



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PALERMO
SCUOLA DELLE SCIENZE DI BASE E APPLICATE

Corso di Laurea Magistrale in Fisica
Dipartimento di Fisica e Chimica

Trasporto di un superfluido in un potenziale periodico unidimensionale

TESI DI LAUREA DI
Simona Scaffidi Abbate

RELATORE
Massimo G. Palma
CORRELATORE
Giovanni Modugno

ANNO ACCADEMICO 2013 - 2014

MAGISTRALE



Alla mia famiglia, per avermi supportato.
A Marisa, per avermi sopportato.
A Jacopo e Simone, per farmi sempre sorridere.

Indice

Introduzione	1
1 Condensazione di Bose Einstein in reticoli ottici	3
1.1 Condensazione di Bose-Einstein	3
1.1.1 Condensazione in assenza di interazione	5
1.2 Gas di bosoni interagenti: teoria dello scattering	8
1.2.1 Risonanza di Feshbach	10
1.3 Teoria dello stato condensato: equazione di Gross-Pitaevskii e approssima- zione di Thomas-Fermi	12
1.4 Potenziali ottici	15
1.4.1 Forze dipolari	15
1.4.2 Trappola ottica red-detuned	17
1.5 Reticoli ottici	18
1.5.1 Teorema di Bloch	19
1.5.2 Dinamica semiclassica	22
2 Fisica dei condensati unidimensionali	24
2.1 Temperatura di degenerazione e di condensazione per un sistema unidi- mensionale	24
2.2 Quasicondensato unidimensionale	25
2.3 Realizzazione sperimentale di sistemi unidimensionali	26
2.4 Distribuzione dei momenti e correlazione	28
2.5 Modelli teorici	30
2.5.1 Modello di Bose-Hubbard	30
2.6 Superfluido e isolante di Mott	32
2.7 Eccitazioni di un condensato uniforme e instabilità energetica	34
2.8 Instabilità dinamica	37
2.9 Phase-Slips	40
3 Realizzazione sperimentale di una BEC di ^{39}K	46
3.1 Trappola magneto-ottica	47
3.2 Intrappolamento magnetico	49
3.3 Intrappolamento ottico	51
3.4 Acquisizione dell'immagine	53
3.5 Sistemi laser sperimentali	54

4	Osservazione dell'instabilità e delle phase-slips	56
4.1	Realizzazione esperimento	56
4.2	Misure di trasporto in assenza di reticolo	60
4.3	Misure in presenza di reticolo profondo: instabilità dinamica	65
4.4	Misure di trasporto in presenza di reticolo profondo	70
4.5	Misure di trasporto in presenza di reticolo poco profondo	74
4.5.1	Instabilità di Landau	80
	Conclusioni	83
	A Tapered Amplifier (TA)	86
	Ringraziamenti	90
	Bibliografia	91

Introduzione

Sistemi con bassa dimensionalità possiedono proprietà differenti rispetto a sistemi tridimensionali. Negli ultimi anni, è stata posta l'attenzione sul fenomeno della superfluidità e della superconduttività in sistemi unidimensionali e questi fenomeni sono stati sperimentalmente studiati in vari sistemi come i monofili superconduttivi [1, 2, 3, 4, 5], l'elio liquido in nanopori [6, 7] e gas di atomi bosonici ultra freddi in reticoli ottici [8, 9, 10, 11, 12, 13]. Tutti questi sistemi, seppur differenti, sono caratterizzati dal fatto che il trasporto in una dimensione è significativamente soppresso se confrontato con sistemi aventi dimensionalità più alte.

I sistemi unidimensionali, in generale, sono quindi caratterizzati da una maggiore sensibilità alla presenza di perturbazioni e di fluttuazioni rispetto a sistemi tridimensionali. La presenza di un ostacolo di qualunque natura, per esempio, si traduce nell'effetto dell'instabilità di Landau [14] che consiste nella generazione di fononi, per velocità maggiori di quella del velocità del suono, che si accoppiano con la parte “termica” dei condensati [15, 16].

A $T = 0$ è presente un altro tipo di eccitazione, i phase-slips locali, che non possono essere soppressi termicamente [12, 17, 18]. Questo fenomeno è stato studiato sperimentalmente solo nell'ambito dei fili superconduttori [19], che però non permettono di raggiungere il regime strettamente unidimensionale, in cui si ha un singolo canale, e che sono difficili da controllare.

In presenza di una struttura periodica, si può osservare un ulteriore tipo di instabilità, che appare in regimi di alta velocità, detta instabilità dinamica [12, 17]. Questo fenomeno è stato studiato in relazione ad array di giunzioni Josephson e può essere interpretata, almeno in alcuni regimi, come un' inversione del segno della massa efficace delle particelle.

Il mio lavoro di tesi è stato incentrato sullo studio sperimentale di questi fenomeni che comportano la rottura della superfluidità del sistema, utilizzando come campioni dei condensati di Bose-Einstein atomici.

Si ricordi che con “Condensazione di Bose-Einstein” si intende il fenomeno secondo cui al di sotto di una certa temperatura critica T_c un' elevata frazione di particelle bosoniche occupa lo stato di singola particella a più bassa energia. Nel caso di sistemi unidimensionali, la condensazione può avvenire solo a $T = 0$, in quanto il potenziale chimico del sistema rimane sempre sufficientemente negativo da non comportare mai un'occupazione macroscopica dello stato a più bassa energia nel limite di un grande numero di particelle a temperatura finita. Di conseguenza, in caso di T finita, si parla di “*quasicondensato*” ovvero un sistema che ha le proprietà di un condensato solo su una scala di lunghezza limitata, determinata dalla lunghezza di coerenza.

La combinazione di quasicondensati realizzati con atomi ultrafreddi, che hanno un elevato grado di controllo, e di reticoli ottici, speciali potenziali periodici “perfetti”, ci hanno permesso uno studio accurato di questi fenomeni.

Il lavoro di tesi qui riportato è stato realizzato presso i laboratori del “Lens” (Laboratorio Europeo per la Spettroscopia ottica Non lineare) ed è così organizzato. Il primo capitolo contiene la teoria necessaria per comprendere il fenomeno di condensazione di Bose-Einstein nel caso di particelle non interagenti e interagenti. In questa panoramica trova posto la risonanza di Feshbach [20, 21] che permette di variare l’energia di interazione delle particelle. Inoltre viene introdotto la teoria relativa ai potenziali ottici ponendo particolare attenzioni ai reticoli e al comportamento del condensato al loro interno.

