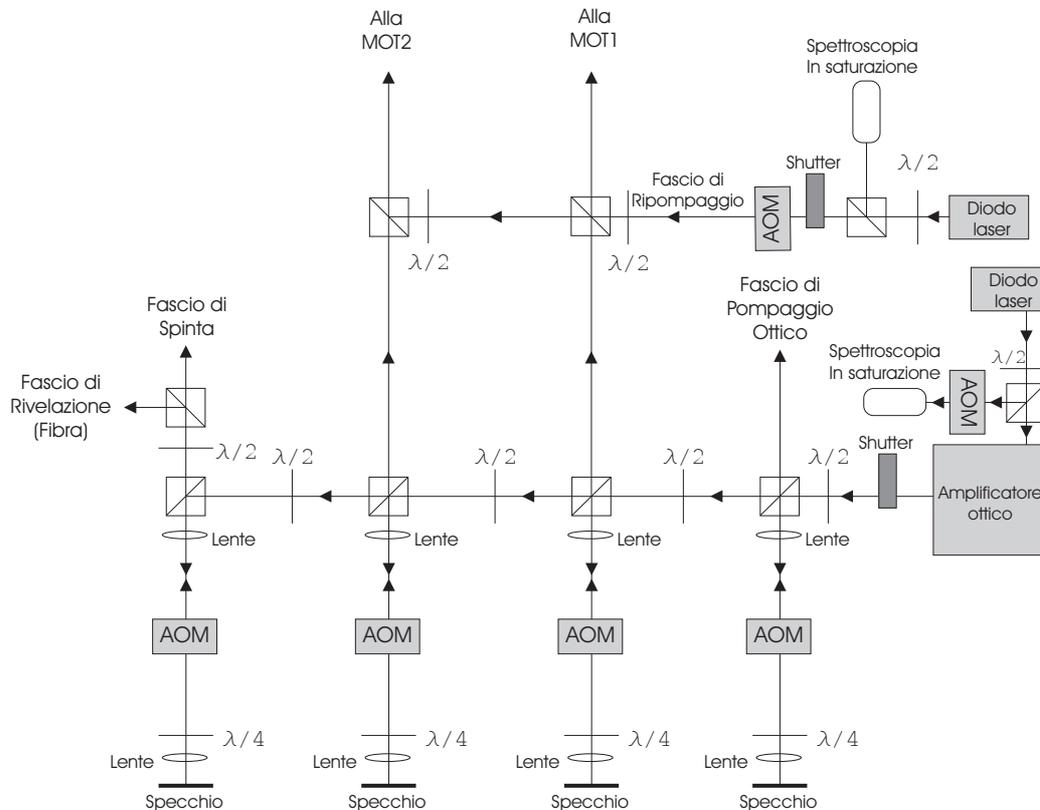


Figura 3.4: Schema delle sorgenti laser utilizzate e della successiva bancata di AOM che permettono di regolare opportunamente la frequenza dei singoli fasci. La serie di cubi polarizzatori e lamine  $\lambda/2$  permette anche di regolare la loro intensità relativa.

Il diodo che fornisce la luce di ripompaggio (Toptica Photonics SDL-5401-G1) ha una corrente operativa di 77 mA e potenza d'uscita di 20 mW. Parte della luce emessa viene utilizzata per la spettroscopia in saturazione necessaria all'aggancio in frequenza del laser. Il laser principale, invece, è un Sanyo DL7-140, con una corrente operativa di 100 mA. La potenza di 80 mW non è sufficiente a generare tutti i fasci necessari al funzionamento dell'apparato, e richiede l'utilizzo di un amplificatore a stato solido. Nell'esperimento viene utilizzato un Toptica Photonics Tapered Amplifier TA 100 con corrente ope-

rativa di 1.30 A che, iniettato dalla luce del diodo laser, fornisce circa 650 mW in uscita. Parte del fascio in ingresso viene utilizzata per l'aggancio in frequenza della sorgente.

Il fascio in uscita viene suddiviso in 4 parti da una serie di cubi polarizzatori e lamine  $\lambda/2$  (vedi fig. 3.4). Ognuno dei fasci attraversa in doppio passo un modulatore acustoottico che ne sposta la frequenza di un valore opportuno a seconda del ruolo che questo dovrà avere nella fase di raffreddamento e in quella di rivelazione degli atomi. Gli AOM sono nel fuoco di un sistema ottico a doppia lente che permette la focalizzazione del raggio al loro interno. Il primo ramo produce il fascio che, come vedremo nella sez. 3.1.7, ha il compito di pompare otticamente gli atomi da caricare nella trappola magnetica nello stato iperfine desiderato.

Il ramo successivo fissa la frequenza ed intensità del fascio utilizzato nella MOT1 per raffreddare gli atomi. A questo, prima della cella, verrà sovrapposto il fascio di ripompaggio proveniente dall'altro laser a diodo.

La terza bancata produce invece la luce di raffreddamento della MOT2. Analogamente al caso precedente l'ultima parte di cammino ottico coinciderà con quella del fascio di ripompaggio.

Infine, il quarto AOM produce un fascio che viene successivamente suddiviso in due parti, utilizzate una per il trasferimento degli atomi dalla prima alla seconda MOT e una per la rivelazione degli atomi a seguito del processo di condensazione.

### **3.1.7 La fase di MOT compressa e melassa ottica**

Prima del trasferimento degli atomi nella trappola magnetica si rende necessario un ulteriore aumento della densità nello spazio delle fasi della nuvola atomica. Generalmente, l'ultimo passo del raffreddamento laser consiste in

una breve fase di MOT compressa [36] seguita da una di melassa ottica [37]. Nel nostro caso, però, tale incremento risulta in un riscaldamento eccessivo del campione atomico. Pertanto la frequenza dei laser di raffreddamento, anziché essere avvicinata a quella di transizione, viene portata a 20 MHz dalla risonanza, mentre il fascio di ripompaggio e il gradiente di campo magnetico vengono diminuiti in intensità. Il processo ha la durata di 20 ms. A questo punto la temperatura subisce un'ulteriore diminuzione grazie ad una breve fase di melassa ottica. Il campo magnetico viene gradualmente portato a zero, e la frequenza dei fasci diminuita fino a 36 MHz sotto la risonanza. La temperatura raggiungibile tramite una melassa in regime sub-Doppler è proporzionale a  $I/\Delta$ , dove  $I$  è l'intensità dei fasci e  $\Delta$  il loro detuning rispetto alla transizione. Questo processo combinato ci permette di raggiungere temperature dell'ordine dei  $50 \mu\text{K}$  e densità nello spazio delle fasi pari a  $10^{-7}$ .

### 3.1.8 La trappola magnetica

Una volta raggiunte le condizioni ottimali, gli atomi vengono trasferiti nella trappola puramente magnetica.

Questo dispositivo sfrutta esclusivamente l'interazione del dipolo magnetico intrinseco  $\boldsymbol{\mu}$  di un atomo con un campo magnetico  $\mathbf{B}$  esterno. L'energia di interazione

$$U(\mathbf{r}) = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}), \quad (3.2)$$

nel caso le variazioni temporali del campo siano sufficientemente lente da permettere al dipolo magnetico dell'atomo di seguirle, può essere riscritta in termini della proiezione del momento lungo l'asse  $x$  di quantizzazione:

$$U(x) = \mu_B g_F m_F |B(x)|, \quad (3.3)$$

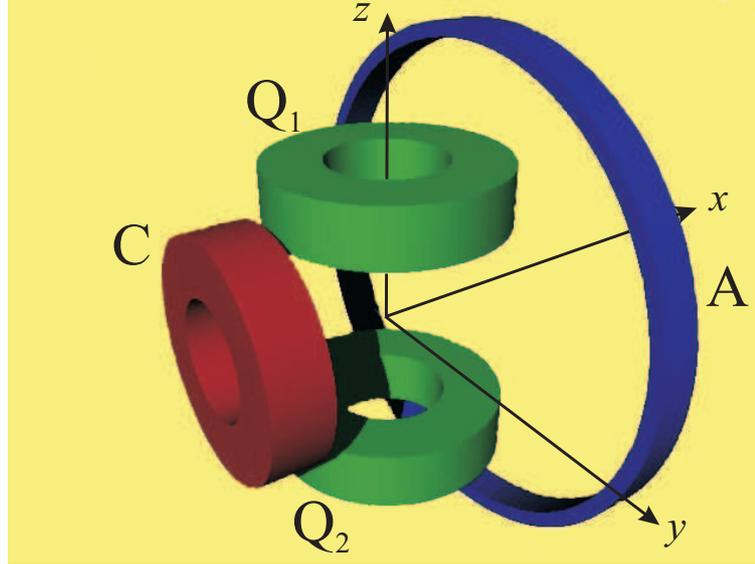


Figura 3.5: Schema della trappola magnetica utilizzata nell'esperimento. Il campo di quadrupolo utilizzato durante la fase di MOT si realizza attivando le sole bobine  $Q_1$  e  $Q_2$ . La bobina C viene utilizzata durante la fase di intrappolamento puramente magnetico per variare la curvatura del campo, mentre la bobina A, avendo dimensioni molto maggiori, fornisce un campo di fondo lungo l'asse (costante in un'ampia regione attorno al minimo) e influenza la sola frequenza radiale. In figura non sono rappresentate le bobine di compensazione.

dove  $\mu_B$  è il magnetone di Bohr,  $m_F$  la proiezione del momento angolare totale lungo l'asse di quantizzazione e  $g_F$  il fattore di Landé iperfine, che, nel caso degli stati  $F = 1$  e  $F = 2$  del livello fondamentale del rubidio vale rispettivamente  $-1/2$  e  $+1/2$ . Pertanto, gli stati intrappolabili in un minimo di capo magnetico risultano  $|F = 1, m_F = -1\rangle$  e  $|F = 2, m_F = 1, 2\rangle$ , ed il primo è quello scelto per gli esperimenti mostrati nel cap. 4.

La trappola che viene utilizzata è una Ioffe-Pritchard [38] realizzata tramite due bobine coassiali di 15 spire l'una (vedi fig. 3.5, bobine  $Q_1$  e  $Q_2$ ) in configurazione antiHelmholtz, al cui campo si somma quello generato da altre due bobine posizionate ortogonalmente. La prima (C), identica alle prece-

denti, curva il campo di quadrupolo in modo da fornire la corretta intensità di confinamento, mentre la bobina  $A$  ha un diametro di 12 cm, molto maggiore di quello delle altre (6 cm). Questa caratteristica permette di variare il valore minimo del campo ( $B_0$ ) tramite l'introduzione di una correzione praticamente costante lungo l'asse  $x$  in un intorno del minimo. Questa, oltre ad aumentare il confinamento ortogonale a tale asse, allontana da zero il campo nei pressi del minimo stesso. Tale proprietà risulta importante allo scopo di evitare perdite di atomi causate dai ribaltamenti di spin di Majorana, che avvengono principalmente intorno ad uno zero di campo magnetico [39]: qui, infatti, la condizione di adiabaticità, che impone di confrontare la frequenza di Larmor dell'atomo immerso nel campo con la frequenza di confinamento armonico della trappola, è praticamente impossibile da rispettare [28].

Il potenziale di confinamento che si ottiene ha una simmetria cilindrica rispetto all'asse  $x$  e un andamento quadratico lungo ogni direzione in un intorno del minimo. Il campo generato dalle quattro bobine può essere sviluppato in serie di potenze nella distanza dal centro dalla trappola [27]. In coordinate cilindriche le componenti di  $\mathbf{B}$  sono:

$$\begin{aligned} B_{\perp} &= \frac{B'^2}{B_0} \rho^2 & (\rho = \sqrt{y^2 + z^2}) \\ B_x &= B_0 + \frac{1}{2} B'' x^2, \end{aligned} \quad (3.4)$$

dove  $B'$  e  $B''$  sono i coefficienti al primo e al secondo ordine dello sviluppo del campo magnetico generato dalla bobina di curvatura lungo l'asse  $x$ , mentre  $B_0$  è il valore che il campo assume nel suo minimo. Il potenziale risultante che agisce sugli atomi ha pertanto l'espressione:

$$U(x, \rho) = \frac{1}{2} \mu \left( \frac{B'^2}{B_0} \rho^2 + B'' x^2 \right) = \frac{1}{2} m \left( \omega_{\perp}^2 \rho^2 + \omega_x^2 x^2 \right), \quad (3.5)$$

e le frequenze di trappola risulteranno:

$$\begin{aligned}\nu_{\perp} &= \frac{1}{2\pi}\omega_{\perp} \simeq \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{m} \frac{B'^2}{B_0}} \\ \nu_x &= \frac{1}{2\pi}\omega_x = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{m} B''},\end{aligned}\tag{3.6}$$

che nel caso del nostro esperimento, quando a regime scorre una corrente di 240 A, valgono rispettivamente 92 e 9 Hz. La profondità della buca di potenziale in queste condizioni risulta circa 5 mK, ed il campo di fondo  $B_0 = 1.7$  G.

Il pregio di questa configurazione è che lo stesso dispositivo può essere utilizzato sia durante la fase di MOT, utilizzando le sole bobine di quadrupolo in regime di corrente ridotta (15 A), che durante la fase di intrappolamento magnetico. La corrente è fornita da un generatore Hewlett-Packard 6681A controllato via GPIB e viene adeguatamente ripartita tra le varie bobine tramite quattro serie di transistor MOSFET da alta potenza i cui gates sono regolati in tensione dall'esterno. Il passaggio dalla fase di MOT a quella di trappola Ioffe-Pritchard è ottenuto incrementando in maniera graduale la corrente circolante nel circuito, dal momento che i centri delle due trappole distano di circa 6 mm: una variazione troppo brusca nella forma del potenziale porterebbe ad oscillazioni indesiderate del campione atomico.

### 3.1.9 Pompaggio ottico e raffreddamento evaporativo

Come già accennato in precedenza, nel nostro esperimento lo stato Zeeman scelto per l'intrappolamento è il  $|F = 1, m_F = -1\rangle$ . Dopo la fase di MOT, a causa del particolare ordine nello spegnimento dei fasci, gli atomi sono distribuiti su tutti i possibili stati iperfini del fondamentale  $F = 2$ . Per questo motivo si rende necessario un pompaggio ottico delle popolazioni nel livello selezionato. Per fare questo prima viene creato un asse di

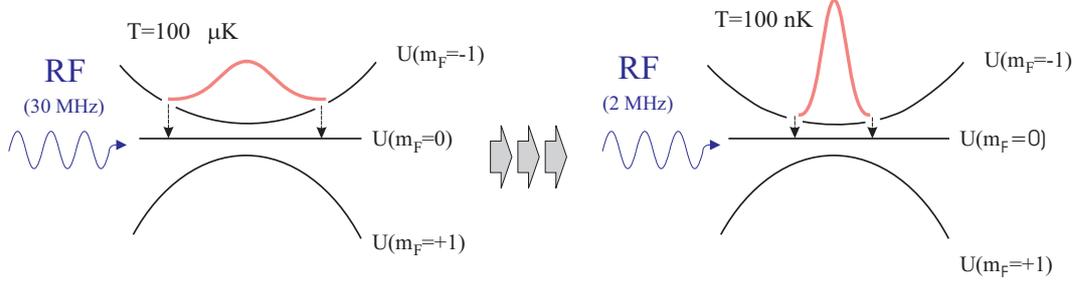


Figura 3.6: Schema di funzionamento del raffreddamento evaporativo. Sulla sinistra è rappresentata la fase iniziale ( $\nu_{RF} = 30$  MHz) che si ha subito dopo quella di MOT, mentre sulla destra la fase finale ( $\nu_{RF} = 2$  MHz) che porta alla condensazione del campione atomico. Gli atomi che si trovano nella coda della distribuzione vengono trasferiti dall'onda RF nello stato libero  $m_F = 0$  e lasciano la trappola magnetica.

quantizzazione lungo l'asse di simmetria della trappola con un campo magnetico generato dalle bobine di compensazione della MOT2; successivamente il campione viene illuminato per  $100 \mu s$  da un fascio con polarizzazione  $\sigma^-$  proveniente dal laser principale (vd. sez. 3.1.6), risonante con la transizione  $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$ . In questo modo siamo in grado di trasferire gran parte della popolazione nello stato di interesse a scapito di quella degli altri livelli iperfini. A questo punto tutto è pronto per l'inizio del raffreddamento evaporativo.

Un'onda a radiofrequenza emessa da un'antenna circolare con 10 avvolgimenti ( $\varnothing = 1$  in) va ad investire gli atomi intrappolati. Nel nostro apparato l'antenna RF è alimentata da un sintetizzatore da 30 MHz della Stanford Research (SR DS345), la cui frequenza è impostabile tramite una connessione GPIB direttamente durante la fase evaporativa. La radiazione accoppia per dipolo magnetico il livello  $|F = 1, m_F = -1\rangle$  a quello libero  $|F = 1, m_F = 0\rangle$  e successivamente a quello respinto dal campo di trappola. Poiché la differenza in energia tra i livelli in questione dipende dalla distanza rispetto al

minimo di campo magnetico (vedi fig. 3.6), e considerato che gli atomi più "caldi" tenderanno ad essere in media più lontani dal centro della trappola, tale metodo di espulsione è selettivo in temperatura. Per una certa frequenza  $\nu$  della radiazione, infatti, la sola classe di atomi interessata alla transizione  $m_F = -1 \rightarrow m_F = 0$  deve sottostare alla condizione:

$$h\nu = \frac{\mu_B B(x)}{2} = \frac{1}{2}k_B T; \quad (3.7)$$

partendo da una radiofrequenza di 30 MHz, corrispondente a 3 mK, e riducendone gradualmente il valore possiamo rimuovere progressivamente dalla trappola gli atomi più caldi. In realtà la temperatura che si ha dopo la fase di MOT compressa e di melassa è dell'ordine di 10  $\mu\text{K}$ , ma si può dimostrare che per la buona riuscita di questa fase la frequenza di partenza deve corrispondere a una temperatura di circa un ordine di grandezza più elevata di quella reale. Se la velocità con cui viene ridotta la frequenza permette la termalizzazione del campione, si potrà assistere ad una progressiva diminuzione della temperatura. I due parametri critici per la buona riuscita di questa fase sono la vita media  $\tau$  dell'intrappolamento magnetico e il tasso di collisione elastica  $\gamma_{el}$  che regola la velocità di termalizzazione di un campione atomico gassoso. Si può stimare [31] che buoni valori di partenza per tali grandezze devono soddisfare la relazione

$$\gamma_{el}\tau \gtrsim 200; \quad (3.8)$$

inoltre, poiché il tasso di collisione elastica varia con la temperatura e con la densità, dovremo realizzare la condizione sperimentale di "runaway" dell'evaporazione: il tasso non deve diminuire durante il processo. Nel nostro sistema ciò è ottenuto scegliendo 30 MHz come valore della radiofrequenza iniziale; in 10 secondi, poi questa è portata al valore di 8 MHz secondo una rampa logaritmica, che poi diviene lineare fino ai 2.3 MHz raggiunti nei successivi

15 secondi. L'ultima parte, sempre lineare, porta in 10 s la radiofrequenza al valore di taglio di circa 2 MHz, che determina la temperatura finale del campione atomico: se questa è sufficientemente bassa e la densità atomica sufficientemente elevata il sistema degenera fino alla condensazione di Bose-Einstein. I condensati che otteniamo, quando la frazione termica non è più distinguibile, sono costituiti da un numero di atomi che varia da  $1 \times 10^5$  a  $3 \times 10^5$ .

### 3.1.10 Il sistema di rivelazione

Una volta realizzato il condensato di Bose-Einstein si pone il problema della sua osservazione. La tecnica seguita nel nostro esperimento è quella della rivelazione (*imaging*) del campione in assorbimento.

Il campione atomico, che dopo la fase di raffreddamento evaporativo si trova nello stato  $|F = 1, m_F = -1\rangle$ , viene dapprima portato nello stato con  $F = 2$  per mezzo di un impulso di luce di ripompaggio (vd. sez. 3.1.6) della durata di 50  $\mu\text{s}$ . Successivamente, un fascio collimato di debole potenza ( $\simeq 200 \mu\text{W}$ ), risonante con la transizione  $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$ , investe gli atomi per 150  $\mu\text{s}$ . La parte di fascio che incontra sul proprio cammino ottico il condensato viene assorbita, e si crea un'*ombra* all'interno del profilo di intensità del fascio laser. Dopo aver attraversato un telescopio che fornisce un ingrandimento nominale pari a 5, il fascio viene raccolto da una telecamera CCD Princeton Instruments TE/CCD-512SB ( $512 \times 512$  pixels di  $24 \times 24 \mu\text{m}^2$  ciascuno). La prima lente del telescopio di ingrandimento ( $f = 60 \text{ mm}$ ) limita la risoluzione reale del nostro sistema ottico a 7  $\mu\text{m}$ . Misure sul condensato in caduta libera forniscono un coefficiente di ingrandimento reale pari a  $(5.4 \pm 1)$ .

Le informazioni sui parametri di nostro interesse (numero di atomi, tempera-

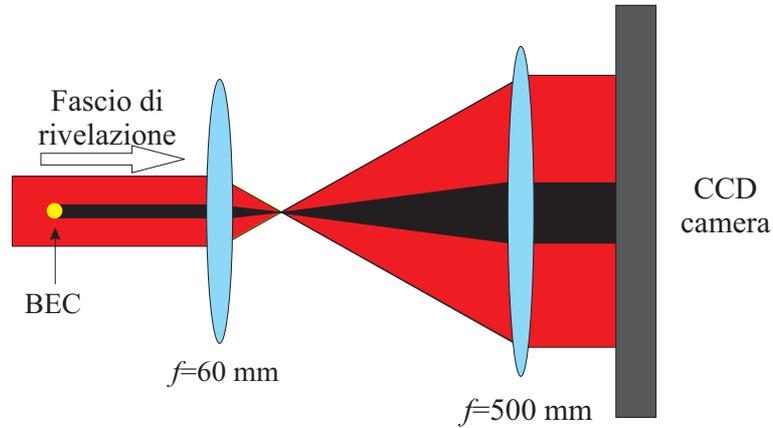


Figura 3.7: Schema del sistema ottico di ingrandimento e rivelazione. La telecamera CCD registra il profilo di intensità del fascio di indagine dopo che questo è stato in parte assorbito dal condensato. L'ingrandimento effettivo del sistema è pari a  $(5.4 \pm 0.1)$ .

tura, distribuzione di velocità e dimensioni del condensato) vengono ricavate indirettamente a partire dalle immagini raccolte misurando la *densità ottica* della nuvola atomica e la sua estensione. Per ogni ciclo di condensazione vengono acquisite tre immagini del profilo di intensità del fascio:

- $I_{\text{atomi}}$ : sono presenti atomi e fascio di rivelazione, ed il condensato viene distrutto dall'impulso luminoso risonante.
- $I_{\text{laser}}$ : viene raccolta l'intensità del solo fascio di rivelazione in assenza di atomi.
- $I_{\text{buio}}$ : una volta spento il fascio di rivelazione viene misurata l'intensità residua dovuta alle sorgenti di luce esterne a 780 nm.

Le variazioni nell'intensità di fondo e quelle nella stessa intensità del laser rendono impossibile l'utilizzo della sola immagine che dà  $I_{\text{atomi}}$ . La densità

ottica viene pertanto ottenuta come:

$$O.D. = \ln \left| \frac{I_{atomi} - I_{buio}}{I_{laser} - I_{buio}} \right|. \quad (3.9)$$

Questo valore viene calcolato per ognuno dei 262144 pixel, dopodiché viene eseguito un fit bidimensionale della distribuzione di densità così ottenuta, con funzioni distinte a seconda che la nube atomica sia condensata o meno (vd. sez. 1.3.3). I parametri di fit che vengono ricavati sono la densità ottica, le coordinate del centro di massa della nuvola, le larghezze  $\sigma_{x,\perp}$  della distribuzione (dalla quale si ottengono le dimensioni assiale e radiale della nuvola), ed il numero di atomi  $N$ . L'estensione spaziale di una nube termica permette di ricavare anche la sua temperatura tramite la relazione  $\frac{1}{2}m\omega^2\sigma^2 = \frac{1}{2}k_B T$ . Nel caso di nube parzialmente condensata, generalmente detta *mista*, si utilizza una distribuzione bimodale, somma pesata di una funzione gaussiana e di una parabola invertita (distribuzione di Thomas-Fermi). Per una trattazione estesa della relazione tra densità ottica misurata e parametri di interesse

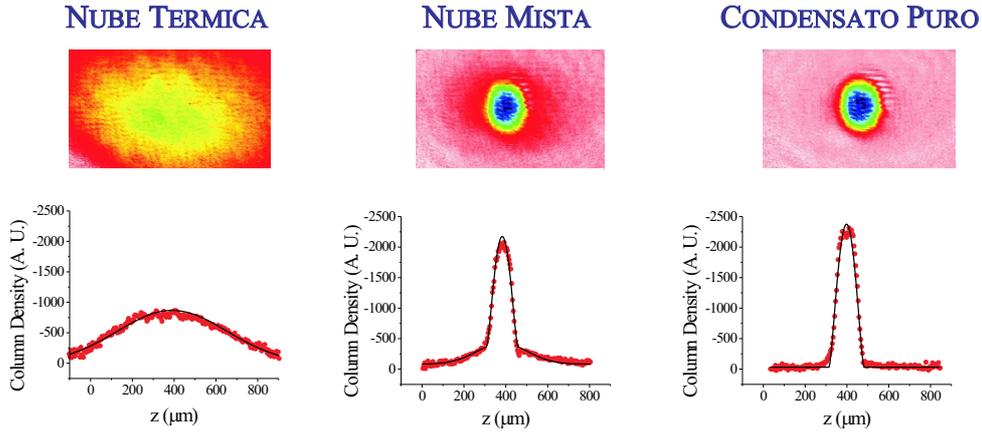


Figura 3.8: Immagini raccolte dopo 28 ms di espansione dal potenziale di confinamento per diversi valori della temperatura del campione atomico e relativi fits. Si noti la bimodalità della funzione utilizzata per fittare la nube mista (immagine centrale).

rimandiamo a [40]. In figura 3.8 riportiamo tre immagini in assorbimento, ed i rispettivi fit, di una nuvola atomica per tre diverse temperature: sulla sinistra si ha una nube termica, al centro una nube mista e sulla destra un condensato puro. Nei tre casi si sono utilizzate tre distinte funzioni di fit per la distribuzione, rispettivamente gaussiana, bimodale e Thomas-Fermi.

## 3.2 Il reticolo ottico mobile

In questa sezione è descritta la parte di apparato sperimentale progettata e realizzata durante il presente lavoro di tesi, e cioè il sistema che permette la realizzazione di un reticolo ottico mobile 1-D i cui effetti sugli atomi sono descritti in via teorica nel capitolo 2.

Nel prossimo capitolo saranno riportati i risultati di un consistente numero di misure effettuate proprio grazie a questo sistema ottico.

### 3.2.1 Il principio di funzionamento

Un reticolo ottico 1-D i cui punti stazionari siano in quiete nel sistema di riferimento del laboratorio è realizzabile utilizzando un singolo fascio laser retroriflesso da uno specchio. Questa configurazione ha permesso le prime misure sull'espansione di un condensato in un reticolo ottico stazionario [41] e sull'alterazione dei modi collettivi [42]; lo studio della dinamica relativa veniva realizzato dando al condensato una velocità rispetto al sistema del reticolo, solidale a quello del laboratorio.

La realizzazione di un reticolo ottico con velocità variabile nel sistema di riferimento del laboratorio permette un controllo sulla velocità relativa molto maggiore rispetto al caso precedente, ma richiede l'utilizzo di due fasci laser indipendenti che abbiano origine da una sorgente comune (sez. 3.2.2) e una differenza in frequenza regolabile. Nella maggior parte dei nostri esperimenti

la frequenza dei fasci laser viene portata fuori risonanza rispetto alla transizione  $D_2$  per minimizzare gli effetti dovuti al riscaldamento da scattering di fotoni. Ognuno dei due fasci viene controllato in frequenza da un modulatore acustoottico (AOM). Anche se la sorgente di luce è la stessa, l'utilizzo di due modulatori acustoottici con riferimenti in frequenza distinti produrrebbe un rumore di fase i cui effetti nel riscaldamento del campione atomico (che verrebbe "scosso" all'interno del potenziale) porterebbero al suo immediato degrado. Per questo, il nostro sistema di modulazione prevede che i due *driver* (uno dei quali costruito durante il lavoro di tesi) che regolano gli AOM possano agganciarsi alla fase del segnale in ingresso generato da due sintetizzatori che utilizzano la stessa base dei tempi (vedi schema 3.9).

I fasci laser così ottenuti vengono sovrapposti lungo la direzione assiale della trappola magnetica, in modo che l'asse di simmetria del condensato coincida col loro asse di propagazione. L'oscillazione stazionaria che così si instaura costituisce il reticolo ottico mobile, la cui velocità potrà essere controllata variando opportunamente la differenza in frequenza tra i fasci.

### 3.2.2 Le sorgenti laser

La configurazione dell'apparato prevede la possibilità di utilizzare due distinte sorgenti luminose a seconda delle esigenze sperimentali.

In una prima fase dell'esperimento abbiamo utilizzato un diodo laser la cui cavità estesa è stata realizzata durante il lavoro di tesi. La cavità estesa è costituita da un reticolo di diffrazione in configurazione di Littrow, secondo la quale il primo ordine diffratto è collineare con il fascio incidente e fornisce una retroazione ottica al diodo stesso. I pregi di questa configurazione sono fondamentalmente due: si controlla la lunghezza d'onda del fascio in uscita semplicemente muovendo il reticolo di diffrazione e la lunghezza della cavità

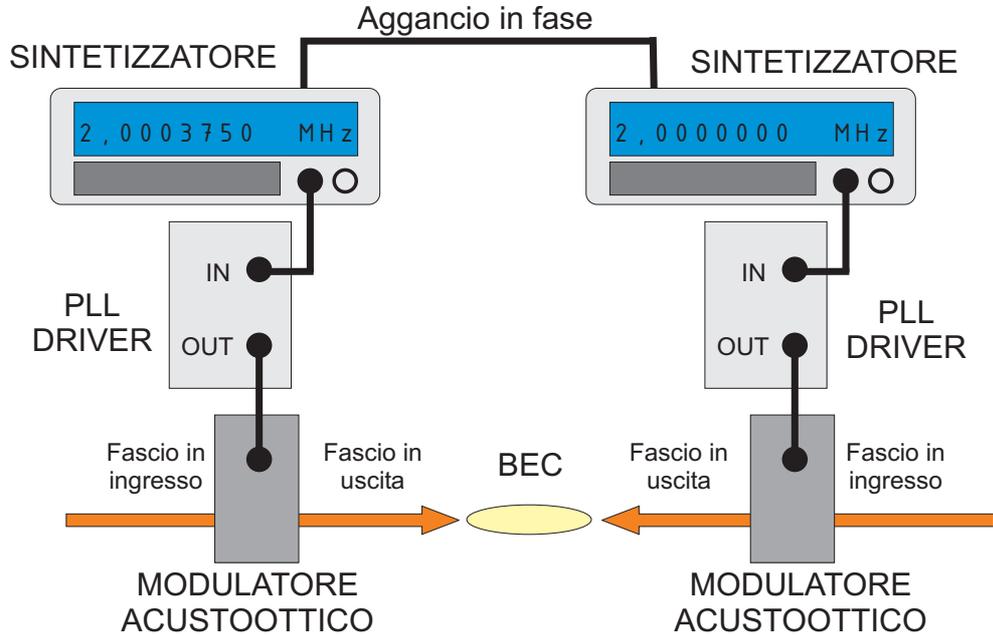


Figura 3.9: Schema dell'apparato di modulazione dei due fasci che generano il reticolo ottico. I driver che pilotano gli AOM sono dotati di aggancio in fase sul segnale proveniente da due sintetizzatori che utilizzano la stessa base dei tempi. Introducendo un opportuno *detuning* tra i sintetizzatori si dà al reticolo la velocità desiderata nel sistema del laboratorio.

esterna, e si migliora il fattore di qualità  $\Delta\nu/\nu$  di un fattore  $\simeq 100$  rispetto a quello proprio del diodo, portando la larghezza di emissione al valore  $\Delta\nu \simeq 500$  KHz. Questa caratteristica risulta utile nei casi in cui non ci si voglia allontanare troppo dalla risonanza, dove la larghezza  $\Delta\nu$  rischia di divenire confrontabile con il detuning del laser. Inoltre, la 2.5 ci dice che, per detuning dell'ordine del GHz e transizioni ottiche alcune decine di mW sono sufficienti a produrre potenziali ottici con  $s = U_{dip}/E_{Rec}$  dell'ordine dell'unità. D'altro canto dalla 2.6 risulta chiaro che non si possono raggiungere altezze superiori senza aumentare consistentemente il detuning del laser, pena un rate di scattering  $\Gamma_{sc}$  così elevato ( $\simeq 100$  Hz) da limitare in maniera compromettente la vita media del campione all'interno del reticolo ottico.

Come reticolo di diffrazione abbiamo utilizzato un Edmund da 1200 righe/mm, ottimizzato nell'ultravioletto. Ciò potrebbe sembrare contraddittorio al fatto che stiamo usando radiazione al confine con l'infrarosso; in realtà, se usassimo un reticolo ottimizzato in questa zona dello spettro, il processo di diffrazione sarebbe troppo efficace e l'ordine riallineato in cavità troppo intenso; ne risulterebbe una scarsa potenza in uscita e un danneggiamento del diodo laser stesso. Il diodo usato è un Sanyo DL7140-201 con lunghezza d'onda fuori cavità di 785 nm, corrente e potenza operative pari rispettivamente a 100 mA e 70 mW.

I pregi principali di questo tipo di sorgente sono sicuramente la sua facilità di utilizzo ed il basso costo di realizzazione, mentre i lati negativi sono la scarsa potenza in uscita e il limitato intervallo di lunghezze d'onda ( $\simeq 5$  nm) che si può coprire. Inoltre, come vedremo in seguito, i fasci devono attraversare due fibre ottiche ed il modo spaziale di uscita della sorgente diviene importante, poiché eventuali asimmetrie nel fascio limitano l'efficienza di accoppiamento in fibra. Il fascio generato da un laser a diodo ha una divergenza lungo i due assi ortogonali pari a  $7.0^\circ$  e  $17^\circ$  ed è lievemente astigmatico: anche una successiva fase di collimazione non riesce a simmetrizzarlo perfettamente.

La sorgente che invece abbiamo utilizzato nelle misure descritte nel cap. 4 è un laser commerciale con cavità ad anello il cui mezzo attivo è un cristallo di Titanio-Zaffiro (Coherent 899-21). Questo laser ha un'ampio spettro di accordabilità: a seconda delle ottiche che vengono montate all'interno della cavità la lunghezza d'onda può essere variata da 680 nm a 1025 nm, con una larghezza di riga  $\Gamma_l$  di pochi MHz. Nel nostro range di utilizzo ( $760 \div 780$  nm) la potenza massima fornita è 600 mW. L'elevata potenza a disposizione ci permette, a parità di  $s$ , di mantenere un rate di scattering molto più basso di quello che si ha utilizzando il laser a diodo (vd. sez. 2.1).