Il secondo capitolo è nuovamente un capitolo teorico, ma in esso si pone l’attenzione alla fisica che regola i sistemi unidimensionali. Verranno quindi illustrate le caratteristiche che differenziano un sistema unidimensionale da uno tridimensionale e i modelli che lo descrivono. Inoltre l’attenzione viene posta sulle eccitazioni di un condensato uniforme e in particolare sul fenomeno dell’instabilità energetica (o di Landau), dinamica e dei phase-slips.

Nel terzo capitolo si illustreranno le tecniche sperimentali utilizzate per la realizzazione dei condensati di ^{39}K unidimensionale.

Nel quarto capitolo sono riportati i risultati sperimentali ottenuti a seguito dello studio dell’oscillazione del condensato all’interno di un reticolo periodico unidimensionale. In particolare studiando l’evoluzione del momento medio del condensato al variare del tempo e osservando il fatto che a un certo istante di tempo la sua crescita è bloccata e accompagnata da una perdita di superfluidità, è possibile studiare l’instabilità dinamica. Studiando invece l’andamento dello smorzamento dell’oscillazione al variare del momento impresso al condensato e al variare dell’interazione è stato possibile studiare il fenomeno delle phase-slips e dell’instabilità energetica.

Capitolo 1

Condensazione di Bose Einstein in reticoli ottici

In questo capitolo saranno richiamati alcuni concetti teorici fondamentali utili per la comprensione di questo lavoro di tesi. In particolare, dopo aver introdotto il fenomeno della condensazione di Bose-Einstein, si tratteranno le proprietà di un gas di bosoni non interagenti. Successivamente sarà preso in esame il caso di un gas di bosoni interagenti e si introdurrà la teoria di scattering e la teoria di Gross-Pitaevskii. Infine sarà introdotta la fisica dei potenziali ottici e sarà trattato il comportamento di un condensato all'interno di un reticolo ottico periodico.

1.1 Condensazione di Bose-Einstein

Con “*Condensazione di Bose-Einstein*” si intende il fenomeno secondo cui al di sotto di una certa temperatura critica T_c un' elevata frazione di particelle bosoniche occupa lo stato di singola particella a più bassa energia. Tale fenomeno è stato predetto nel 1924 da Bose e Einstein [22, 23], ma venne per la prima volta osservato sperimentalmente nel 1995 quando sono stati realizzati, quasi in contemporanea, i condensati di atomi alcalini quali rubidio [24], sodio [25] e litio [26].

I bosoni sono particelle di spin intero non soggette al principio di esclusione di Pauli.

Ad alte temperature tali particelle possono essere trattate come particelle puntiformi, distinguibili, obbedienti alla statistica di Boltzmann. Quando però la temperatura si avvicina allo zero, esse possono tutte occupare lo stato di singola particella a più bassa energia e di conseguenza il numero di occupazione di tale stato diventa macroscopicamente grande. Quando ciò accade si è in presenza di una transizione di fase e si viene a formare il condensato di Bose Einstein.

Nel momento in cui tutte le particelle si trovano nello stesso stato quantico non è più possibile trascurare la loro natura quantistica nè è possibile trattarle come se fossero particelle distinguibili bensì è necessario descriverle per mezzo di funzioni d'onda. In particolare, vista la natura bosonica del sistema in esame, la funzione d'onda complessiva deve essere simmetrica per scambio di coppie di particelle.

Se si considera la lunghezza d'onda di de Broglie λ_{dB}

$$\lambda_{dB} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{mk_B T}} \quad (1.1)$$

dove con m si intende la massa della particella, con T la temperatura e con k_B la costante di Boltzmann si ha che la transizione di fase avviene quando vale la condizione per cui la distanza tra le particelle è dell'ordine della lunghezza d'onda di de Broglie (fig. 1.1) ovvero quando

$$\left(\frac{V}{N}\right)^{1/3} \approx \lambda_{dB} \quad (1.2)$$

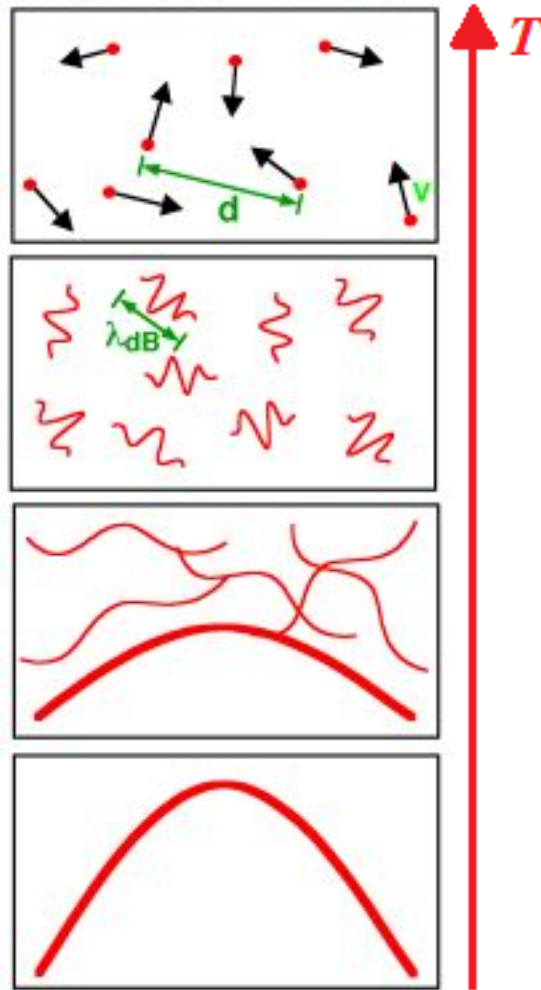


Figura 1.1: Comportamento di un sistema di bosoni al variare della temperatura. A $T \gg T_c$ (riquadro in alto) la separazione tra le particelle è molto maggiore rispetto la lunghezza d'onda di de Broglie ed esse possono essere trattate come particelle puntiformi distinguibili. Al diminuire della temperatura (secondo e terzo riquadro) comincia a osservarsi la natura ondulatoria delle particelle. A $T \approx T_c$, (riquadro in basso) le funzioni d'onda di ogni particella si sovrappongono e si forma il condensato

1.1.1 Condensazione in assenza di interazione

Nel caso di bosoni non interagenti all'equilibrio termico, il numero medio di occupazione dello stato ν di singola particella è dato dalla distribuzione di Bose-Einstein [27]

$$n_{BE}(\epsilon, T) = \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/kT} - 1} \quad (1.3)$$

dove con ϵ_ν si intende l'energia dello stato di singola particella per il potenziale di intrappolamento preso in considerazione e con μ il potenziale chimico. Tale potenziale è una funzione del numero di particelle N e della temperatura T ed è dato dalla condizione che il numero totale di particelle sia uguale alla somma dei numeri di occupazione degli stati di singola particella. Ad alte T il potenziale chimico è molto minore di ϵ_{min} , l'energia del più basso stato di singola particella, in quanto il numero medio di occupazione di ogni stato è minore dell'unità, e quindi vale la relazione

$$\exp [(\mu - \epsilon)/kT] \ll 1 \quad (1.4)$$

Abbassando la temperatura, invece, il potenziale chimico aumenta così come il numero medio di occupazione. Tuttavia, esso non può superare il valore di ϵ_{min} in quanto in questo caso la distribuzione di Bose-Einstein valutata per lo stato di singola particella a più bassa energia sarebbe negativa e di conseguenza non avrebbe significato fisico. In formule, il potenziale chimico si ricava dalla relazione

$$\frac{N}{V} = \int_0^\infty n_{BE} g(\epsilon) d\epsilon \quad (1.5)$$

dove con $g(\epsilon)$ si intende la densità degli stati per unità di volume.

In tre dimensioni, per una particella libera in un particolare stato interno, ciascuno stato quantico occupa un volume effettivo pari a $(2\pi\hbar)^3$ nello spazio delle fasi. La regione nello spazio dei momenti in cui il momento è minore di $\mathbf{p}$ ha un volume pari a $\frac{4\pi p^3}{3}$ (che è uguale a quello di una sfera di raggio p) e poichè si ha che $\epsilon_{\mathbf{p}} = \frac{p^2}{2m}$ il numero di stati $G(\epsilon)$ con energia minore di ϵ è data dalla relazione (per particelle di spin 0)

$$G(\epsilon) = V \frac{4\pi}{3} \frac{(2m\epsilon)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} = V \frac{2^{1/2}}{3\pi^2} \frac{(m\epsilon)^{3/2}}{\hbar^3} \quad (1.6)$$

dove con V si intende il volume del sistema. Di conseguenza, poichè il numero di stati con energia compresa tra ϵ e $\epsilon + d\epsilon$ è pari a $g(\epsilon)d\epsilon$ si trova che la densità degli stati è pari a

$$g(\epsilon) = \frac{dG(\epsilon)}{d(\epsilon)} \quad (1.7)$$

Ciò comporta che in tre dimensioni la densità degli stati è pari a

$$g(\epsilon) = \frac{Vm^{3/2}}{2^{1/2}\pi^2\hbar^3} \epsilon^{1/2} \quad (1.8)$$

Più in generale, per una particella in d dimensioni, si ha che la densità degli stati ha un andamento del tipo $g(\epsilon) \propto \epsilon^{(d/2-1)}$ e quindi in due dimensioni la densità degli stati è indipendente dall'energia.

Si consideri adesso una particella in un potenziale di tipo armonico anisotropo (trappola armonica)

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}(K_1x^2 + K_2y^2 + K_3z^2) = \frac{1}{2}m(\omega_1^2x^2 + \omega_2^2y^2 + \omega_3^2z^2) \quad (1.9)$$

dove si è fatto uso della relazione $\omega_i^2 = \frac{K_i}{m}$.

In questo caso i livelli di energia sono dati dalla relazione

$$\epsilon(n_1, n_2, n_3) = (n_1 + \frac{1}{2})\hbar\omega_1 + (n_2 + \frac{1}{2})\hbar\omega_2 + (n_3 + \frac{1}{2})\hbar\omega_3 \quad (1.10)$$

dove gli n_i sono numeri interi maggiori o uguali a zero.

Per determinare la densità degli stati $g(\epsilon)$ in presenza di trappola armonica si può partire ricavando il numero di stati $G(\epsilon)$ con energia minore di un dato ϵ . Se si considerano energie superiori a $\hbar\omega_i$, si possono trattare le variabili n_i come variabili continue e trascurare l'energia di punto zero. In una tale configurazione, si possono quindi introdurre tre nuove variabili $\epsilon_i = \hbar\omega_i n_i$ e considerare come superficie a costante energia il piano dato da $\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$. In questo modo si trova che $G(\epsilon)$ è proporzionale al volume del primo ottante limitato dal piano

$$G(\epsilon) = \frac{1}{\hbar^3\omega_1\omega_2\omega_3} \int_0^\epsilon d\epsilon_1 \int_0^{\epsilon-\epsilon_1} d\epsilon_2 \int_0^{\epsilon-\epsilon_1-\epsilon_2} d\epsilon_3 = \frac{\epsilon^3}{6\hbar^3\omega_1\omega_2\omega_3} \quad (1.11)$$

Poichè vale l'equazione 1.7, la densità degli stati in presenza di una trappola armonica ha la forma

$$g(\epsilon) = \frac{\epsilon^2}{2\hbar^3\omega_1\omega_2\omega_3} \quad (1.12)$$

In generale, per un potenziale armonico di dimensione d , la densità degli stati assume la forma

$$g(\epsilon) = \frac{\epsilon^{d-1}}{(d-1)! \prod_{i=1}^d \hbar\omega_i} \quad (1.13)$$

Una volta nota la densità degli stati è possibile ricavare quindi il numero di particelle utilizzando l'equazione 1.5 e ottenere il valore della temperatura critica T_c .

Quando il numero di particelle N è sufficientemente alto, è possibile trascurare l'energia di punto zero nell'equazione 1.5 ed è possibile porre l'energia dello stato più basso, ϵ_{min} , pari a zero. In questa situazione, la temperatura critica T_c è determinata dalla condizione che il numero totale delle particelle si trova negli stati eccitati. In formule,

$$N = N_{ex}(T_c, \mu = 0) = \int_0^\infty g(\epsilon) \frac{1}{e^{\frac{\epsilon}{kT_c}} - 1} \quad (1.14)$$

in quanto il numero totale delle particelle ha il suo più grande valore quando il potenziale chimico pari a zero. Risolvendo l'equazione si trova che, per un potenziale di tipo armonico tridimensionale, la temperatura critica è pari a

$$kT_c \approx 0.94\hbar\bar{\omega}N^{1/3} \quad (1.15)$$

dove $\bar{\omega} = (\omega_1\omega_2\omega_3)^{1/3}$.