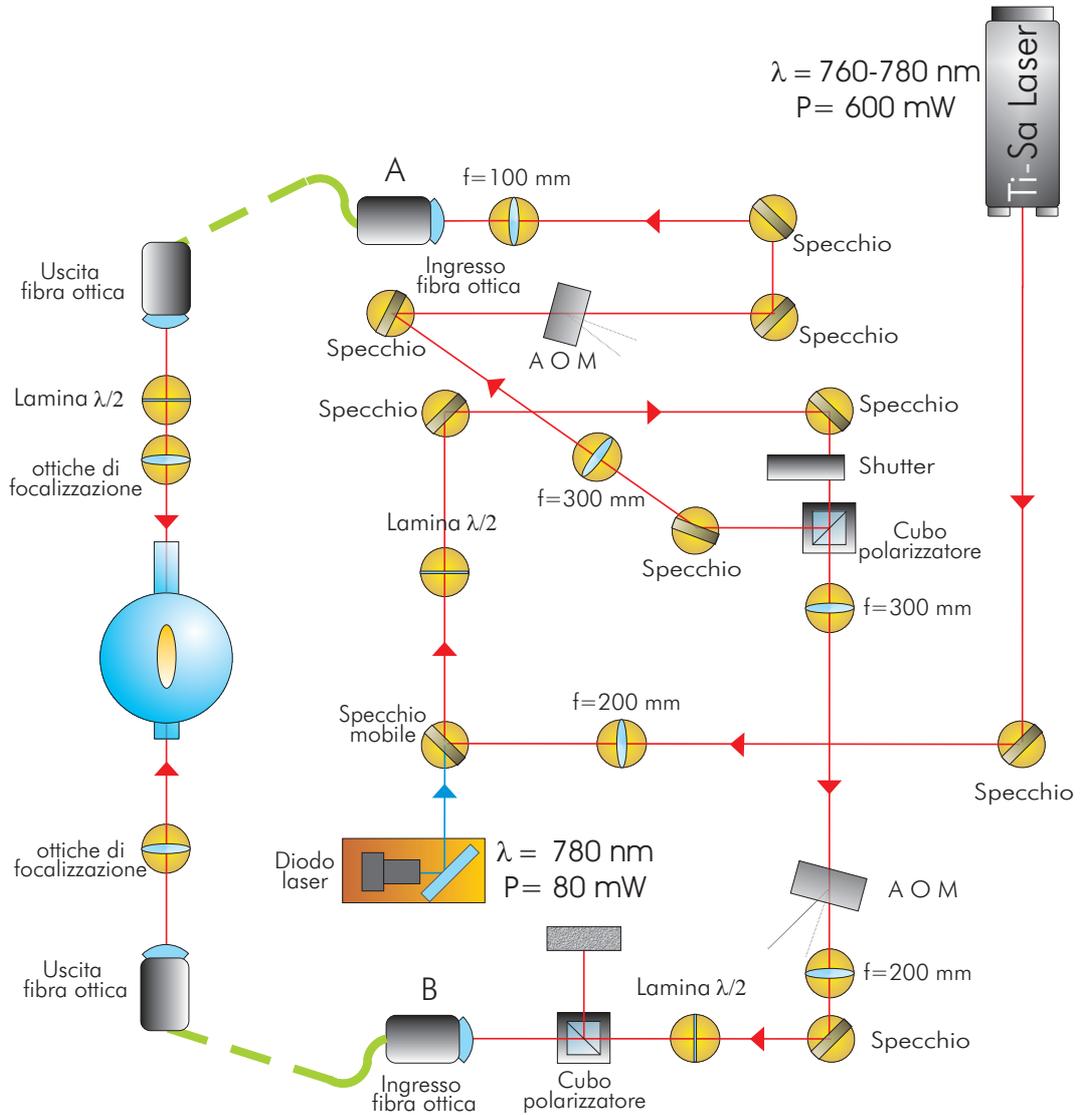


Figura 3.10: Schema dell'apparato che permette la realizzazione del reticolo ottico mobile. Si noti che è prevista la possibilità di utilizzare due sorgenti laser distinte a seconda delle necessità: il laser Ti-Sa, per potenziali di elevata intensità, ed un diodo laser a 780 nm, meno intenso ma con riga di emissione più stretta.

Inoltre, il modo di uscita del laser Ti-Sa è un TEM<sub>00</sub> con divergenza di 1.7 mrad, caratteristica che permette un'accoppiamento in fibra dei due fasci molto più efficace che nel del diodo laser (vd. sez. 3.2.4).

### 3.2.3 Suddivisione dei fasci e loro modulazione

Il fascio in uscita dal laser Ti-Sa (vd. fig. 3.10) viene leggermente focalizzato da una prima lente da 200 mm, posta a circa 2 m di distanza dallo specchio di uscita, e attraversa un sistema lamina  $\lambda/2$  - cubo polarizzatore che lo suddivide in due parti, la cui intensità relativa è fissata dalla posizione angolare della lamina. Le polarizzazioni dei due fasci sono lineari ed ortogonali tra loro. L'otturatore meccanico viene utilizzato per bloccare il fascio proveniente dal laser Ti-Sa durante la fase in cui il reticolo non deve essere presente (vd. la fine di questa sezione). Il passo successivo consiste nella focalizzazione dei fasci all'interno dei due modulatori acustooptici (AOM): poiché l'efficienza degli AOM è massima quando il fuoco del fascio cade al loro interno, su ognuno dei due cammini ottici è stata posta una lente ( $f = 300$  mm).

Come vedremo nel prossimo capitolo, la velocità che il reticolo ha nel sistema di riferimento del laboratorio deve poter essere variata da un minimo di 0 ad un massimo di circa 10 mm/s. Questa richiesta condiziona la scelta del dispositivo di modulazione e del relativo controllo da utilizzare. Bisogna tuttavia ricordare che la radiazione utilizzata per generare il potenziale periodico, come già abbiamo avuto modo di notare nel cap. 2, deve avere un consistente detuning rispetto alla transizione atomica  $D_2$ . Un valore sperimentale di  $\Gamma_{sc}$  che rappresenta un limite superiore al rate di scattering fotonico  $\Gamma_{sc}$  è  $\frac{10}{2\pi}$  Hz, dato che a questo corrisponde una vita media nel reticolo di circa 100 ms, sufficiente per i nostri scopi. Riprendendo la 2.7

possiamo valutare il detuning minimo che corrisponde a tale  $\Gamma_{sc}$ . Ricordando che  $\Gamma \simeq 6$  MHz e che la frequenza di rinculo  $\nu_{Rec}$  per un atomo di  $^{87}\text{Rb}$  è 3.77 kHz, possiamo scrivere

$$\Delta(\nu) \gtrsim s \frac{\Gamma}{\Gamma_{sc}} \nu_{Rec} = 14 \cdot s \text{ GHz}, \quad (3.10)$$

o equivalentemente

$$\Delta(\lambda) = s \cdot 0.03 \text{ nm}. \quad (3.11)$$

In definitiva, poiché generalmente i modulatori acustoottici lavorano attorno alle centinaia di MHz, la variazione in frequenza da loro introdotta non contribuisce sostanzialmente all'alterazione del detuning, che verrà fissato direttamente dalla frequenza di emissione del laser.

Nel nostro apparato abbiamo utilizzato due modulatori della Crystal Technology (modello 3080-122) da 80 MHz con un'efficienza massima del 75%, controllati da due driver costruiti sulla base di uno schema messo a punto al LENS e mostrato in fig. 3.11. Poiché è nel nostro interesse avere la minor indeterminazione possibile nella velocità del potenziale ottico, e di conseguenza nella differenza in frequenza tra i fasci, i driver dovranno essere dotati di un circuito interno capace di agganciarsi alla fase del segnale in ingresso. Una fluttuazione temporale della fase relativa, infatti, costituisce per definizione un'incertezza nella frequenza del reticolo ottico pari a:

$$\langle (d\phi/dt)^2 \rangle = \Delta\omega^2. \quad (3.12)$$

Se i sintetizzatori che forniscono il segnale in ingresso utilizzano la stessa base dei tempi (vd. fig. 3.9), questo tipo di driver permette di avere segnali in uscita agganciati in fase e di abbattere pertanto questo tipo di incertezza. Come si può vedere nello schema 3.11 il driver è dotato di quattro ingressi, due dei quali riservati alla modulazione in frequenza del segnale che regola

gli AOM; il primo di questi (*EXT FM Mod In*) permette la generazione di un segnale in uscita la cui frequenza è proporzionale all'ampiezza del segnale in ingresso, tramite l'utilizzo di un oscillatore controllato in voltaggio (Minicircuits POS 100). La massima frequenza che questo riesce a generare, e quindi del segnale che arriverà all'AOM, è di 100 MHz, compatibile col tipo di modulatore acustoottico utilizzato. Questo ingresso, nei nostri esperimenti, non è utilizzato.

L'altro ingresso (*PLL FM Mod In*) consente invece l'aggancio in fase ad un segnale oscillante e l'uscita che si ottiene in questo caso ha una frequenza 40 volte superiore a quella del segnale in ingresso. Pertanto i nostri driver, per l'aggancio in fase, dovranno essere pilotati da un segnale con frequenza 2 MHz, poiché a questa corrisponde una frequenza effettiva di modulazione degli AOM di 80 MHz, cioè quella a cui la loro efficienza è massima. In generale, si può presentare la necessità di dover variare più o meno rapidamente la frequenza del segnale, ad esempio per realizzare un reticolo accelerato. Poiché la banda d'aggancio del circuito interno è direttamente proporzionale alla variazione temporale in frequenza del segnale che il circuito è in grado di seguire senza "sganciarsi", è prevista la possibilità di regolare il rapporto tra questi due parametri, a seconda della caratteristica che si vuole privilegiare. Nel caso di scelga di lavorare con un reticolo a velocità costante, come noi abbiamo fatto, conviene ridurre la capacità del circuito di seguire le variazioni temporali di frequenza per avere una minore indeterminazione sulla velocità del reticolo; nel caso opposto, dovremo tener presente che la massima accelerazione che vogliamo ottenere limiterà la precisione con cui si conosce la velocità del reticolo istante per istante. Come sorgenti dei segnali a 2 MHz abbiamo utilizzato due sintetizzatori da 15 MHz (Agilent 33210A) dotati di aggancio in fase: da uno dei due viene prelevato un segnale di riferimento

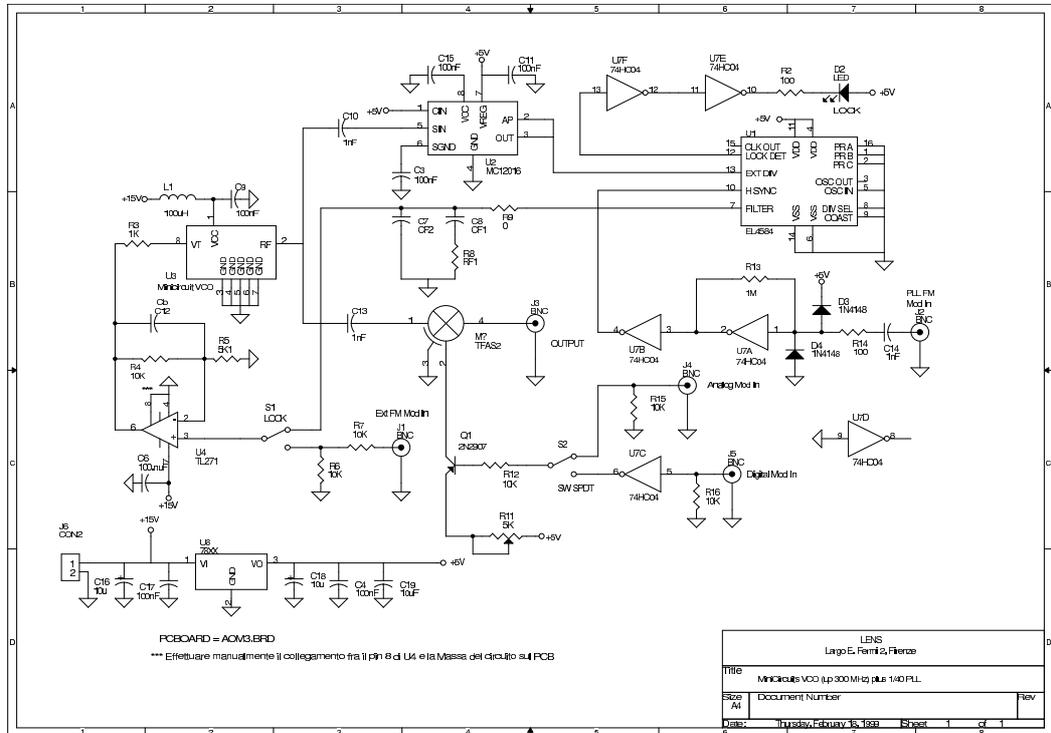


Figura 3.11: Schema del circuito di controllo dei modulatori acustoottici. Ognuno dei driver è dotato di quattro ingressi, due dedicati alla modulazione analogica e due a quella in frequenza. L'uscita del driver viene successivamente amplificata e connessa all'ingresso del modulatore.

a 10 MHz e viene utilizzato dall'altro come propria base dei tempi (vd. fig. 3.9).

Per imprimere una velocità al reticolo, si sposta la frequenza di uno solo dei due fasci. Ad esempio, nel caso si scelga la velocità di Bragg (5.89 mm/s), si ricorderà che a questa corrisponde un detuning tra i due laser pari a circa 15 kHz (cap. 2); poiché il circuito interno dei driver moltiplica la frequenza di riferimento per 40, su uno dei due generatori andrà impostata la frequenza di 2.0003770 MHz, mentre quella dell'altro rimarrà 2.0000000 MHz. La differenza da impostare (vedi eq. 2.21) potrà semplicemente essere ricavata

tramite la relazione

$$\Delta\nu_{ref} = \frac{1}{20} \frac{v_{lat}}{\lambda}. \quad (3.13)$$

Poiché l'errore sulla frequenza intrinseco ai generatori è pari a 0.05 Hz (mezzo digit), trascurando quello introdotto dai driver (che sostanzialmente è sistematico e può essere eliminato con un'adeguata taratura del dispositivo) l'errore che si ha nella modulazione dei singoli fasci risulta 2 Hz, e cioè, alla velocità di Bragg,  $10^{-4}$  sul totale, praticamente trascurabile rispetto alle altre fonti d'incertezza, prima fra tutte la fluttuazione di potenza delle nostre sorgenti.

Una volta determinata la frequenza del segnale di modulazione, generalmente è necessario avere un controllo sulla sua ampiezza. Come già anticipato nel cap. 2, infatti, la modalità di accensione del reticolo influenza profondamente l'evoluzione dinamica del sistema atomico; a seconda del fenomeno fisico da indagare sarà necessario variare la durata della rampa di intensità dei fasci. Per fare questo si utilizzano gli altri due ingressi dei nostri driver. La capacità di diffrazione di un AOM dipende dall'intensità del segnale in ingresso, andando da zero per  $I = I_0$  ad un certo valore di saturazione per  $I = I_s$ . I due ingressi di modulazione di ampiezza agiscono sul segnale d'uscita a seguito di tutta la circuiteria interna, lasciandone però intatta la frequenza; l'ingresso TTL (*Digital Mod In*) è un ingresso digitale in logica negata che, a seconda del valore in tensione che viene applicato, inibisce o meno l'uscita che modula direttamente l'amplificatore dell'AOM. Questo è utile qualora si voglia "triggerare" un impulso laser su durate temporali molto brevi, come nel caso dello scattering Bragg di un condensato. Come segnale di ingresso viene utilizzata un'onda quadra proveniente da un terzo generatore, identico ai precedenti, a sua volta "triggerato" con un segnale dal circuito di controllo dell'esperimento. La sua presenza è resa necessaria dalla brevità

degli impulsi che si vogliono realizzare: il circuito di controllo dell'esperimento, infatti, non è in grado di avere risoluzioni temporali maggiori di alcune decine di  $\mu s$ , mentre le durate degli impulsi necessari possono scendere fino a 20  $\mu s$ .

L'altro ingresso AM (*Analog Mod In*) permette la modulazione analogica del segnale d'uscita: applicando una rampa in tensione del segnale di ingresso si ottiene una corrispondente rampa in quello di uscita. Questo ingresso viene utilizzato nel caso si voglia realizzare un'accensione adiabatica del reticolo su tempi dell'ordine dei millisecondi.

Per compensare le diversità intrinseche tra i due driver degli AOM, i segnali di rampa in ingresso sono forniti da altri due generatori di funzione, sui quali stavolta vengono programmate per punti due forme d'onda la cui durata può essere facilmente modificata. Applicando un unico segnale di modulazione di ampiezza ad entrambi i driver, infatti, i segnali in uscita risultano leggermente diversi. Variando opportunamente la forma d'onda in ingresso, si riescono ad ottenere profili temporali dei fasci praticamente identici.

Nel nostro caso, le forme d'onda scelte sono costituite da una prima parte in cui la tensione sale linearmente nel tempo, e da una seconda in cui rimane costante al valore per cui l'AOM raggiunge la massima efficienza ( $I_s$ ). Variando la durata totale della forma d'onda si varia agevolmente anche la durata della rampa di accensione del reticolo, mentre l'otturatore meccanico (fig. 3.10) potrà essere utilizzato per il suo spegnimento (non adiabatico).

Nella prossima sezione saranno descritte alcune misure effettuate per tarare il nostro sistema di modulazione e per correggere eventuali errori sistematici nella sua tempistica.

### 3.2.4 Accoppiamento in fibra dei fasci

Effettuata la modulazione dei fasci, non rimane che portarli fino alla cella dove si realizza la condensazione per sovrapporli alla nube atomica. Nel nostro apparato sperimentale i fasci percorrono la distanza che intercorre tra la zona di modulazione e la cella all'interno di una fibra ottica (OZ Optics SMC-A0780B,  $\varnothing = 4.0 \mu\text{m}$ ). I motivi di questa scelta sono fondamentalmente tre:

- la fibra ottica modella il profilo spaziale dei fasci in ingresso e lo rende notevolmente più simmetrico attorno all'asse di propagazione, avvicinandolo molto più a quello che è un modo gaussiano ideale  $\text{TEM}_{00}$ . Questo si rivela molto importante nella realizzazione dell'onda stazionaria, che diviene molto più uniforme ed eventualmente caratterizzabile;
- il raggiungimento della cella nella quale si ha la trappola magnetica (vd. sez 3.1.8) non è molto agevole, dato che in questa zona di lavoro devono convivere ottiche per il raffreddamento degli atomi, per la rivelazione del condensato e bobine per la realizzazione del campo magnetico. L'utilizzo delle fibre ottiche facilita moltissimo questo compito.
- la stabilità dell'allineamento gioca un ruolo chiave nella ripetibilità delle misure. L'uso delle fibre nel trasporto della luce diminuisce consistentemente il numero delle ottiche attraverso cui i fasci devono propagarsi, e la direzione dei fasci di reticolo è fissata unicamente dalla posizione dei collimatori di uscita delle fibre, indipendentemente da un eventuale cattivo allineamento delle ottiche precedenti gli ingressi. Questo porta

ad una minore potenza in uscita dei fasci, che può agilmente essere recuperata tramite il sistema descritto fra breve.