Per un gas di Bose uniforme in una scatola tridimensionale di volume V , invece, si ottiene

$$kT_c \approx 3.31 \frac{\hbar^2 n^{2/3}}{m} \quad (1.16)$$

dove $n = N/V$ è la densità di numero.

Più in generale si può scrivere

$$kT_c = \frac{N^{1/\alpha}}{[C_\alpha \Gamma(\alpha) \zeta(\alpha)]^\alpha} \quad (1.17)$$

dove con $\Gamma(\alpha)$ si intende la funzione gamma, con $\zeta(\alpha)$ la funzione zeta di Riemann e con α un indice legato al sistema in esame. Nel caso di una scatola esso è legato alle dimensioni di essa dalla relazione $\alpha = d/2$ mentre nel caso di un potenziale armonico $\alpha = d$.

Anche la costante C_α ha una forma differente a seconda che si è in presenza di una scatola o di un potenziale armonico. In particolare

$$C_\alpha = \frac{Vm^\alpha}{2^{1/2}\pi^2\hbar^3} \quad (1.18)$$

nel caso di una scatola, e

$$C_\alpha = \frac{1}{(\alpha-1)! \prod_i \hbar\omega_i} \quad (1.19)$$

nel caso di un potenziale armonico.

E' necessario porre l'attenzione sul fatto che se si è in presenza di un sistema con dimensione minore di 3, non è sempre possibile definire una temperatura finita di transizione. Questo deriva dal fatto che la funzione zeta di Riemann diverge quando $\alpha \leq 1$. Ciò comporta che la condensazione di Bose-Einstein in una scatola bidimensionale può avvenire solo a temperatura nulla. Tuttavia essa si può osservare a temperatura finita se le particelle sono confinate in un potenziale di tipo armonico. Nel caso unidimensionale, poichè $\alpha \leq 1$ in entrambi i casi presi in considerazione, la funzione zeta di Riemann diverge e ciò comporta che la temperatura di transizione è nulla sia in presenza di un potenziale armonico sia in presenza di una scatola (Tab. 1.1). Si rimanda al capitolo 2 per un ulteriore approfondimento dei sistemi unidimensionali.

d	Scatola	Potenziale armonico
1	$T_c = 0$	$T_c = 0$
2	$T_c = 0$	$T_c > 0$
3	$T_c > 0$	$T_c > 0$

Tabella 1.1: Condizioni per la condensazione di Bose Einstein in una scatola e in un potenziale armonico per diverse dimensioni del sistema

Una volta noto il numero di particelle negli stati eccitati è possibile ricavare il numero di particelle nello stato di condensato utilizzando la relazione

$$N_0(T) = N - N_{ex}(T) \quad (1.20)$$

dove con N si intende il numero totale di particelle e con N_{ex} il numero di particelle negli stati eccitati.

Nel caso di particelle in un potenziale armonico tridimensionale si ha che il numero di particelle nel condensato è

$$N_0 = N[1 - (\frac{T}{T_c})^3] \quad (1.21)$$

mentre nel caso di particelle in una scatola tridimensionale di volume V

$$N_0 = N[1 - (\frac{T}{T_c})^{3/2}] \quad (1.22)$$

Nella figura 1.2 viene confrontato l'andamento della frazione di condensato al variare della temperatura in presenza di una scatola 3D o in presenza di un potenziale armonico.

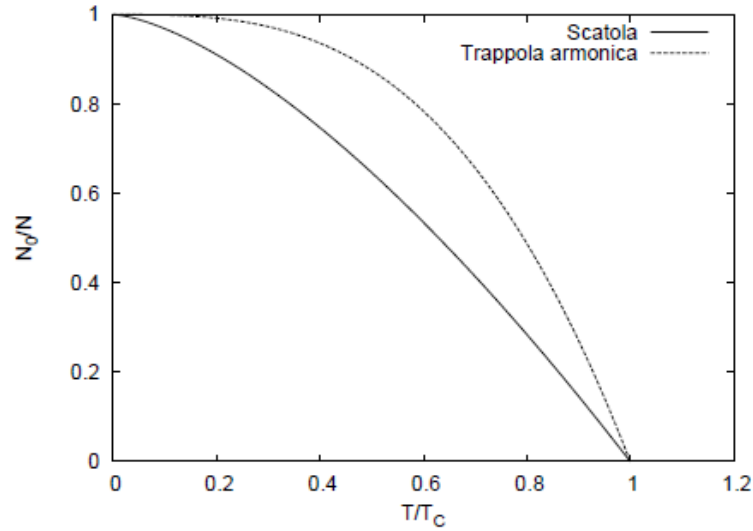


Figura 1.2: Frazione di condensato al variare della temperatura in presenza di una scatola 3D (linea continua) o in presenza di un potenziale armonico (linea tratteggiata) [28]

1.2 Gas di bosoni interagenti: teoria dello scattering

Scopo di questo paragrafo è quello di introdurre una grandezza caratteristica delle collisioni elastiche negli atomi freddi, la *lunghezza di scattering*. E' necessario porre l'attenzione sulle collisioni elastiche tra atomi perchè è proprio utilizzando tali collisioni che è possibile raffreddare gli atomi per mezzo del processo di termalizzazione.

Si considerino una coppia di particelle distinguibili, di massa m_1 e m_2 , prive di gradi di libertà interni, che collidono. Mettendosi nel sistema di riferimento delle coordinate relativo al centro di massa, si ha che la funzione d'onda che descrive il moto del centro di massa è un'onda piana, $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$, mentre quella che descrive il moto relativo delle particelle soddisfa l'equazione di Schrödinger con un'hamiltoniana del tipo

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m_r} + V(\mathbf{r}) \quad (1.23)$$

dove con $m_r = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ si intende la massa ridotta delle due particelle e dove $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ e $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$. Gli autovalori dell'equazione di Schrödinger con l'hamiltoniana 1.23 sono del tipo $E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_r}$ mentre gli autostati possono essere scritti come somma di un'onda piana entrante e di un'onda diffusa

$$\Psi = e^{ikz} + \Psi_{sc}(\mathbf{r}) \quad (1.24)$$

dove con z si intende la direzione della velocità relativa dell'onda incidente.