Su ognuno dei due cammini ottici, prima dello stadio di ingresso delle fibre, è posta una lente che limita la divergenza del fascio dopo l'uscita dall'AOM. Inoltre, uno dei due fasci attraversa un'ulteriore sistema lamina-cubo: questa configurazione permette di regolare agevolmente l'intensità dei due fasci senza dover alterare la potenza di uscita del laser. La procedura di regolazione dell'intensità dei fasci è la seguente: una volta decisa la potenza necessaria (supponendo per semplicità che questa sia la stessa per entrambi) si ruota la prima lamina  $\lambda/2$  fino ad ottenere in uscita dalla fibra  $A$  il valore desiderato. A questo punto, in uscita dall'altra fibra avremo un valore in generale più elevato di quello necessario. Ruotando la seconda lamina  $\lambda/2$  potremo togliere potenza all'ingresso della fibra  $B$  fino ad ottenere anche per questa la corretta intensità in uscita.

Le fibre da noi utilizzate hanno la caratteristica di conservare la polarizzazione del fascio in ingresso. Per questo motivo, vista la configurazione con la quale si suddividono i fasci, la polarizzazione delle due onde contropropaganti che si vanno a sovrapporre nella cella sono tra loro ortogonali. Poiché per la realizzazione di un reticolo ottico abbiamo bisogno di due fasci con polarizzazione parallela, abbiamo posto una lamina  $\lambda/2$  sull'uscita di una delle due fibre, e controllato che tale condizione fosse rispettata.

L'accensione e lo spegnimento dei fasci viene effettuato fornendo o meno il segnale di modulazione agli AOM: poiché l'ordine diffratto di nostro interesse è il primo, su questo è basato l'allineamento delle fibre ottiche; quando l'AOM è spento, dunque, non arriva luce ai loro ingressi, dato che in questo caso sarà presente soltanto l'ordine imperturbato. In realtà, il fattore di estinzione degli AOM, che corrisponde ad un'efficienza spuria di deviazione

del fascio, è dell'ordine di  $10^{-4}$ . In altre parole, il primo ordine di diffrazione non è mai completamente assente e avremo sulla cella una debole intensità luminosa anche durante la fase in cui il reticolo dovrebbe essere spento. Questa situazione, nel caso non si utilizzino grandi detuning, può addirittura prevenire la condensazione di Bose-Einstein del nostro campione atomico, a causa dell'elevato rate di riscaldamento da scattering fotonico introdotto (vd. sez. 2.2). L'utilizzo dell'otturatore meccanico prima degli ingressi delle fibre previene questo fenomeno durante la fase di intrappolamento e di raffreddamento degli atomi.

### 3.2.5 Taratura della risposta degli AOM

Descriviamo adesso alcune misure preliminari di taratura dei driver che controllano gli AOM, che sono state necessarie per stabilire alcuni parametri fondamentali dell'esperimento.

#### Ritardi temporali

Il primo problema che si pone è la sincronizzazione tra le azioni impostate via software e la risposta dei nostri modulatori: eventuali ritardi nell'accensione dei fasci (e nel loro spegnimento) andranno compensati con un opportuno anticipo dei segnali di trigger che provengono dalla scheda di controllo dell'esperimento.

Osservando la potenza del fascio in uscita da un AOM su un fotodiodo e confrontandola con il segnale di trigger (fig. 3.12), possiamo notare che, sulla scala dei tempi che ci interessa ( $\simeq 1$  ms), non è possibile apprezzare alcun ritardo tra i due segnali. In figura è rappresentato il caso di accensione adiabatica di uno dei due fasci; la forma d'onda programmata sul generatore ha una rampa di tensione lineare della durata di 4 ms. Come si vede, le deviazioni dal comportamento lineare della risposta sono limitate alla sola parte

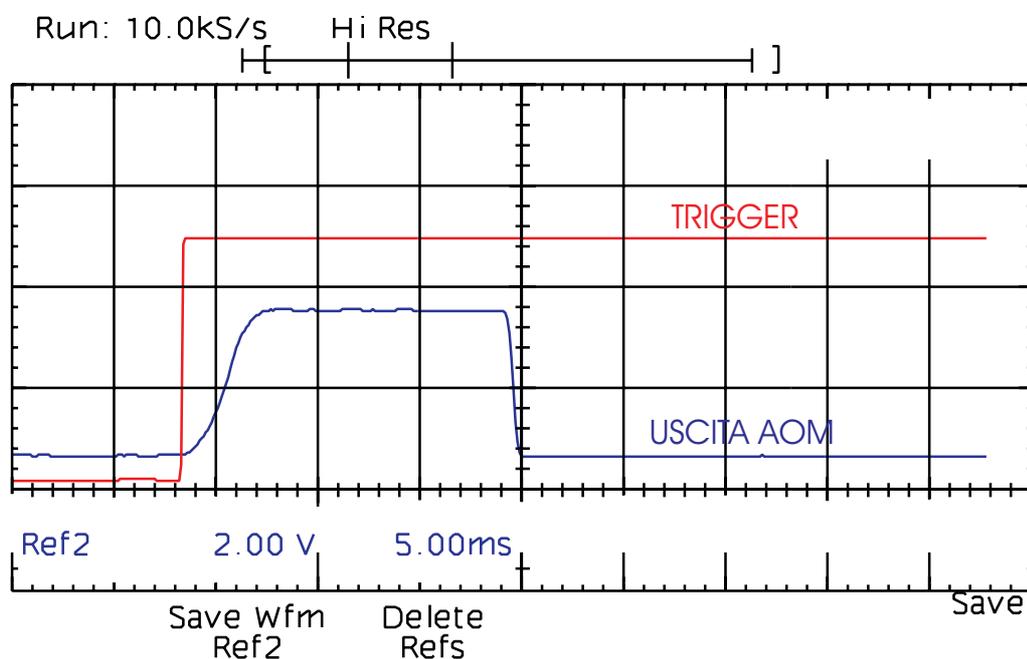


Figura 3.12: Confronto sperimentale tra il segnale di trigger che proviene dalla scheda di controllo e la risposta dell'AOM misurata osservando la potenza di uscita con un fotodiodo. Si noti che su questa scala temporale, che è quella di nostro interesse, non è apprezzabile alcun ritardo tra i due segnali. In figura è rappresentato il caso in cui la rampa lineare di tensione che pilota il driver ha una durata di 4 ms: possiamo notare che, a parte agli estremi della rampa, l'intensità del fascio cresce in modo praticamente lineare nel tempo e la durata della rampa in intensità coincide con quella in tensione impostata sul sintetizzatore.

iniziale e finale della rampa, e la sua durata coincide con quella impostata. La stessa misura è stata ripetuta per l'accensione istantanea del reticolo, utilizzando l'ingresso TTL del driver; ancora una volta non si è osservato un ritardo apprezzabile tra il segnale di trigger proveniente dalla scheda di controllo e la risposta dell'AOM. Un'analogia taratura è stata eseguita sul driver che controlla l'altro fascio di reticolo. Questo, contrariamente al precedente, ha richiesto alcune modifiche nel programma di controllo. Infatti, sebbene la durata e la linearità della rampa di intensità del fascio non presentassero

particolari deviazioni dal comportamento "ideale", stavolta è stato misurato un ritardo di 1.2 ms tra l'istante di salita del trigger e l'accensione del driver. Per risolvere questo problema, abbiamo scelto di utilizzare due segnali di trigger distinti per i due AOM e anticiparne uno di 1.2 ms rispetto all'altro: in questo modo l'accensione dei due fasci è praticamente simultanea entro le decine di  $\mu s$ .

### Differenze tra accensione adiabatica e istantanea

Abbiamo già discusso della necessità di avere un apparato che ci permette di scegliere la modalità di accensione del reticolo ottico. Tuttavia non è scontato che le uscite che si ottengono utilizzando i due ingressi di un driver (vd. sez. 3.2.3), e cioè quello analogico e quello digitale, abbiano a regime lo stesso valore. Quello che infatti si osserva in fig. 3.13 è uno sbilanciamento tra le intensità del fascio in uscita da uno degli AOM nel caso si utilizzino le due diverse modalità di accensione: l'accensione istantanea porta ad un'intensità a regime consistentemente più bassa che nel caso adiabatico. Una serie di misure ci ha permesso di determinare il rapporto medio tra le due intensità:

$$\frac{I_{adiab}}{I_{ist}} \simeq (1.4 \pm 0.1). \quad (3.14)$$

Questo fattore correttivo ha una notevole importanza dato che, come già anticipato nel capitolo 2 e come vedremo in maggior dettaglio nella sez. 3.2.6, la misura dell'altezza del reticolo viene eseguita sfruttando lo scattering Bragg di un condensato. Questo fenomeno richiede un'accensione molto rapida del reticolo, mentre le misure riportate nel capitolo 4 si basano su quella adiabatica. Senza tenere conto di tale discrepanza nella profondità del potenziale ottico, quindi, sottostimeremmo l'altezza  $s$  e con essa l'entità degli effetti di massa efficace che si hanno su un condensato in presenza di un potenziale periodico.

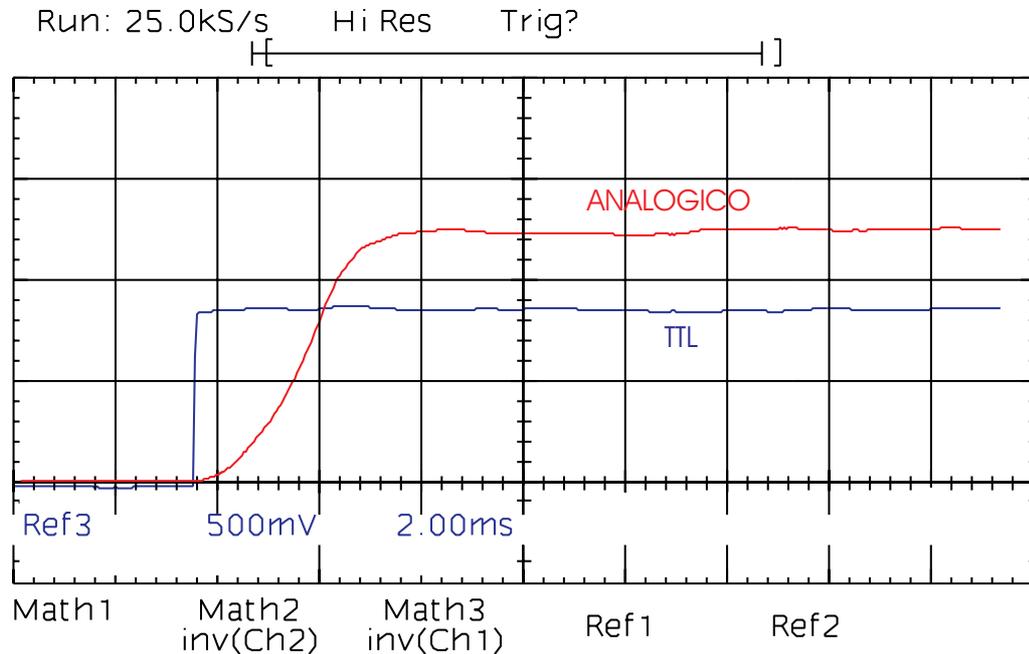


Figura 3.13: In figura è riportato il segnale di un fotodiodo che misura la potenza in uscita da un AOM a seconda della modalità di accensione. Da misure ripetute si ricava che il rapporto tra l'intensità che si ha per un'accensione adiabatica e quella per un'accensione istantanea è  $(1.4 \pm 0.1)$

### 3.2.6 Taratura dell'altezza del reticolo mediante lo scattering Bragg

Nel cap. 2 abbiamo analizzato per via teorica il fenomeno dello scattering Bragg di un condensato da parte di un potenziale ottico periodico: quando un atomo si trova in prossimità di un piano di Bragg del reticolo reciproco, e quindi al bordo della zona di Brillouin, ha una elevata probabilità di subire una "riflessione" e vedere variata la propria quantità di moto di un valore  $2\hbar k$ , dove  $k$  è il vettore d'onda della radiazione. Sperimentalmente, per un processo al primo ordine, questo corrisponde alla separazione (nello spazio delle fasi) di due picchi di densità atomica, uno dei quali in quiete rispetto al sistema di riferimento del laboratorio, ed uno che si muove con impulso  $2\hbar k$

nella direzione di moto del potenziale periodico.

Per metterci nella condizione di risonanza data dalla 2.31, la differenza di frequenza da impostare sui generatori è 377,0 Hz: dato che il condensato viene realizzato in quiete nel sistema di riferimento del laboratorio, secondo la 3.13 a questa corrisponde la condizione di risonanza  $\Delta E_{lat} = 4E_{Rec}$ .

L'oscillazione nella popolazione relativa dei due picchi viene osservata come segue: dopo la realizzazione del condensato, la trappola magnetica viene spenta, così da far cadere gli atomi sotto l'azione della forza di gravità. Trascorsi 5 ms dal rilascio, il reticolo ottico viene acceso non adiabaticamente in modo da creare un impulso della durata  $\Delta t$ ; una parte di atomi subirà lo scattering Bragg ed andrà a costituire il picco diffratto, che, nello spazio reale, risulterà ancora sovrapposto a quello originario. Allo scopo di separare i due picchi, prima della rivelazione il condensato viene lasciato espandere altri 23 ms, dopo i quali le due componenti sono separate di  $2\hbar kt_{exp}=135 \mu\text{m}$ . Poiché ogni pixel corrisponde ad una dimensione reale di  $4.42 \mu\text{m}$  nel piano focale del condensato, i picchi distano di circa 30 pixels, e le popolazioni sono quindi nettamente distinte.

Variando la durata  $\Delta t$  dell'impulso possiamo ricoprire un intero periodo di oscillazione di Rabi delle popolazioni; la frequenza che si ottiene dal fit dei dati (vedi l'esempio riportato in fig. 3.14) ci permette di risalire all'altezza del potenziale ottico in virtù della 2.33.

L'allineamento del reticolo ottico si basa sulla precedente procedura. Una volta sovrapposti grossolanamente i fasci nella zona di interazione col condensato, si fissa una durata dell'impulso e si varia finemente la direzione dei fasci tramite una coppia di specchi (non rappresentati in fig. 3.10) posti prima delle finestre della cella, e si osserva la popolazione relativa tra i due picchi: la posizione ottimale è quella che massimizza l'efficienza della diffr-

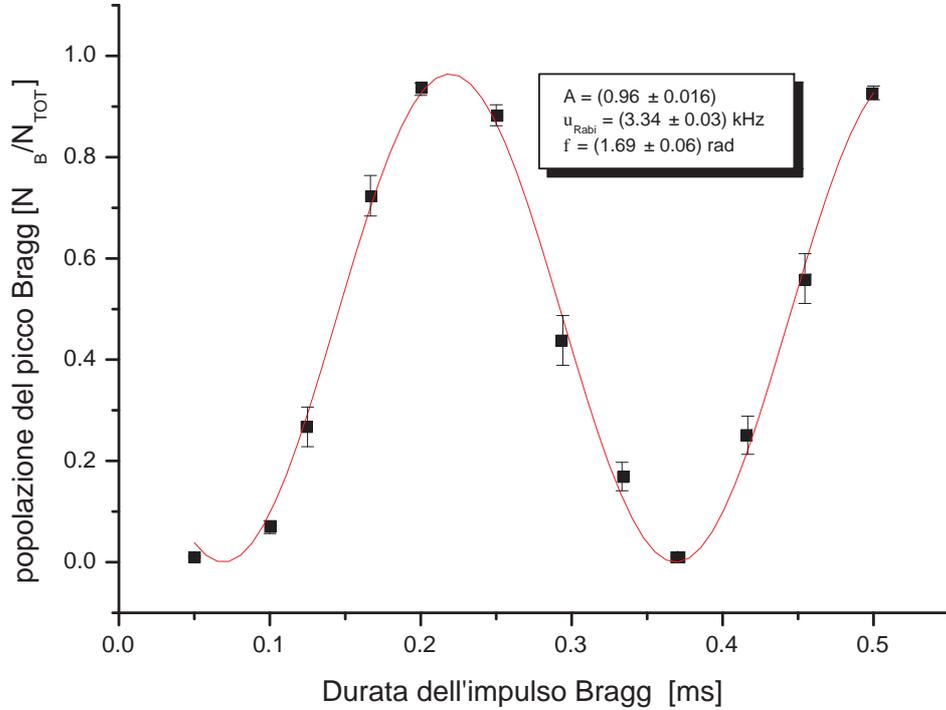


Figura 3.14: Popolazione del picco diffratto in funzione della durata dell'impulso Bragg per un valore dell'altezza del potenziale ottico  $s \simeq 1.8$ . Il detuning tra i fasci corrisponde a  $4E_{Rec}$ , condizione di risonanza per lo scattering Bragg. L'incertezza sulle popolazioni è considerata il 20% del totale. Si noti che la popolazione nel picco diffratto oscilla tra un minimo di 0 ed un massimo che coincide col numero totale di atomi, conferma del fatto che la velocità scelta per il reticolo è effettivamente quella per cui si ha la risonanza del fenomeno di diffrazione.

zione Bragg, e corrisponde alla situazione in cui la sovrapposizione dei due fasci è massima. In questo processo di misura e di allineamento del reticolo si deve aver cura di far rimanere il condensato all'interno del primo periodo di oscillazione di Rabi, utilizzando impulsi sufficientemente brevi, e di non spingersi troppo vicino alla risonanza della transizione atomica: impulsi

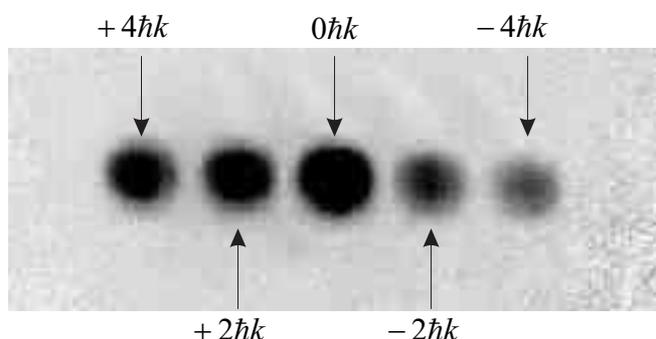


Figura 3.15: Processo Bragg con ordini di diffrazione superiori al primo. La loro presenza è dovuta all'eccessiva durata dell'impulso luminoso e al detuning ridotto del laser.

troppo lunghi associati ad un detuning ridotto generano processi diffrattivi di ordine superiore al primo come quello mostrato in figura 3.15, e non è più lecito misurare l'altezza del potenziale in base al confronto delle popolazioni di due sole componenti.

### 3.2.7 Posizione e sezione dei fasci

I risultati dell'esperimento descritto nel prossimo capitolo si basano sull'interazione tra un reticolo ottico e un condensato di Bose-Einstein. Come è possibile osservare in figura 2.6, e come è del resto facilmente intuibile, l'effetto del potenziale periodico sulla nuvola atomica aumenta all'aumentare del tempo di interazione. Questo, d'altro canto, è limitato dalla presenza della forza di gravità che tende a far uscire il condensato dalla sezione utile del fascio; sarà pertanto desiderabile utilizzare fasci con la maggiore sezione possibile, compatibilmente con l'intensità minima richiesta dall'esperimento. Un altro motivo che richiede l'uso di fasci di grossa sezione è la necessità di accendere adiabaticamente il reticolo (vd. sez. 2.7): durante l'intervallo di tempo in cui l'intensità viene aumentata, che come vedremo nel prossimo

capitolo corrisponde a qualche millisecondo, la velocità del condensato all'interno del reticolo non è ben determinata, dato che il gap energetico tra le bande dipende dal potenziale ottico. Pertanto, minore sarà il rapporto tra la durata della rampa e la durata totale dell'impulso, minore sarà ragionevolmente l'incertezza nelle varie misure sul condensato, poiché viene ridotta l'influenza del transitorio di intensità sull'interazione tra atomi e radiazione. Non dobbiamo inoltre dimenticare che, per applicare il modello messo a punto in [13], l'energia di interazione degli atomi deve essere convertita quasi interamente in energia cinetica a seguito del rilascio dalla trappola magnetica: per soddisfare la condizione 1.43 abbiamo scelto di posizionare gli assi dei fasci ad una distanza dal minimo della trappola magnetica che permettesse al condensato di espandere tra i 3 ed i 5 ms prima di essere investito dal reticolo alla sua massima intensità. Per far questo abbiamo massimizzato l'efficienza del processo Bragg esattamente come descritto nella sezione precedente, aspettando 5 ms dall'apertura della trappola magnetica prima di inviare l'impulso laser sul condensato. L'aumento lineare nel tempo della velocità di caduta degli atomi ci impedisce di incrementare ulteriormente questo lasso di tempo.

Una volta realizzata questa configurazione abbiamo misurato l'efficienza del processo Bragg al variare del tempo di espansione della nube atomica, mantenendo invece fissata la durata dell'impulso. Questa misura ci consente di ottenere informazioni sull'intensità istantanea in cui gli atomi sono immersi nelle varie zone del fascio reticolare. Considerando il profilo del fascio gaussiano, l'intensità lungo un piano verticale ortogonale al fascio stesso sarà data da:

$$I(z, t) = I_0 \exp\left(-\frac{(z(t) - z_0)^2}{2w^2}\right) = I_0 \exp\left(-\frac{(1/2gt^2 - z_0)^2}{2w^2}\right), \quad (3.15)$$

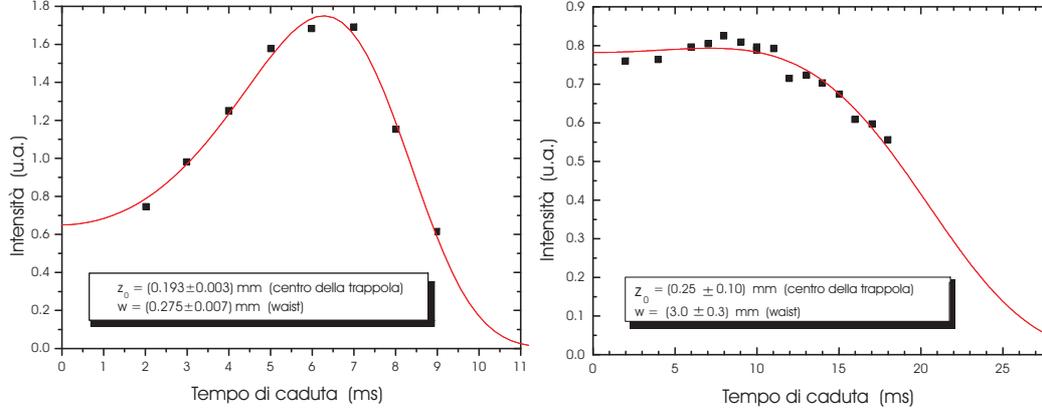


Figura 3.16: Misura del profilo verticale di intensità del reticolo ottico. Misurando l'efficienza del processo Bragg per diversi tempi di espansione possiamo ricavare informazioni sull'intensità luminosa in cui si trovano immersi gli atomi. Sulla sinistra è riportato il profilo per un waist del fascio di  $300 \mu\text{m}$ , mentre sulla destra quello che si ottiene aumentando la sezione a  $6 \text{ mm}$ . In quest'ultimo caso la zona in cui l'interazione si mantiene costante si estende a fino circa  $13 \text{ ms}$  dall'inizio dell'espansione.

dove  $z_0$  è la posizione del centro della trappola magnetica da cui viene rilasciato il condensato rispetto all'asse di propagazione del fascio,  $z(t)$  è la posizione del condensato lungo l'asse verticale,  $g$  è l'accelerazione di gravità,  $t$  è il tempo di espansione e  $w$  è il waist del fascio, mentre  $I_0$  è l'intensità massima del nostro fascio laser. Del resto, l'intensità luminosa è proporzionale al potenziale dipolare (vedi cap. 2), che nel caso di una transizione a due fotoni è proporzionale alla frequenza di Rabi dell'oscillazione tramite la 2.33. Pertanto, volendo fittare la popolazione relativa nel picco diffratto, possiamo utilizzare, a meno di un coefficiente di proporzionalità  $A$ , una funzione della forma 3.15. I parametri di fit sono  $w$ ,  $z_0$  ed  $A$ . Da una prima misura del profilo dell'intensità dei fasci, riportata in fig. 3.16 a sinistra, abbiamo ricavato un waist di  $280 \mu\text{m}$ . Dopo aver portato la sezione dei fasci a  $6 \text{ mm}$ , abbiamo nuovamente misurato il profilo di intensità, ottenendo i risultati riportati in

fig. 3.16 a destra. Come si può notare, la variazione della sezione ha portato ad un consistente allungamento dell'intervallo di tempo in cui l'intensità efficace può essere considerata costante (primi 13 ms), mentre nella fase finale dell'espansione la scarsa intensità luminosa, associata ad una elevata velocità di caduta, fa crollare l'efficienza del processo di scattering Bragg degli atomi.

La messa a punto dell'apparato sperimentale presentata in questo capitolo ha permesso l'osservazione e la misura di effetti di massa efficace su un condensato di Bose-Einstein all'interno di un reticolo ottico; i risultati sono raccolti e discussi nel prossimo capitolo.



# Capitolo 4

## Le misure

In questo capitolo sono discussi i risultati ottenuti nello studio dell'interazione di un'onda di materia coerente, rappresentata da un condensato di Bose-Einstein di  $^{87}\text{Rb}$ , con un reticolo ottico mobile generato dall'interferenza di due fasci laser contropropaganti. La possibilità di regolare la velocità relativa tra i due sistemi, quello atomico e quello ottico, permette di indagare con precisione la dinamica del pacchetto d'onda materiale. Dalle misure sulla velocità del condensato all'interno del potenziale periodico emerge una sorprendente analogia col caso di un elettrone che si muove all'interno di un cristallo materiale; in particolare la velocità in funzione del quasiimpulso  $q$  risulta accuratamente descritta dalla semplice teoria a singola particella, applicabile in virtù della minima dispersione in impulso che caratterizza un condensato di Bose-Einstein. Inoltre è stato possibile misurare indipendentemente l'effetto della massa efficace  $m^*$ , generato dalla presenza del potenziale periodico, sulle dimensioni reali del condensato in espansione; i dati ottenuti hanno permesso un confronto con il modello teorico riportato in sezione 2.7, che ha messo in luce, seppure per via qualitativa, un evidente accordo tra il comportamento previsto e quello effettivamente osservato. La presenza del reticolo ottico induce una variazione delle dimensioni reali del condensato

che dipende dalla velocità del reticolo; variando la velocità del reticolo tra 0 e  $2v_B$  è possibile passare da un regime di focalizzazione del condensato ad un regime di defocalizzazione lungo l'asse del reticolo: a tutti gli effetti, durante l'espansione, il reticolo ottico agisce come una *lente di luce per onde di materia* [14].

## 4.1 Effetti di massa efficace sull'espansione del condensato

L'espansione di un condensato in un potenziale ottico periodico statico è già stata trattata in [12]. Le misure che sono state effettuate nella prima parte del nostro esperimento, riportate nella prossima sezione, riguardano invece il moto del centro di massa di un condensato in espansione all'interno di un reticolo ottico mobile.

Come già anticipato in sezione 2.4, la teoria delle bande è in grado di descrivere in modo appropriato questo tipo di moto tramite il concetto di stato di Bloch  $|n, q\rangle$  di energia  $E_{n,q}$ , con  $q$  quasiimpulso del condensato nel sistema di riferimento del reticolo e  $n$  indice di banda. La velocità del condensato in tale sistema di riferimento è stata misurata sperimentalmente e confrontata con quella di Bloch,  $v_n(q) = \hbar^{-1} \partial E_{n,q} / \partial q$ . Poiché questa dipende dall'indice di banda  $n$  diventa importante, ai fini di una spettroscopia di precisione, caricare gli atomi in una sola componente di Bloch  $|n, q\rangle$ . Nella sezione 2.5 abbiamo già osservato che questa condizione viene soddisfatta mediante un'accensione adiabatica dei fasci di reticolo, la cui realizzazione sperimentale è descritta nel capitolo 3.

In sezione 4.3 saranno poi discussi i risultati della seconda parte dell'esperimento, dedicata allo studio dell'evoluzione delle dimensioni di un condensato in espansione in un reticolo ottico.

E' rilevante notare come la stessa configurazione sperimentale permetta l'osservazione di entrambi gli aspetti della dinamica del sistema: da un'unica immagine della nuvola atomica si possono ricavare informazioni sia sulla sua velocità di Bloch, sia sulla dimensione assiale e radiale del condensato.

### 4.1.1 La procedura sperimentale

Descriviamo adesso la procedura utilizzata sperimentalmente per studiare gli effetti di un reticolo ottico mobile 1D sull'espansione del condensato. Una volta prodotto il condensato di Bose-Einstein di atomi di  $^{87}\text{Rb}$  nello stato iperfine  $|F = 1, m_F = -1\rangle$  mediante la procedura descritta nel precedente capitolo, la trappola magnetica viene spenta e la nuvola atomica lasciata espandere mentre cade sotto l'azione della gravità. Dopo 1 ms il reticolo ottico mobile viene acceso mediante una rampa di intensità di durata compresa tra 2 e 4 ms. Il condensato viene successivamente lasciato espandere all'interno del reticolo ottico; la consistente sezione che abbiamo scelto per i fasci che lo generano (6 mm) ci permette di estendere questo tempo di interazione fino a 10 ms. Dal punto di vista sperimentale è importante ottenere un tempo di interazione il più lungo possibile, dato che, come vedremo meglio in sez. 4.3, questo determina l'entità degli effetti del potenziale periodico sulla nuvola atomica. Prima che il condensato esca dalla sezione utile del reticolo, infine, viene realizzata la presa dati, che consiste in una foto in assorbimento degli atomi (vedi cap. 3).

Questa procedura ci permette di trasferire il condensato in un uno stato di Bloch definito da un unico indice di banda  $n$  e dal quasiimpulso  $q$  relativo al reticolo<sup>1</sup> [22]. L'effettiva adiabaticità dell'accensione è stata controllata

---

<sup>1</sup>Infatti, adottando uno schema a zona ripetuta, consideriamo l'accensione del potenziale periodico mediante una rampa adiabatica di intensità. L'energia di particella libera che descrive il caso imperturbato si modificherà gradualmente, e la banda che verrà popolata sarà preferenzialmente quella la cui energia, per un dato quasiimpulso  $q$ , è più vicina al

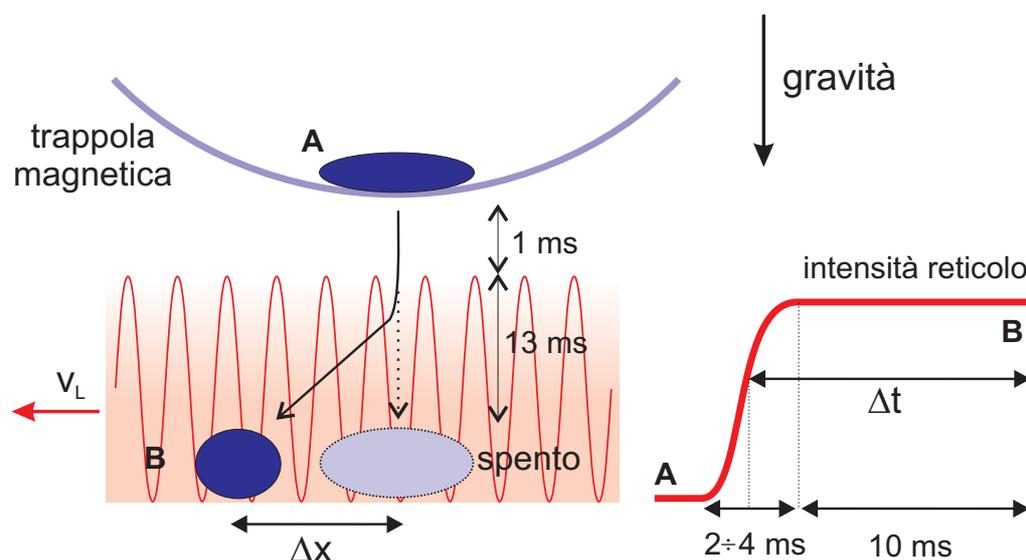


Figura 4.1: Schema della procedura di accensione del reticolo ottico. Il condensato preparato nella trappola magnetica (A) viene rilasciato, e dopo 1 ms di espansione libera viene caricato mediante una rampa adiabatica di intensità all'interno del potenziale periodico che si muove con velocità  $v_L$ . L'espansione all'interno del reticolo alla massima intensità continua per 10 ms, dopodiché, sempre a reticolo acceso, viene realizzata un'immagine in assorbimento degli atomi lungo la direzione radiale orizzontale. Rispetto al caso libero si ha un'alterazione della posizione e delle dimensioni finali del condensato. La durata della rampa varia a seconda delle esigenze di adiabaticità.

verificando che un'analogia rampa di spegnimento riportasse tutti gli atomi in un'unica componente di impulso: ciò, in virtù della 2.29, è possibile soltanto nel caso si sia popolata un'unica banda di energia  $E_{n,q}$  corrispondente ad un ben determinato  $q$ . La durata della rampa di accensione è usualmente pari a 2 ms, ma per  $q \rightarrow nq_B$ , con  $q_B = mv_B = \hbar k$  e  $n \in \mathbb{Z}$ , la condizione di adiabaticità è più difficile da soddisfare, data la vicinanza delle bande contigue. Pertanto, in prossimità del bordo zona, si rende necessario allungare

---

valore libero  $q^2/2m$ . In questo schema si interpreta anche la maggiore difficoltà a mantenere il regime di adiabaticità nei pressi del bordo zona, in cui l'energia di particella libera è equidistante dalle due bande più vicine.

la rampa fino a 4 ms. Il millisecondo che trascorre prima dell'accensione dei fasci, sommato al tempo in cui viene innalzata la rampa di intensità, permette alla nuvola atomica appena rilasciata dalla trappola di convertire la propria energia di campo medio in energia cinetica prima dell'interazione col reticolo. Nella sezione 1.4.1 abbiamo visto che nel nostro caso questa condizione viene soddisfatta per  $t \gtrsim 2$  ms. Poiché la rampa ha una durata che varia tra 2 e 4 ms, il condensato espande almeno 3 ms prima di essere investito dalla radiazione alla massima intensità. In questo modo la prima fase dell'espansione, ancora fortemente influenzata da una rapida variazione del campo medio, viene esclusa dall'interazione col reticolo. Il regime sperimentale è così ben determinato, e permette di confrontare i risultati della spettroscopia di bande con il modello a singola particella.