A grandi distanze la funzione d'onda scatterata può essere scritta come prodotto di un'onda sferica e di un fattore, $f(\mathbf{k})$, detto ampiezza di scattering dove con $\mathbf{k}$ si intende il vettore d'onda dell'onda scatterata. Se si assume che l'interazione tra gli atomi è a simmetria sferica, l'ampiezza di scattering dipende esclusivamente dall'angolo θ formato dalle direzioni del momento relativo degli atomi prima e dopo lo scattering. Inoltre, sempre sotto tali ipotesi, la funzione d'onda Ψ , soluzione dell'equazione di Schrödinger, può essere scritta in termini di polinomi di Legendre $P_l(\cos\theta)$ [29] e l'ampiezza di scattering $f(\theta)$ assume quindi la forma

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(e^{i2\delta_l} - 1)P_l(\cos\theta) \quad (1.25)$$

dove l è il numero quantico orbitale e δ_l è uno shift di fase della funzione d'onda.

E' possibile utilizzare l'ampiezza di scattering per ricavare la sezione d'urto differenziale in quanto esse sono legate dalla relazione

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 \quad (1.26)$$

Se ci si mette sempre nelle ipotesi in cui vale la relazione 1.25, si ha che la sezione d'urto totale, ottenuta integrando la relazione 1.26 su tutto l'angolo solido, è pari a

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l \quad (1.27)$$

A basse energie, quando k tende a 0, il termine dominante è quello relativo a $l=0$ (scattering di tipo onda s). In questo caso l'ampiezza di scattering si riduce a una costante, indicata con a , e la sezione d'urto assume la forma

$$\sigma = 4\pi a^2 \quad (1.28)$$

La costante a viene chiamata *lunghezza di scattering* e la funzione d'onda Ψ (1.24) in queste condizioni assume la forma

$$\Psi = 1 - \frac{a}{r} \quad (1.29)$$

Si pone ora l'attenzione allo scattering di particelle identiche nello stesso stato interno. Se le particelle sono fermioni, la funzione d'onda deve essere antisimmetrica per lo scambio delle coordinate di una coppia di particelle, mentre deve essere simmetrica nel caso di bosoni. Questo comporta che la funzione d'onda assuma la forma

$$\Psi = e^{ikz} \pm e^{-ikz} + [f(\theta) \pm f(\pi - \theta)] \frac{e^{ikr}}{r} \quad (1.30)$$

mentre la sezione d'urto differenziale diventa

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta) \pm f(\pi - \theta)|^2 \quad (1.31)$$

dove il segno più è associato ai bosoni e il segno meno ai fermioni. Integrando la relazione 1.31 si ottiene, a causa della simmetria della funzione d'onda, che la sezione d'urto di un processo di scattering di tipo onda s per i fermioni è nulla, mentre vale $\sigma = 8\pi a^2$ nel caso dei bosoni. In particolare il fattore due moltiplicativo nel caso dei bosoni aiuta nel processo di condensazione.

1.2.1 Risonanza di Feshbach

Nel paragrafo precedente è stata introdotta la lunghezza di scattering, a . Tale quantità ha la sua importanza in quanto legata all'energia di interazione tra un gas di atomi. In particolare se si è in una regione in cui $a < 0$ si è in presenza di un'interazione di tipo attrattivo, mentre nel caso contrario in cui $a > 0$ l'attrazione è di tipo repulsivo. Per alcuni atomi è possibile passare da una regione a un'altra, ovvero è possibile variare l'interazione tra gli atomi, utilizzando il fenomeno della “*risonanza di Feshbach*”. Tale proprietà è stata studiata nell'ambito della fisica nucleare da Feshbach [20], ma è poi stata utilizzata anche nell'ambito della fisica degli atomi freddi [21] in quanto consente variare la lunghezza di scattering, esplorando quindi diversi regimi di interazione tra atomi, cambiando semplicemente l'intensità di un campo magnetico.

Per comprendere meglio il fenomeno della risonanza di Feshbach si considerino due curve di potenziale molecolari, w_1 (stato fondamentale) e w_2 (stato eccitato) corrispondenti a due diverse configurazioni di spin per gli atomi come mostrato nella figura 1.3¹. A grandi distanze, quando $r \rightarrow \infty$, il potenziale $w_1(r)$ corrisponde all'energia di due atomi liberi e viene utilizzato come energia di riferimento ($w_1(\infty) = 0$).

Quando avviene un processo di collisione tra due atomi che coinvolge una piccola quantità di energia E , questo potenziale rappresenta, dal punto energetico, il *canale aperto* ovvero è il canale accessibile per i processi collisionali. L'altro canale, detto *canale chiuso* non è accessibile, ma può ad ogni modo avere uno stato molecolare legato vicino all'energia 0. Questo può comportare una transizione (temporanea) allo stato legato con

¹In linea di principio una molecola ha diverse curve di potenziale corrispondenti a diversi livelli iperfini e Zeeman. Tuttavia, per comodità nella descrizione viene considerato un singolo stato eccitato che comunque descrive bene il caso di una risonanza isolata

energia superiore seguita da un decadimento nel canale aperto con conseguente aumento della loro sezione d'urto.

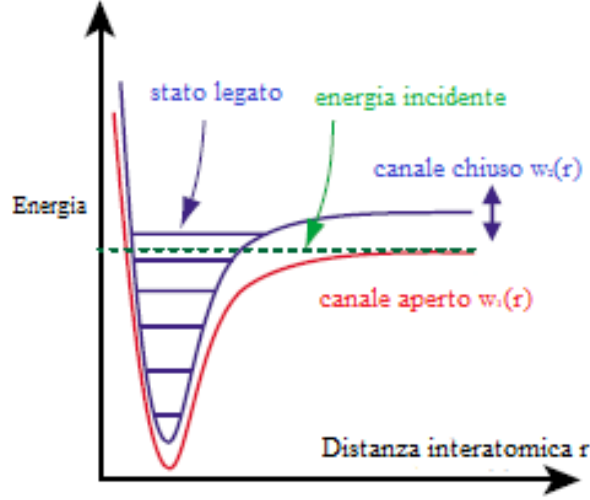


Figura 1.3: Principio della risonanza di Feshbach. Gli atomi preparati nel canale aperto collidono tra di loro con una bassa energia incidente. Nel corso della collisione, il canale aperto è accoppiato al canale chiuso. Quando uno stato legato del canale chiuso ha energia vicino allo zero, può avvenire la risonanza di scattering. La posizione del canale chiuso rispetto al canale aperto, può essere modificata, variando un campo magnetico B [30]

Anche un piccolo accoppiamento può mescolare fortemente i due canali. Se il momento magnetico degli atomi nei due canali è differente, allora la differenza in energia relativa delle due curve può essere modificata variando semplicemente un campo magnetico B poichè i due livelli hanno una risposta differente all'applicazione del campo a causa dell'effetto Zeeman. In particolare, variando il campo magnetico, si varia l'altezza del canale chiuso fino a la soglia dell'energia di interazione è in risonanza con uno stato legato molecolare.