La radiazione utilizzata, proveniente dal laser Ti-Sa, ha un lunghezza d'onda  $\lambda = 779.5$  nm, 0.5 nm sotto la transizione  $D_2$  del  $^{87}\text{Rb}$ . L'intensità massima di ogni fascio non supera i 2 mW/mm<sup>2</sup>, ed il rate di scattering  $\Gamma_{sc}$  si mantiene inferiore a 3 Hz. Le velocità  $v_L$  a cui il reticolo si muove sono comprese tra 0 e  $2v_B$ : per  $0 < v_L < v_B$  viene popolata la prima banda, mentre per  $v_B < v_L < 2v_B$  la seconda. In sezione 4.3 mostreremo un caso in cui, in prossimità del bordo banda, si ha una popolazione non trascurabile di entrambe le bande energetiche.

## 4.2 Spettroscopia di bande di un condensato di Bose-Einstein

Dalle immagini del condensato è possibile ricavare informazioni sulla velocità  $v$  relativa al reticolo. Con riferimento alla figura 4.1, questa sarà data da:

$$v = v_L - \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad (4.1)$$

dove  $\Delta x$  è lo spostamento misurato del centro di massa del condensato rispetto al caso di espansione senza reticolo e  $\Delta t$  è il tempo di permanenza del condensato nel potenziale periodico; la velocità relativa così definita coincide con quella di Bloch per il condensato che si muove nel sistema di riferimento in quiete col reticolo ottico. Per tenere conto del fatto che la rampa genera una variazione temporale nella forma delle bande energetiche, il tempo di interazione è stimato come la somma dell'intervallo per cui l'intensità rimane al valore massimo (costante) più metà durata della rampa stessa, e quest'ultima viene presa anche come errore su  $\Delta t$ . Propagando l'errore per l'espressione di  $v$  si ottiene:

$$\delta v = \delta v_L + \frac{1}{\Delta t} \left( \delta C_x^0 + \delta C_x + \frac{|C_x^0 - C_x|}{\Delta t} \delta(\Delta t) \right), \quad (4.2)$$

dove  $C_x^0$  e  $C_x$  sono le posizioni del centro della nuvola atomica che si ricavano dal fit delle immagini rispettivamente in assenza e con reticolo ottico. Ogni  $C_x^0$  e  $C_x$  è la media su dieci diverse misure eseguite nelle stesse condizioni, e i rispettivi  $\delta$  sono la deviazione standard dalla media dei punti sperimentali. Nella precedente espressione il primo termine, corrispondente all'incertezza nella velocità del reticolo nel sistema di riferimento del laboratorio introdotta dai sintetizzatori e dal controllo elettronico degli AOM (vedi sez. 3.2.3), risulta trascurabile rispetto alle altre sorgenti d'errore ( $\delta v_L|_{v_B} \simeq 1 \mu\text{m/s}$ ). Si noti che in  $\delta C_x^0$  e  $\delta C_x$  sono racchiuse implicitamente le incertezze sull'altezza del potenziale periodico derivanti dalla fluttuazione della potenza del laser Ti-Sa.

Nelle figure 4.2 e 4.3 sono riportati i risultati delle misure di velocità per diversi valori dell'altezza del potenziale ottico in funzione del quasiimpulso  $q$ , che è proporzionale alla velocità del reticolo nel sistema di riferimento del laboratorio. I dati sperimentali sono confrontati con la previsione teorica che deriva dal semplice modello a singola particella (linea continua). La

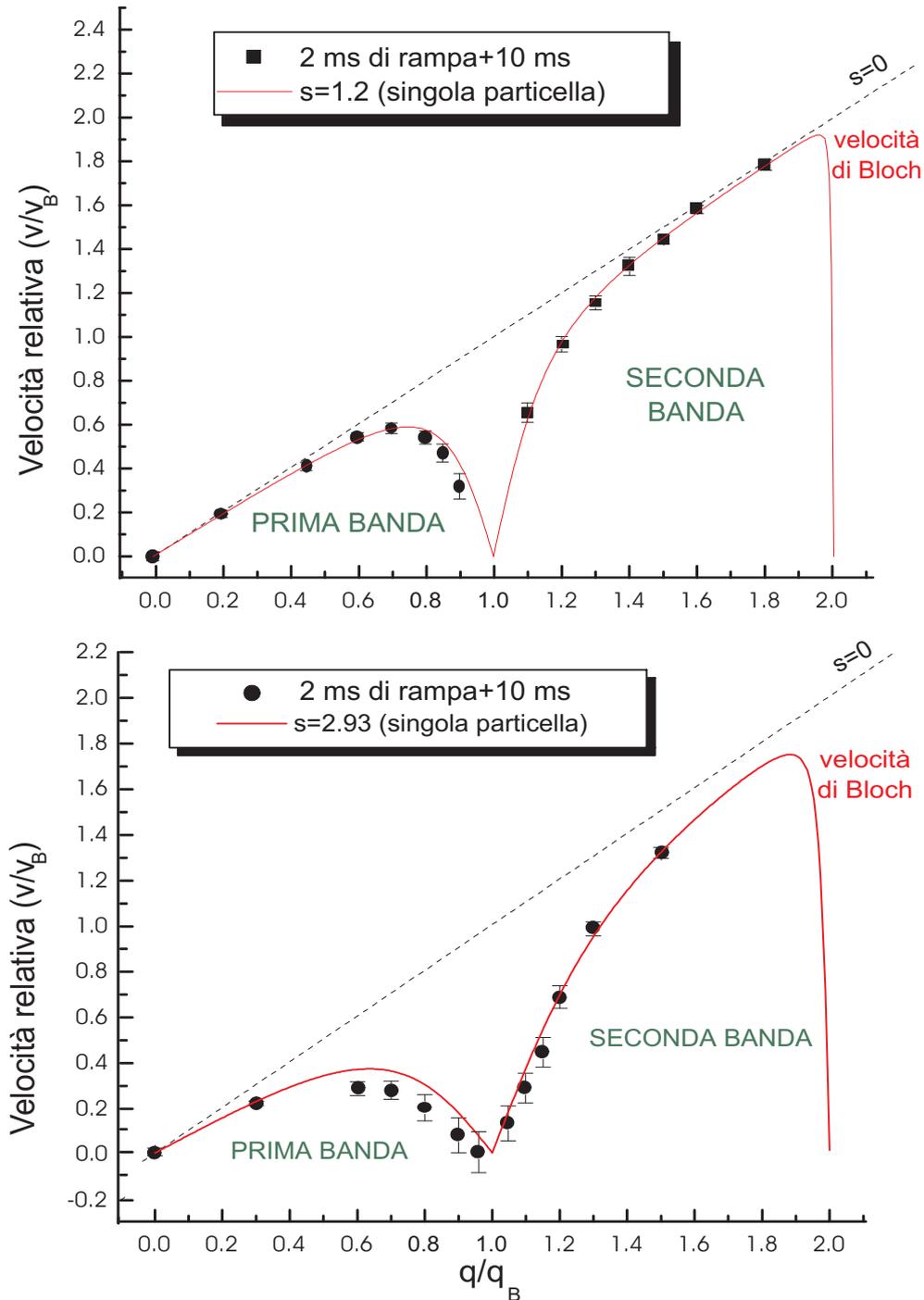


Figura 4.2: In figura sono presentati i risultati della misura della velocità relativa del condensato rispetto al reticolo nel caso in cui l'altezza del potenziale ottico è  $s = 1.2$  (in alto) e  $s = 2.9$  (in basso) in funzione del quasiimpulso  $q$ . La linea continua è la previsione teorica che si ottiene dal modello a singola particella, mentre quella tratteggiata rappresenta la velocità corrispondente al caso imperturbato ( $s = 0$ ). In prossimità del bordo zona si ha una notevole alterazione nella velocità degli atomi rispetto al caso imperturbato, dato che questi sono fermi nel reticolo.

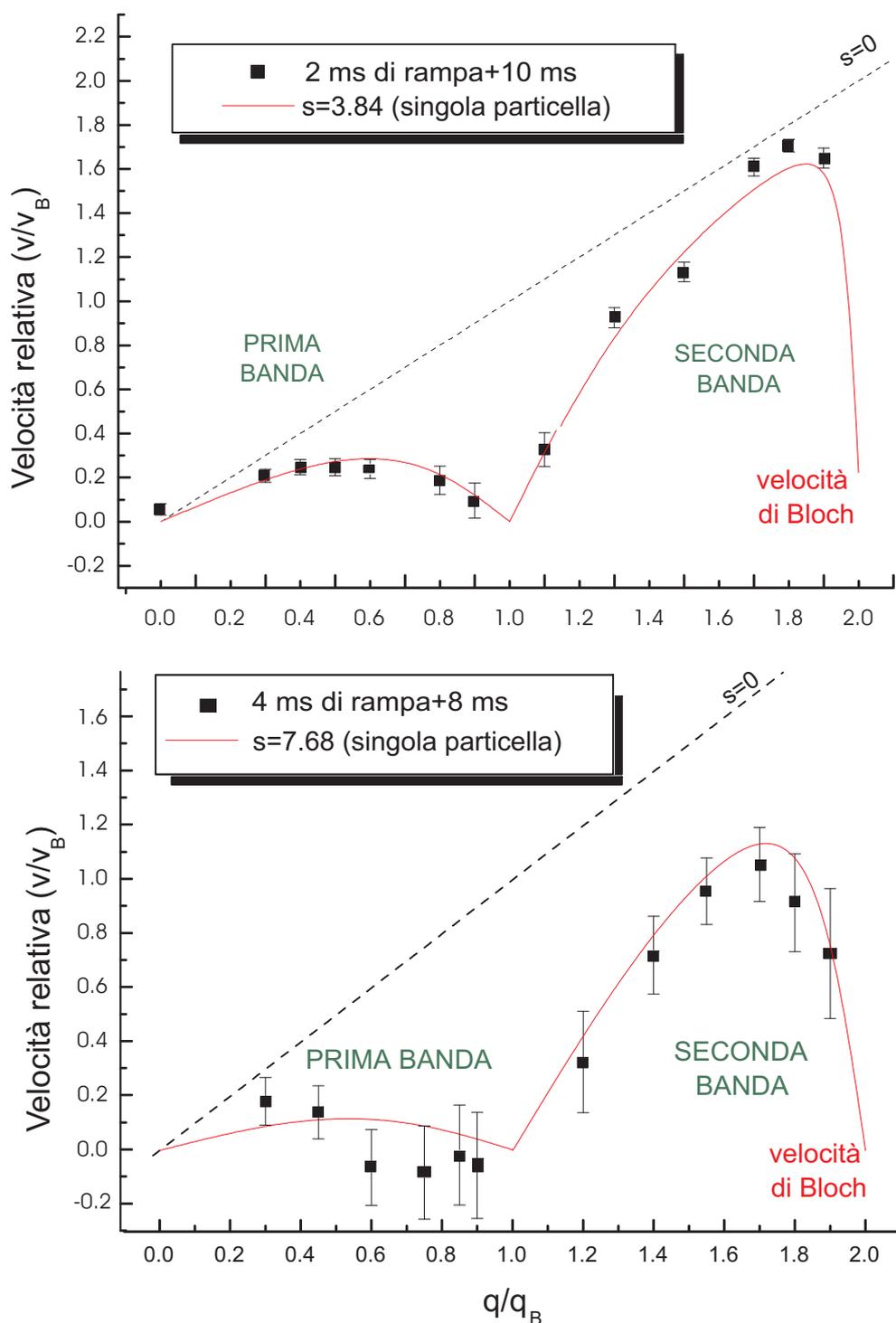


Figura 4.3: Altre misure della velocità di Bloch per diversi valori di  $s$ , rispettivamente 3.8 (in alto) e 7.7 (in basso). L'errore molto maggiore che si ha in quest'ultimo caso rispetto agli altri è dovuto alla maggiore durata della rampa di accensione del reticolo: per problemi di adiabaticità causati dall'elevata intensità del potenziale periodico questa è stata portata a 4 ms.

nostra indagine ha coperto una regione di quasiimpulso  $q$  compreso tra 0 e  $2q_B$ , con  $q_B = \hbar k$  quasiimpulso di Bragg, che coincide con le prime due zone di Brillouin del nostro sistema (si ricordi che la velocità di Bloch è antisimmetrica rispetto a  $q = 0$ ). La procedura adiabatica di caricamento degli atomi nel reticolo ottico ci permette di popolare separatamente le due bande, così da realizzarne una spettroscopia  $s$  di elevata precisione in termini di velocità di Bloch del condensato. Nelle figure, dunque, per  $0 < q < q_B$  è riportata la velocità di Bloch relativa alla prima banda, mentre per  $q_B < q < 2q_B$  quella relativa alla seconda. Il calcolo teorico è invece basato sulla diagonalizzazione al primo ordine della teoria perturbativa dell'Hamiltoniana di singola particella [43]

$$\tilde{H} = \frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + sE_{Rec} \cos^2(kx) \quad (4.3)$$

ad  $s$  fissato per un grande numero di valori del quasiimpulso  $q$ , che compare nella forma degli autovalori per l'energia  $E_{n,q}$ . I risultati tengono conto dell'interazione tra le prime 5 bande energetiche.

Come si può notare nelle figure 4.2 e 4.3, l'accordo tra dati sperimentali e previsioni teoriche è notevole: la velocità relativa tra condensato e reticolo si discosta in maniera evidente da quella che si ha nel caso di non interazione ( $s = 0$ ), fino ad annullarsi in corrispondenza del bordo delle prime due zone di Brillouin ( $q = q_B, 2q_B$ ). La notevole discontinuità nella derivata della velocità riflette quella nella curvatura dell'energia al passaggio tra prima e seconda zona. Incrementando l'intensità dei fasci che generano il reticolo abbiamo analizzato il caso di quattro diversi valori per l'altezza  $s$ . Aumentando l'altezza si assiste ad un progressivo discostamento della velocità dal caso libero: questo è esattamente il comportamento che ci si può aspettare, dato che più il potenziale periodico è elevato, più il profilo delle bande viene schiacciato verso un valore costante, con derivata prima e velocità di Bloch

molto contenute (vedi anche fig. 2.3a).

Nell'ultimo caso, il potenziale molto intenso ci ha indotti ad utilizzare una rampa di accensione molto lunga (4 ms), per evitare la popolazione indesiderata di bande diverse da quella in esame durante la misura. Proprio questa notevole durata è la principale fonte di incertezza che dilata le barre d'errore quasi quadruplicandole rispetto ai casi con  $s$  più basso. L'andamento medio è comunque ampiamente consistente con la curva teorica.

Inoltre, avvicinandosi progressivamente al bordo zona, la sempre minore adiabaticità del processo di accensione tende ad aumentare l'incertezza nelle misure, fino a renderle inutilizzabili per  $0.95q_B < q < 1.05q_B$ .

#### 4.2.1 Misura indiretta della massa efficace $m^*$ del condensato

Se la frequenza di campionamento nello spazio degli impulsi di ciascuna banda è sufficientemente elevata, specialmente nelle zone dove la variazione nella velocità è più grossa, dovrebbe essere possibile risalire al profilo della massa efficace  $m^*$  che il condensato possiede in funzione del quasiimpulso  $q$ . In linea di principio, infatti, la relazione che lega massa efficace e velocità di Bloch deriva direttamente dalle equazioni 2.22 e 2.23:

$$m^* = \hbar \left( \frac{\partial}{\partial q} v \right)^{-1}. \quad (4.4)$$

Dai dati sperimentali sulla velocità possiamo estrarre il rapporto incrementale finito  $\Delta v / \Delta q$  e, se la velocità è stata misurata per un sufficiente numero di valori del quasiimpulso  $q$ , uguagliarlo alla derivata continua, scrivendo  $\Delta v / \Delta q \simeq \partial v / \partial q$ . Il risultato di questa procedura è mostrato in figura 4.4, dove la linea continua indica il valore di  $m^*$  previsto teoricamente. Come set di dati sperimentali si è scelto quello corrispondente alla figura 4.2 con  $s = 1.32$ . Come si può notare, l'accordo è notevole in prossimità del bor-

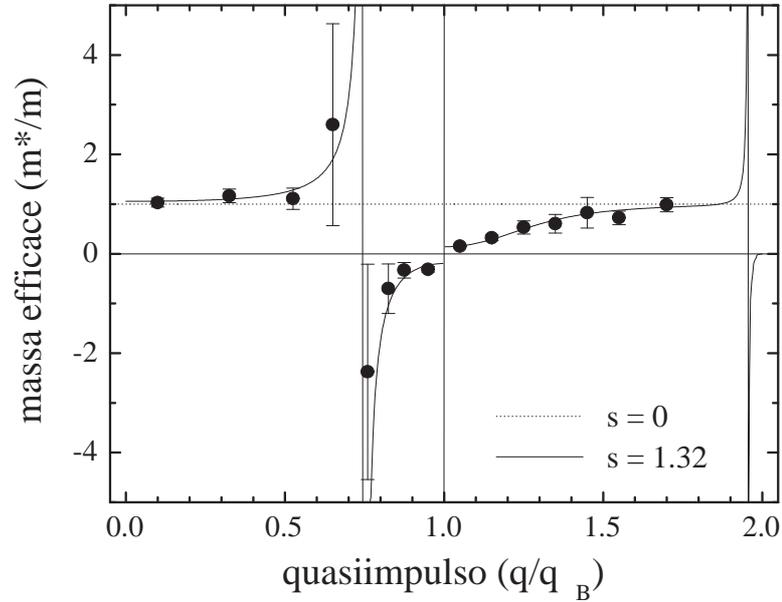


Figura 4.4: Misura indiretta del rapporto tra massa efficace  $m^*$  e massa reale  $m$  del condensato in funzione del quasiimpulso  $q/q_B$ . La linea continua è la previsione teorica ricavata dal modello a singola particella, mentre quella tratteggiata rappresenta il valore di massa imperturbato

do zona, dove la velocità di Bloch del condensato ha una forte variazione. In prossimità del flesso dell'energia, dove la velocità è stazionaria, le barre d'errore crescono notevolmente, dato che l'errore relativo sul  $\Delta v$  misurato diviene molto grande. L'andamento è comunque ben riprodotto anche in questa regione.