Dalla teoria di scattering delle risonanze di Feshbach si ricava che l'andamento della lunghezza di scattering al variare del campo magnetico è data dalla relazione [31]

$$a(B) = a_{nr} \left(1 - \frac{\Delta}{B - B_0} \right) \quad (1.32)$$

dove B_0 è il valore del campo magnetico alla risonanza, per il quale la sezione d'urto tende all'infinito, a_{nr} è la lunghezza di scattering che si avrebbe lontano dalla risonanza e Δ è la larghezza della risonanza nel campo magnetico. Bisogna tenere conto del fatto che mentre la risonanza è un fenomeno generale, i parametri che caratterizzano la sua dipendenza dal campo magnetico, dipendono dal particolare sistema atomico in esame.

Di seguito è riportato l'andamento della sezione d'urto del ^{39}K [32] al variare del campo magnetico e come si può osservare, tale elemento, utilizzato per realizzare il condensato di Bose-Einstein studiato, ha una risonanza di Feshbach quando $B_0 \approx 400\text{G}$. Nella sez. 3.3 sarà richiamato tale argomento e sarà spiegato in modo più approfondito l'importanza di tale risonanza.

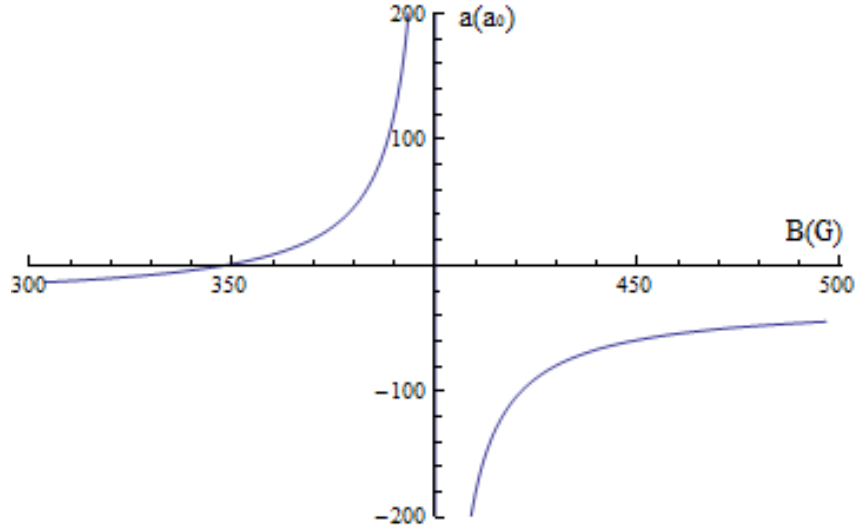


Figura 1.4: Andamento della lunghezza di scattering, in unità di raggio di Bohr, in funzione del campo magnetico B . A $B \approx 400$ G si può notare una risonanza di Feshbach del ^{39}K .

1.3 Teoria dello stato condensato: equazione di Gross-Pitaevskii e approssimazione di Thomas-Fermi

Scopo di questo paragrafo è quello di introdurre l'equazione di Gross-Pitaevskii [33, 34, 35] in quanto per mezzo di tale relazione si riesce a descrivere un sistema di bosoni interagenti. Difatti, anche se spesso si assume di lavorare con un gas di Bose ideale in cui possono essere trascurate le interazioni tra gli atomi, per descrivere bene un sistema reale è necessario considerare le interazioni a molti corpi.

Consideriamo un gas fortemente diluito di N bosoni caratterizzato da interazioni a due corpi. L'interazione effettiva tra due particelle a bassa energie può essere scritta, nella rappresentazione dei momenti, come una costante

$$g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \quad (1.33)$$

dove con a si intende la lunghezza di scattering. Essa, nella rappresentazione delle coordinate, assume la forma di una interazione di contatto

$$g\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1.34)$$

dove $\mathbf{r}$ e $\mathbf{r}'$ indicano le posizioni delle due particelle.

In una tale situazione, l'hamiltoniana che descrive tale sistema assume la forma , in seconda quantizzazione,

$$\hat{H} = \int d\mathbf{r} \hat{\Psi}(\mathbf{r})^\dagger \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right] \hat{\Psi}(\mathbf{r}) + \frac{g}{2} \int d\mathbf{r} \hat{\Psi}(\mathbf{r})^\dagger \hat{\Psi}(\mathbf{r})^\dagger \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \quad (1.35)$$

dove con $\hat{\Psi}(\mathbf{r})$ si intende l'operatore di campo la cui evoluzione è determinata dall'equazione di Heisenberg

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) = [\hat{\Psi}(\mathbf{r}), \hat{H}] \quad (1.36)$$

la quale, usando le note regole di commutazione, assume la forma

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) = [-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) + g \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t)^\dagger \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t)] \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) \quad (1.37)$$

Utilizzando una teoria semiclassica, possiamo scrivere l'operatore di campo che descrive il nostro sistema come

$$\hat{\Psi} = \langle \hat{\Psi} \rangle + \delta \hat{\Psi} \quad (1.38)$$

dove con $\phi = \langle \hat{\Psi} \rangle$ si intende il valore di aspettazione dell'operatore di campo sullo stato quantistico del sistema. Tale valore medio quantistico è considerato il *parametro d'ordine* associato al fenomeno della condensazione di Bose Einstein. In generale il parametro d'ordine è legato allo stato di ordine o disordine di un sistema e assume un valore nullo o non nullo a seconda che una grandezza caratteristica del sistema (come può essere la temperatura nel caso dei condensati) assume un valore maggiore o minore di un valore critico. In tali condizioni ϕ rappresenta anche la funzione d'onda del condensato e descrive il comportamento collettivo di tutto il sistema, mentre $\delta \hat{\Psi}$ è il termine di fluttuazione legato alle particelle non condensate. A basse temperature, mettendosi nelle ipotesi di campo medio, tale termine può essere trascurato.