Questa consistenza non è implicita nel buon accordo che si ha tra la velocità misurata e la velocità di Bloch teorica, poiché se avessimo campionato ad intervalli di  $q$  troppo grandi, la procedura qui descritta avrebbe portato ad una discrepanza che sorge poiché l'approssimazione  $\Delta v/\Delta q \simeq \partial v/\partial q$  cessa di

valere. Possiamo dunque ragionevolmente affermare che la frequenza con cui abbiamo scelto di campionare le bande energetiche definite dal reticolo ottico è adeguata ad un esperimento mirato all'osservazione di effetti di massa efficace sull'espansione del condensato.

### 4.3 Focalizzazione di un'onda di materia coerente

In sezione 2.7 è stato presentato un modello unidimensionale per l'espansione di un condensato di Bose-Einstein all'interno di un reticolo ottico mobile [13]. La configurazione sperimentale del nostro apparato ci permette di osservare l'alterazione che la presenza del potenziale periodico produce su ciascuna delle due dimensioni della nube atomica, e crea la possibilità di un confronto di tale modello teorico con la realtà.

La procedura sperimentale seguita in questo tipo di misure è identica a quella utilizzata nella prima parte dell'esperimento (sez. 4.2); l'analisi dei dati e la scelta degli eventi utilizzabili ai fini della discussione dei risultati sono però più critici rispetto alle misure di velocità di Bloch. Infatti, se la posizione del centro di massa del condensato che si muove in un reticolo ottico non dipende dal numero di atomi che formano il condensato, i suoi raggi, nell'approssimazione di Thomas-Fermi, seguono la relazione (vedi eq. 1.33):

$$\sigma_{TF} \propto N^{1/5}. \quad (4.5)$$

L'osservazione dell'estensione del condensato in funzione del quasiimpulso  $q$  relativo al reticolo, pertanto, dipenderà consistentemente dal numero di atomi  $N$  che si ottiene a seguito della procedura di condensazione. Nonostante la possibilità di riscaldare le dimensioni del condensato col numero di atomi, che rimane comunque stimabile tramite un fit delle immagini in assorbimen-

to [40], ci aspettiamo che la qualità delle misure che si ottengono sia tanto maggiore quanto più costante viene mantenuto il numero di atomi tra misura e misura. Infatti, la notevole densità ottica di un condensato (definita nella 3.9) introduce fenomeni di saturazione del contrasto del nostro rivelatore CCD, che porta ad una pesante sottostima del numero di atomi, sempre più accentuata via via che  $N$  cresce. Questo è uno dei motivi per cui, come vedremo più avanti, abbiamo cercato di mantenere costante il numero di atomi tra misura e misura indipendentemente dalla possibilità di normalizzazione dei raggi del condensato.

Sebbene il valore finale della radiofrequenza alla fine della rampa di evaporazione (vd. cap. 3) ci permetta in linea di principio di fissare il numero di atomi  $N$ , bisogna ricordare che ciò rimane vero solo se il valore di fondo del campo magnetico di trappola non subisce particolari variazioni tra misura e misura. Poiché questo dipende da un certo numero di parametri sperimentali non controllabili, primo fra tutti la temperatura delle bobine che generano il campo magnetico di intrappolamento, è necessario modificare *in itinere* la frequenza di taglio a seconda dell'andamento osservato del numero di atomi presenti nel condensato. Per questo motivo abbiamo deciso di includere nell'analisi soltanto i dati relativi a condensati con un numero di atomi compreso tra 250000 e 300000, rigettando i casi in cui questa condizione non fosse soddisfatta.

Da ciascuna immagine del condensato vengono misurati i suoi raggi  $R_x$  e  $R_\perp$  ed il numero di atomi che lo costituiscono; da questi si ricavano i raggi normalizzati  $r_x$  e  $r_\perp$  mediante la relazione

$$r = R \left( \frac{N_0}{N} \right)^{1/5}, \quad (4.6)$$

dove  $N_0$  è il numero medio di atomi calcolato da tutto il set di dati. Ogni punto sperimentale è infine la media che si ottiene da una serie di dieci

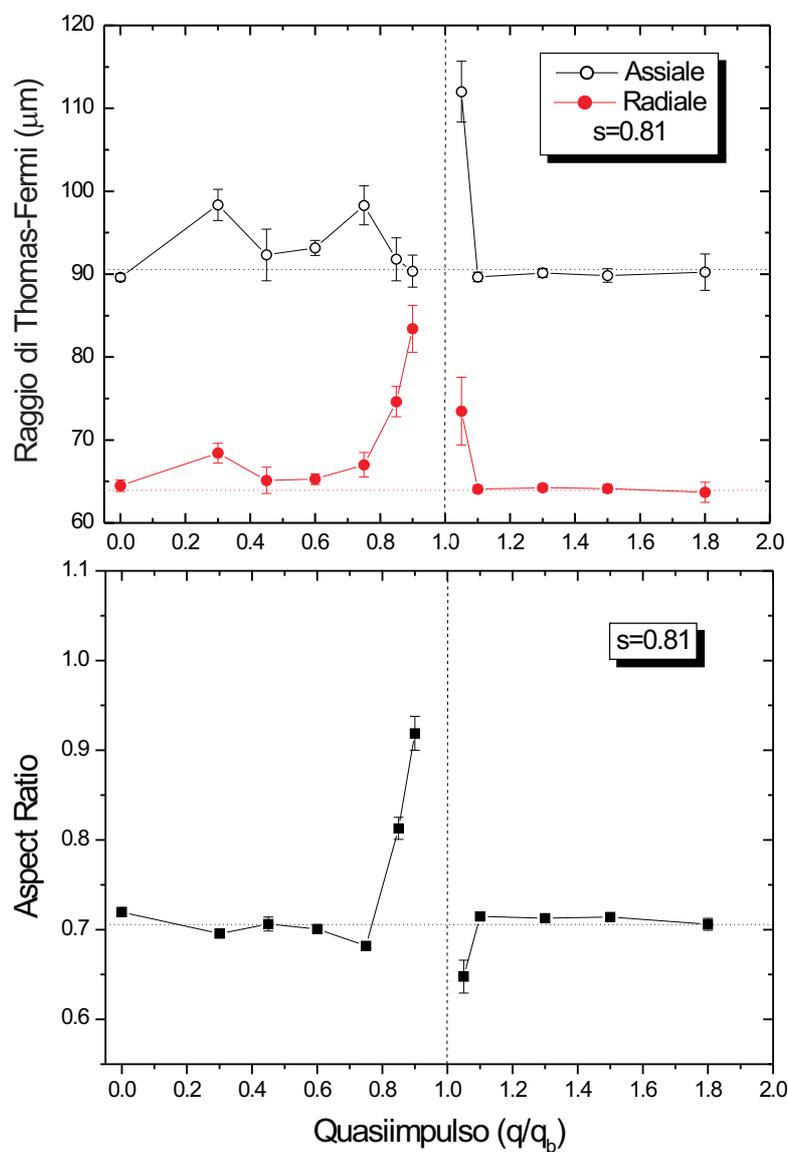


Figura 4.5: Risultati della misura dei raggi  $r_x$  e  $r_\perp$  del condensato (in alto) e del loro rapporto  $r_\perp/r_x$  (in basso) dopo l'espansione all'interno di un reticolo ottico, estratti da un fit 2D della distribuzione di densità. Le linee tratteggiate orizzontali rappresentano i valori delle grandezze in assenza di reticolo. Nel caso raffigurato si ha un'altezza del potenziale ottico  $s = 0.81$ .

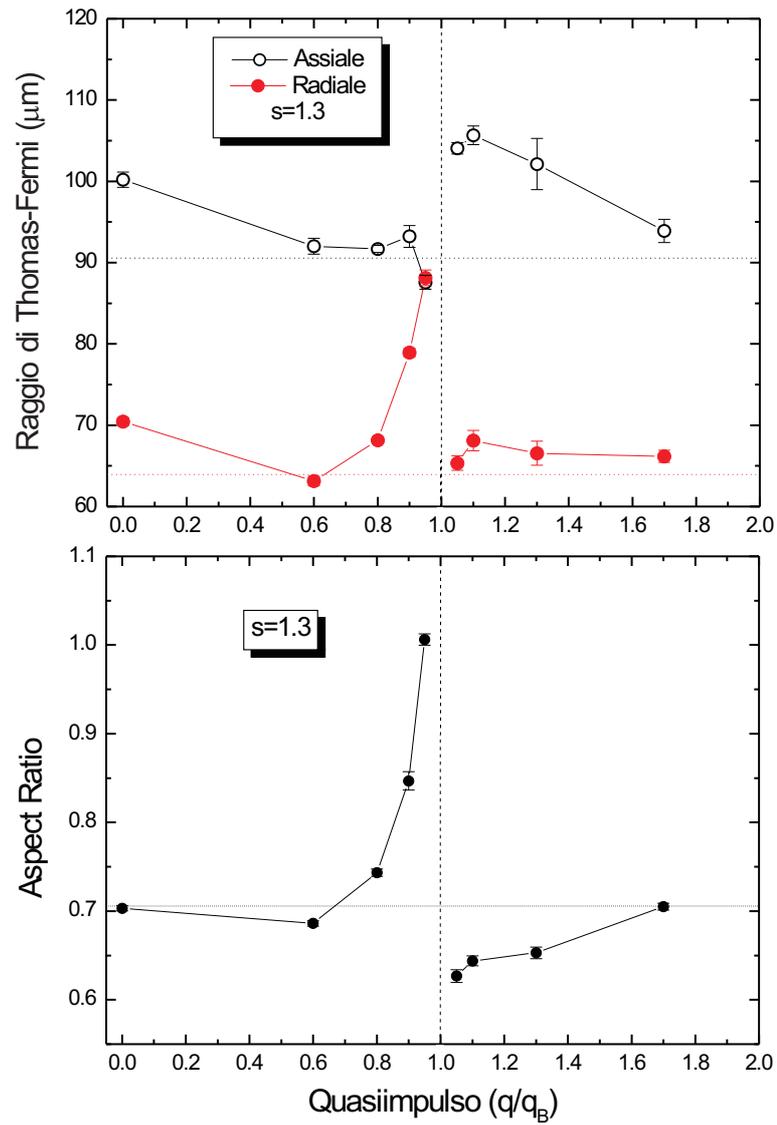


Figura 4.6: Altre misure di raggi e aspect ratio del condensato, riguardanti il caso  $s = 1.3$ .

misure a  $q$  fissato, e come incertezza viene assunta la deviazione standard dalla media di ogni set di dati. I risultati di questo tipo di misure per due distinti valori di  $s = \frac{U_{dip}}{E_{Rec}}$  sono riportati in alto nelle figure 4.5 e 4.6, mentre in basso è mostrata l'aspect ratio che si ricava direttamente dal rapporto dei raggi. L'intervallo in cui siamo in grado di variare  $q$  ci permette di ricoprire le prime due zone di Brillouin.

In prossimità del bordo zona ( $q \simeq q_B$ ) si osserva una marcata discontinuità nel comportamento dei raggi, e di conseguenza nell'aspect ratio, a seconda che  $q \rightarrow q_B^-$  o  $q \rightarrow q_B^+$ . In questa zona (vedi fig. 4.4), infatti, la massa efficace, oltre ad essere discontinua, passa da un valore negativo ad un valore positivo comunque molto prossimi allo zero: poiché il termine diffusivo  $-\hbar^2 \nabla^2 / 2m^*$  nell'equazione di Gross-Pitaevskii è inversamente proporzionale alla massa efficace del condensato, attraversando il bordo zona passeremo da una regione in cui questo termine dà luogo ad una "pressione" negativa che tende a comprimere la nuvola atomica lungo l'asse del reticolo, ad una regione in cui il termine diffusivo diviene positivo e tende ad incrementarne l'espansione (vedi anche fig. 4.8).

Per spiegare ora la dinamica di espansione radiale, prendiamo in esame la regione in cui  $q \lesssim q_B$ : la massa efficace negativa che il condensato possiede tende a comprimere lungo l'asse del reticolo la nuvola atomica, e quindi ad aumentarne l'energia di interazione residua. Per bilanciare questa crescita la direzione radiale tende ad espandere più rapidamente che nel caso libero (vedi fig. 4.8b) per diminuire la densità e quindi l'energia interna. Nella regione  $q \gtrsim q_B$ , invece, la massa efficace positiva genera una repulsione tra gli atomi che risulta in una veloce espansione del condensato lungo l'asse ottico e quindi in una rapida diminuzione dell'energia di campo medio. Dato che i moti di espansione assiale e radiale sono accoppiati proprio dalla pre-

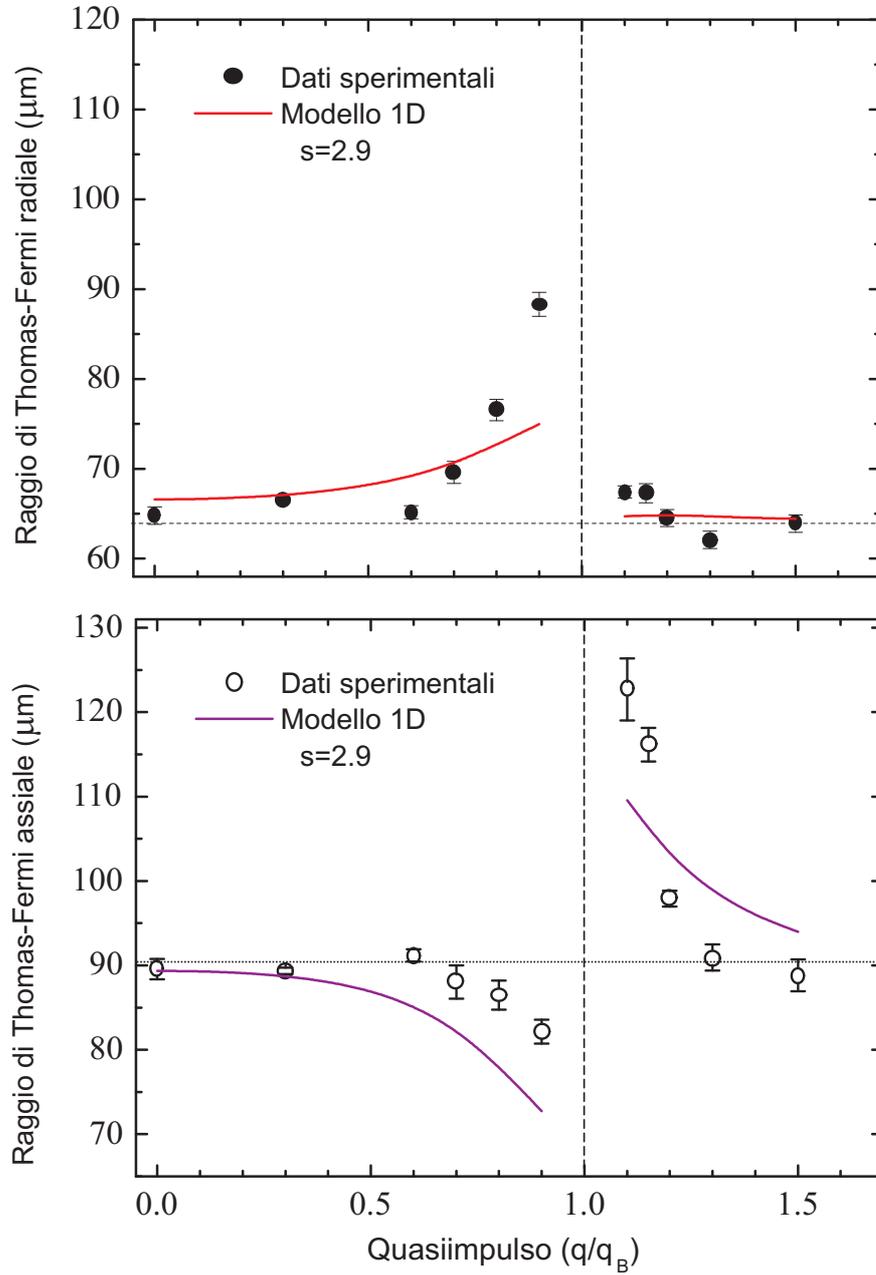


Figura 4.7: In figura è riportata la misura dei raggi del condensato per un'altezza del reticolo  $s=2.9$  in funzione del quasiimpulso  $q$ . Le linee continue corrispondono alla previsione teorica ricavata dal modello efficace 1D presentato in sez. 2.7, mentre quelle tratteggiate all'espansione di un condensato in assenza di reticolo ottico.