Se si utilizza quindi la relazione 1.38 si trova l'equazione di Gross-Pitaevskii

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{r}, t) = [-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) + g|\phi(\mathbf{r}, t)|^2] \phi(\mathbf{r}, t) \quad (1.39)$$

che è un'equazione di Schrödinger non lineare che descrive l'evoluzione temporale della funzione d'onda del condensato. Quest'ultima è legata alla densità di probabilità spaziale secondo la relazione

$$\varrho(\mathbf{r}, t) = |\phi(\mathbf{r}, t)|^2 \quad (1.40)$$

L'equazione di Gross-Pitaevskii può anche essere ricavata utilizzando il metodo variazionale partendo dal funzionale dell'energia E

$$E(\phi) = \int d\mathbf{r} \phi^*(\mathbf{r}, t) [-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}, t)] \phi(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{2} g |\phi(\mathbf{r}, t)|^4 \quad (1.41)$$

dove il primo termine rappresenta l'energia cinetica, il secondo l'energia potenziale e l'ultimo termine è l'energia di interazione.

Utilizzando come funzione d'onda del sistema

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r}) e^{-i\mu t/\hbar} \quad (1.42)$$

dove μ è il potenziale chimico, si trova l'equazione di GP indipendente dal tempo

$$[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{r}) + g|\phi(\mathbf{r})|^2]\phi(\mathbf{r}) = \mu\phi(\mathbf{r}) \quad (1.43)$$

Essa ha la forma di un'equazione di Schrödinger che ha come autovalore non l'energia delle particelle, ma il potenziale chimico. Infatti mentre per un sistema di particelle non interagenti tutti nello stesso stato quantico il potenziale chimico coincide con l'energia, nel caso di particelle interagenti questo non accade.

L'equazione di Gross-Pitaevskii può essere risolta in modo analitico quando si considera un potenziale di trappola di tipo armonico

$$V(x_1, x_2, x_3) = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^3 \omega_i^2 x_i^2 \quad (1.44)$$

In presenza di un tale potenziale e in assenza di interazioni, la funzione d'onda di singola particella assume la forma

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\pi^{3/2} a_{ho}^{3/2}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 x_i^2 / a_{ho}^2} \quad (1.45)$$

dove a_{ho} è la lunghezza dell'oscillatore data dalla relazione $a_{ho}^2 = \hbar/m\omega_{ho}$. In questa situazione la distribuzione della densità è di tipo gaussiano.

Nel limite di forte interazione, ovvero nelle ipotesi in cui $Na \gg a_{ho}$, è possibile trascurare il termine relativo all'energia cinetica (*approssimazione di Thomas-Fermi*). In questo modo l'equazione 1.39 assume la forma

$$[V(\mathbf{r}) + \frac{4\pi\hbar a}{m}|\phi(\mathbf{r})|^2]\phi(\mathbf{r}) = \mu\phi(\mathbf{r}) \quad (1.46)$$

la quale ha come soluzione

$$n(\mathbf{r}) = |\phi(\mathbf{r})|^2 = [\mu - V(\mathbf{r})] \quad (1.47)$$

nella regione in cui il termine a destra è positivo, mentre assume valore nullo, $\Psi = 0$, al di fuori di tale regione. Il confine di tale zona è quindi dato dalla relazione

$$V(\mathbf{r}) = \mu \quad (1.48)$$

Di conseguenza secondo questa approssimazione l'energia da dare a una particella è indipendente da dove essa si trova. Nel caso di un potenziale di tipo armonico questo si traduce in

$$n(\mathbf{r}) = -\frac{\mu}{g} \left(1 - \sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{R_i^2}\right) \quad (1.49)$$

dove R_i è l'estensione della nuvola nell'i-sima direzione ed è data dalla relazione $R_i^2 = \frac{2\mu}{m\omega_i^2}$

1.4 Potenziali ottici

Scopo di questo paragrafo è quello di richiamare gli aspetti fondamentali dell'interazione tra un atomo e radiazione elettromagnetica non risonante. Questa dà luogo alla cosiddetta forza di dipolo, che corrisponde ad un potenziale conservativo proporzionale all'intensità della radiazione. Vedremo quindi come, sfruttando appositi fasci laser, sia possibile realizzare potenziali di trappola per gli atomi ultrafreddi.

1.4.1 Forze dipolari

Consideriamo adesso l'interazione tra una radiazione elettromagnetica monocromatica e un atomo. Tale interazione induce nell'atomo un momento di dipolo $\tilde{\mathbf{p}}$ sul quale a sua volta il fascio stesso esercita una forza [36]. A causa della natura conservativa di tale forza, è possibile introdurre un potenziale da cui essa è derivata, in corrispondenza del cui minimo gli atomi possono essere intrappolati. Il fascio laser può essere descritto da un campo elettrico $\mathbf{E}$ avente la forma

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{e}}\tilde{E}(\mathbf{r})\exp(-i\omega t) + c.c. \quad (1.50)$$

mentre il momento di dipolo indotto $\mathbf{p}$, oscillante alla stessa frequenza del campo, assume la forma

$$\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{e}}\tilde{p}(\mathbf{r})\exp(-i\omega t) + c.c. \quad (1.51)$$

In entrambi i casi con $\hat{\mathbf{e}}$ si intende il versore di polarizzazione mentre con $\tilde{p}$ e $\tilde{E}$ si intendono le ampiezze del campo elettrico e del momento di dipolo. Tale ampiezze sono tra loro legate da una semplice relazione di proporzionalità

$$\tilde{p} = \alpha\tilde{E} \quad (1.52)$$

dove α è la polarizzabilità che dipende dalla frequenza di oscillazione ω .

Il potenziale di interazione del momento di dipolo indotto $\mathbf{p}$ nel campo elettrico $\mathbf{E}$ oscillante è dato dalla relazione

$$U_{dip} = -\frac{1}{2}\langle \mathbf{p}\mathbf{E} \rangle = -\frac{1}{2\epsilon_0 c} \text{Re}(\alpha) I \quad (1.53)$$

dove le parentesi angolari indicano la media temporale su tutti i termini oscillanti rapidamente, con I l'intensità del campo dato da $I = 2\epsilon_0 c |E|^2$ e il fattore $1/2$ tiene conto del fatto che il momento di dipolo è indotto e non permanente. Il potenziale di interazione è anche proporzionale alla parte reale della polarizzabilità (che in generale una quantità complessa) la quale descrive la componente in fase dell'oscillazione del dipolo responsabile delle proprietà dispersive dell'interazione.