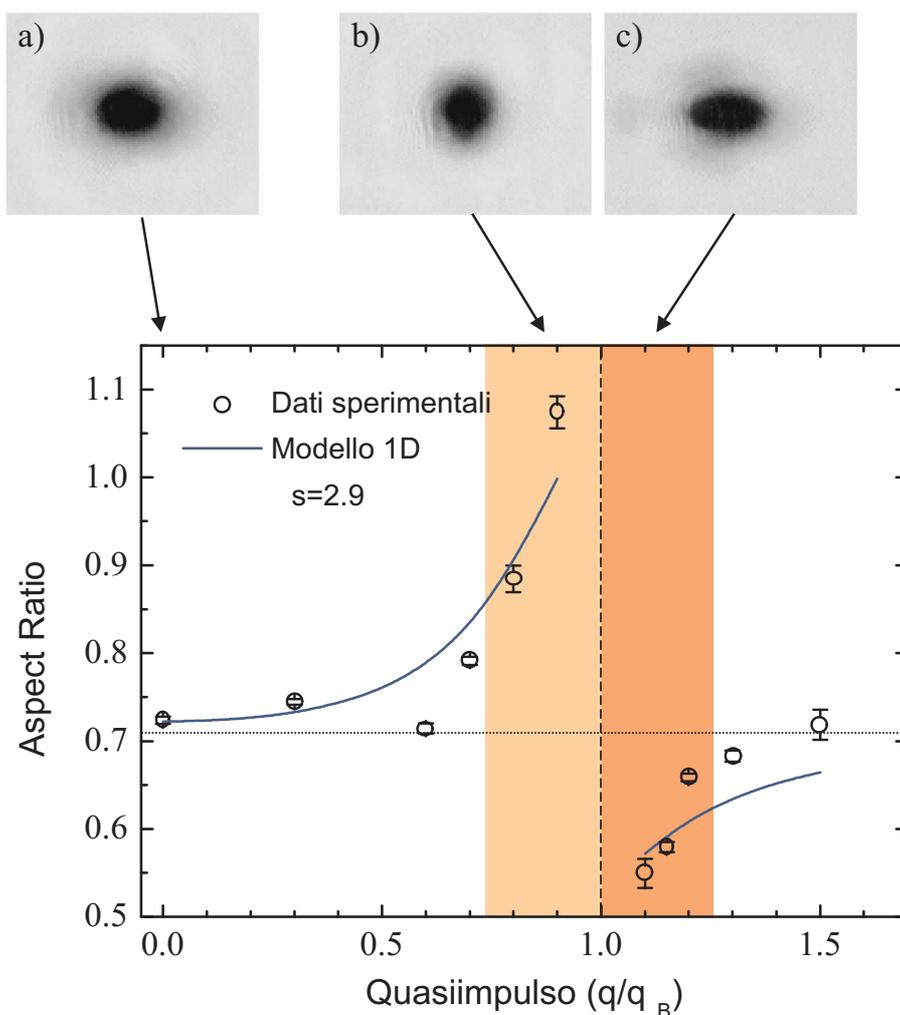


Figura 4.8: Aspect ratio del condensato ricavata dai dati sperimentali presentati in fig. 4.7, in funzione del quasiimpulso  $q$ . La linea continua rappresenta la previsione teorica del modello 1D, mentre quella tratteggiata il valore dell'aspect ratio in assenza del reticolo ottico. In alto sono riportate tipiche immagini in assorbimento del condensato per  $q = 0$  (a),  $q \rightarrow q_B^-$  (b) e  $q \rightarrow q_B^+$  (c). Nelle regioni colorate è evidente un effetto di focalizzazione del condensato (zona chiara) e di defocalizzazione (zona scura) lungo l'asse del reticolo.

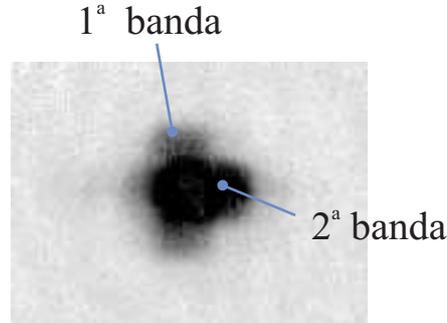


Figura 4.9: Immagine in assorbimento di un condensato all'interno del reticolo con  $q = 1.1q_B$  e  $s \simeq 8$ . In prossimità del bordo zona la condizione di adiabaticità, per potenziali intensi, si rende più difficile da soddisfare. Si può infatti notare la popolazione non nulla di almeno due bande, a cui corrisponde un'aspect ratio completamente diversa. E' comunque evidente il comportamento diverso per le due componenti, in accordo con quanto mostrato nei risultati dell'esperimento.

senza delle interazioni, l'espansione radiale in quest'ultimo caso non risulta sostanzialmente modificata (fig. 4.8c).

Nelle figure 4.7 e 4.8 i dati sperimentali nel caso  $s = 2.9$ , per il quale è stato svolto lo studio più accurato, sono confrontati con le previsioni del modello teorico riportato in sezione 2.7. L'accordo qualitativo è evidente, anche se le curve teoriche non riproducono perfettamente i dati. In particolare, avvicinandosi al bordo della prima banda la compressione assiale risulta minore di quella prevista, mentre l'espansione radiale più consistente. Per quanto riguarda la seconda banda, si nota ancora una leggera discrepanza dei dati rispetto all'andamento teorico, mentre il comportamento radiale è ben riprodotto. Bisogna annotare che per  $q \simeq q_B$ , specialmente per valori di  $s$  abbastanza elevati, il processo di accensione del reticolo si allontana dalla condizione di adiabaticità richiesta per popolare una sola componente di Bloch: nonostante l'allungamento della durata della rampa di intensità, quello

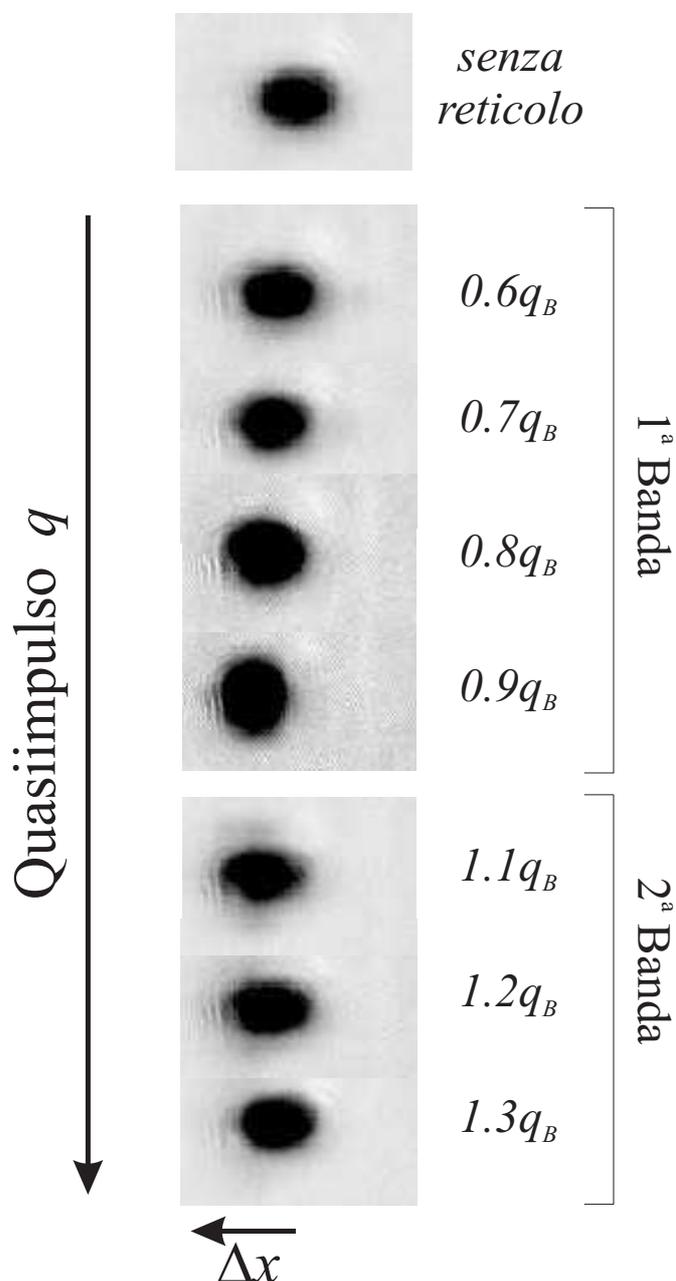


Figura 4.10: Serie di immagini in assorbimento del condensato raccolte in funzione del quasiimpulso  $q$  per  $s = 2.9$  a seguito di un'espansione di 13 ms all'interno del reticolo ottico. Si noti la discontinuità nell'aspect ratio durante il passaggio di banda, nonché la posizione variabile del centro di massa rispetto al caso libero (in alto), causata dalla dipendenza della velocità di Bloch dal quasiimpulso.

che in questo caso si osserva è una sovrapposizione tra due nuvole atomiche di differente forma risultanti dalla popolazione di due diverse bande (vedi fig. 4.9, in cui  $s \simeq 8$ ).

L'effetto generale che il reticolo esercita sul condensato è comunque evidente alla luce dei risultati ottenuti nell'esperimento, riassunti sostanzialmente in fig. 4.10. Utilizzando un reticolo ottico mobile possiamo ottenere un *effetto lente* sulla nuvola atomica; regolando opportunamente il quasiimpulso  $q$  possiamo passare da una regione in cui il condensato viene "focalizzato" lungo l'asse maggiore di simmetria ad una in cui invece viene "stirato". Si noti che il meccanismo con cui si manipola l'espansione è ben diverso da quello con cui si realizzano le ormai note ottiche per i fasci atomici: nel presente caso, infatti, l'interazione dipolare tra atomi e fotoni non attrae o respinge direttamente gli atomi dal fascio luminoso; l'alterazione indotta agisce a livello della massa efficace  $m^*$  del condensato, e ne altera la dinamica di espansione nelle due direzioni in virtù della presenza delle mutue interazioni tra atomi.



# Conclusioni

Questo lavoro di tesi ha avuto il principale obiettivo nella realizzazione di un reticolo ottico mobile tramite il quale indagare il comportamento di un condensato di atomi di  $^{87}\text{Rb}$  in presenza di una struttura periodica.

La possibilità di variare il quasimomento relativo tra il reticolo ottico e il sistema atomico ha permesso per la prima volta in questo laboratorio di effettuare una spettroscopia di bande di precisione sul condensato. In particolare si è misurata la velocità di Bloch delle prime due bande energetiche in funzione del quasiimpulso per diversi valori dell'altezza del potenziale ottico  $s$ . I dati sperimentali sono risultati in eccellente accordo con le previsioni derivanti dalla teoria a singola particella, analoga a quella utilizzata per trattare il caso di un elettrone che si muove all'interno di un cristallo. Questo accordo tra teoria e risultati sperimentali trova le basi nella minima dispersione in impulso che caratterizza un condensato di Bose-Einstein. Proprio questa caratteristica permette di trascurare la velocità quadratica media degli atomi e giungere ad una definizione univoca della velocità di Bloch per l'intero pacchetto atomico.

La risoluzione in velocità del reticolo ottico mobile realizzato durante il presente lavoro di tesi ha inoltre permesso la caratterizzazione della dinamica di espansione di un'onda di materia coerente in presenza di un potenziale periodico in funzione della loro velocità relativa. Sono stati osservati effetti di massa efficace, e per la prima volta confrontati con quelli previsti nel

modello efficace 1D presentato in sez. 2.7: le dimensioni radiale ed assiale del condensato vengono profondamente alterate dalla presenza del reticolo ottico, e l'entità di questa alterazione è risultata dipendere dal quasiimpulso relativo  $q$ . In prossimità del passaggio tra la prima e la seconda zona di Brillouin si è osservato un *effetto lente* che tende a modificare consistentemente la forma del condensato, focalizzando o defocalizzando la nuvola atomica rispetto al caso di espansione libera.

In sostanza, con questo lavoro si è dimostrata la possibilità di utilizzare un condensato come efficiente strumento di analisi di un potenziale periodico in movimento, realizzando una precisa spettroscopia di bande. Inoltre si è dimostrato come un'onda di materia coerente possa subire notevoli alterazioni alle proprie caratteristiche nell'interazione con un reticolo ottico. Se l'usuale concezione dell'interazione radiazione-materia consente l'interpretazione degli effetti che un reticolo ottico materiale esercita su un raggio di luce coerente (come, ad esempio, la diffrazione), in questo lavoro si è analizzato invece un aspetto nuovo ed affascinante dell'ottica atomica: il comportamento di un'onda di materia coerente che attraversa un *reticolo di luce*.

# Bibliografia

- [1] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, E. A. Cornell, *Science*, **269**, 198 (1995); E. A. Cornell, C. E. Wieman, *Rev. Mod. Phys.*, **74**, 875 (2002).
- [2] K. B. Davis, M. O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. Van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.*, **75**, 3969 (1995); W. Ketterle, *Rev. Mod. Phys.*, **74**, 1131 (2002).
- [3] C. Salomon, J. Dalibard, A. Aspect, H. Metcalf, and C. Cohen-Tannoudji, *Phys. Rev. Lett.*, **59**, 1659 (1987).
- [4] P. E. Moskowitz, P. L. Gould, S. R. Atlas, and D. E. Pritchard, *Phys. Rev. Lett.*, **51**, 370 (1983).
- [5] S. R. Wilkinson, C. F. Bharucha, K. W. Madison, Q. Niu, M. G. Raizen, *Phys. Rev. Lett.*, **76**, 4512 (1996).
- [6] M. Ben Dahan, E. Peik, J. Reichel, Y. Castin, and C. Salomon, *Phys. Rev. Lett.*, **76**, 4508 (1996).
- [7] B. P. Anderson, M. A. Kasevich, *Science*, **282**, 1686 (1998).
- [8] M. Kozuma, L. Deng, E. W. Hagley, J. Wen, R. Lutwak, K. Helmerson, S. L. Rolston, W. D. Phillips, *Phys. Rev. Lett.*, **82**, 871, (1999).

- 
- [9] C. Orzel, A. K. Tuchman, M. L. Feneslau, M. Yasuda, M. A. Kasevich, *Science*, **291**, 2386 (2001).
- [10] F. S. Cataliotti, S. Burger, C. Fort, P. Maddaloni, F. Minardi, A. Trombettoni, A. Smerzi, M. Inguscio, *Science*, **293**, 843 (2001).
- [11] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T. W. Hänsch, I. Bloch, *Nature*, **293**, 843 (2001).
- [12] O. Morsch, M. Cristiani, J. H. Müller, D. Ciampini, E. Arimondo, *Phys. Rev. A*, **66**, 021601(R), (2002).
- [13] P. Massignan e M. Modugno, *Phys. Rev. A*, **67**, 023614 (2003).
- [14] L. Fallani, F. S. Cataliotti, J. Catani, C. Fort, M. Modugno, M. Zawada, M. Inguscio, *cond-mat/0303626*, (2003).
- [15] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. Pitaevskii, S. Stringari, *Rev. Mod. Phys.*, **71**, 453 (1999).
- [16] L. Goodstein, *States of Matter*, Dover Publications, 1985.
- [17] A. S. Davydov, *Quantum Mechanics*, Pergamon Press, 1969.
- [18] N. Bogoliubov, *J. Phys. USSR*, **11**, N° 23 (1947).
- [19] Y. Castin e R. Dum, *Phys. Rev. Lett.*, **77**, 5315 (1996).
- [20] R. Grimm, M. Weidemüller, Y. Ovchinnikov, *Adv. At. Mol. Opt. Phys.*, **42**, N° 95 (2000).
- [21] F. Bassani, U. M. Grassano, *Fisica dello Stato Solido*, Bollati Boringhieri, (2000).

- 
- [22] J. Hecker Denschlag, J. E. Simsarian, H. Häffner, C. McKenzie, A. Browaeys, D. Cho, K. Helmerson, S. L. Rolston, W. D. Phillips, *J. Phys. B*, **35**, 3095 (2002).
- [23] L. Schiff, *Quantum Mechanics*, terza ed. (1968).
- [24] E. Peik, M. Ben Dahan, I. Bouchoule, Y. Castin, C. Salomon, *Phys. Rev. A*, **55**, 2989 (1997).
- [25] J. Stenger, S. Inouye, A. P. Chikkatur, D. M. Stamper-Kurn, D. E. Pritchard, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.*, **82**, 4569 (1999).
- [26] L. Salasnich, A. Parola e L. Reatto, *Phys. Rev. A*, **82**, 043614 (1999).
- [27] M. Fattori, *Tesi di Laurea in Fisica*, Università di Firenze, (2000).
- [28] P. Maddaloni, *Tesi di Dottorato in Fisica*, Università di Padova, (2003).
- [29] E. L. Raab, M. Prentiss, A. Cable, S. Chu, D. E. Pritchard, *Phys. Rev. Lett.*, **59**, 26311 (1987).
- [30] C. Monroe, W. Swann, H. Robinson, C. Wieman, *Phys. Rev. Lett.*, **65**, 1571 (1990).
- [31] W. Ketterle, N. J. van Druten *Advances in atomic, molecular and optical physics*, edito da B. Bederson e H. Walther, **37**, 181 (1996).
- [32] P. D. Lett, R. N. Watts, C. I. Westbrook, W. D. Phillips, *Phys. Rev. Lett.*, **61**, 169 (1988).
- [33] J. Dalibard, C. Cohen Tannoudji, *J. Opt. Soc. B*, **6**, 2023 (1989).
- [34] P. J. Hungar, D. S. Weiss, S. Chu, *J. Opt. Soc. B*, **6**, 2058 (1989).
- [35] C. Wieman, L. Hollberg, *Rev. Sci. Instrum.*, **62**, 1 (1991).

- 
- [36] W. Petrich, M. H. Anderson, J. R. Ensher, E. Cornell, *J. Opt. Soc. B*, **11**, 1332 (1994).
- [37] *Laser manipulation of ions and atoms*, Atti della scuola internazionale di Fisica "Enrico Fermi", Corso CXVIII, edito da E. Arimondo, W. D. Phillips, F. Strumia, (1991).
- [38] F. Kh. Abdullaev, B. B. Baizakov, S. A. Darmanyan, V. V. Konotop, and M. Salerno, *Phys. Rev. A*, **64**, 043606 (2001).
- [39] E. Majorana, *Nuovo Cimento*, **8**, 107 (1931).
- [40] W. Ketterle, D. S. Durfee, D. M. Stamper-Kurn, *Making, probing and understanding Bose-Einstein condensates in Bose-Einstein condensation in atomic gases*, Atti della scuola internazionale di Fisica "Enrico Fermi", Corso CXL, edito da M. Inguscio, S. Stringari e C.E. Wieman, IOS Press, Amsterdam (1999).
- [41] P. Pedri, L. Pitaevskii, S. Stringari, C. Fort, S. Burger, F. S. Cataliotti, P. Maddaloni, F. Minardi e M. Inguscio, *Phys. Rev. Lett.*, **87**, 220401 (2001).
- [42] C. Fort, F. S. Cataliotti, L. Fallani, F. Ferlino, P. Maddaloni, M. Inguscio, cond-mat/0210240, *Phys. Rev. Lett. Accepted* (2003).
- [43] S. Rolston in *Experimental quantum computation and information*, Lezioni della Scuola internazionale di Fisica "Enrico Fermi", Corso CXLVIII, edito da F. De Martini e C. Monroe,(2001).