Una volta noto il potenziale di interazione è possibile ricavare la forza di dipolo, la quale in quanto forza conservativa è data dalla relazione

$$\mathbf{F}_{dip}(\mathbf{r}) = -\nabla U_{dip}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\epsilon_0 c} \text{Re}(\alpha) \nabla I(\mathbf{r}) \quad (1.54)$$

Alla parte immaginaria della polarizzabilità, che descrive la componente fuori fase dell'oscillazione dipolare, sono invece legati gli effetti di assorbimento. In particolare, la potenza assorbita dall'oscillatore dal campo elettrico e riemessa come radiazione di dipolo è data da

$$P_{abs} = \langle \dot{\mathbf{p}} \mathbf{E} \rangle = 2\omega \text{Im}(\tilde{p}\tilde{E}^*) = \frac{\omega}{\epsilon_0 c} \text{Im}(\alpha) I \quad (1.55)$$

Se si considera la luce come un insieme di fotoni di energia $\hbar\omega$ si può interpretare l'assorbimento in termini dello scattering di fotoni considerando cicli successivi di assorbimento e riemissione spontanea di essi. Il rate di scattering corrispondente è dato dalla relazione

$$\Gamma_{sc}(\mathbf{r}) = \frac{P_{abs}}{\hbar\omega} = \frac{1}{\hbar\epsilon_0 c} \text{Im}(\alpha) I(\mathbf{r}) \quad (1.56)$$

Tali espressioni per il potenziale di interazione e la potenza di radiazione diffusa appena introdotte sono valide per ogni particella neutra polarizzabile in un campo elettrico. Per ricavare la polarizzabilità atomica è possibile utilizzare il modello di Lorentz per un oscillatore armonico oppure un approccio semiclassico in cui l'atomo è visto come un sistema quantistico a due livelli interagente con un campo di radiazione trattato classicamente [36]. I due modi sono equivalenti a patto di trascurare gli effetti di saturazione e di calcolare il rate di decadimento spontaneo dallo stato eccitato allo stato fondamentale non per mezzo della formula di Larmor, ma tramite l'elemento di matrice del momento di dipolo tra lo stato fondamentale e lo stato eccitato.

Nel momento in cui l'oggetto di interesse sono le trappole dipolari, si è in presenza di luce con frequenza ω lontana da quella della transizione atomica, ω_0 , e la saturazione è quindi molto bassa; di conseguenza è possibile sostituire l'espressione di α trovata classicamente nelle espressioni del potenziale dipolare e del rate di scattering.

Se si definisce il detuning come $\Delta = \omega - \omega_0$ e si applica l'approssimazione di onda rotante è possibile scrivere il potenziale dipolare e lo scattering rate come [36]

$$U_{dip}(\mathbf{r}) = \frac{3\pi c^2}{2\omega_0^3} \frac{\Gamma}{\Delta} I(\mathbf{r}) \quad (1.57)$$

$$\Gamma_{sc}(\mathbf{r}) = \frac{3\pi c^2}{2\hbar\omega_0^3} \left(\frac{\Gamma}{\Delta} \right)^2 I(\mathbf{r}) \quad (1.58)$$

dove Γ è il rate di decadimento verso lo stato eccitato.

Il detuning può avere segno sia negativo che positivo. Nel primo caso si parla di “*red detuning*”, nel secondo di “*blue detuning*”. Se $\Delta < 0$ il potenziale di dipolo è negativo e l'interazione con la luce è di tipo attrattivo sugli atomi. In questa situazione il minimo del potenziale è trovato in corrispondenza del massimo dell'intensità. Nel caso opposto, in cui $\Delta > 0$ l'interazione sugli atomi è di tipo repulsivo e il minimo di potenziale si trova in corrispondenza del minimo dell'intensità. Si può parlare quindi di trappole red-detuned e trappole blu-detuned.

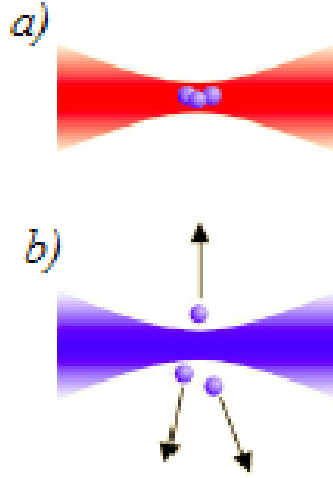


Figura 1.5: Principio di funzionamento di una trappola ottica. Nella trappola detunata verso il rosso ($\nu < \nu_0$) (a) gli atomi sono catturati nel massimo dell'intensità. Nella trappola detunata verso il blu gli atomi sono allontanati dal massimo dell'intensità(b)

Osservando le relazioni 1.57 e 1.58, si può notare come il potenziale dipolare sia proporzionale a $\frac{I}{\Delta}$ mentre il rate di scattering vada come $\frac{I}{\Delta^2}$. Ciò comporta che nelle trappole ottiche dipolari si usano grandi detuning ed alte intensità in modo da avere il rate di scattering più basso possibile a un certo potenziale.

1.4.2 Trappola ottica red-detuned

Come introdotto nel paragrafo precedente, un potenziale conservativo può essere utilizzato per intrappolare gli atomi. In particolare un fascio laser red-detuned genera un potenziale attrattivo per gli atomi. Un fascio laser che può essere utilizzato per questo scopo è un fascio di tipo gaussiano.

Il profilo di intensità di un fascio laser focalizzato di questo tipo è dato dalla relazione

$$I(r, z) = \frac{2P}{\pi\omega^2(z)} e^{-2\frac{r^2}{\omega^2(z)}} \quad (1.59)$$

dove con $\mathbf{r}$ si intende la coordinata radiale, con P la potenza del fascio laser focalizzato e con $w(z)$ la distanza radiale alla quale l'intensità del fascio è diminuita di un fattore $\frac{1}{e^2}$ rispetto al valore sull'asse.

Esso è funzione di z secondo la relazione

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2} \quad (1.60)$$

dove con w_0 si intende il waist del fascio, ovvero il suo raggio minimo (il cui valore è tipicamente attorno a $100\mu m$), e con $z_R = \pi w_0^2/\lambda$ la lunghezza di Rayleigh, ovvero la distanza dal fuoco alla quale l'intensità del fascio si è dimezzata (tale valore in generale è

dell'ordine dei millimetri o dei centimetri). Una volta nota la distribuzione dell'intensità del fascio gaussiano è possibile, utilizzando la relazione 1.57, conoscere il potenziale del dipolo. Nel caso in cui l'energia termica $k_B T$ del sistema atomico in esame è molto più piccola della profondità V_{trap} del potenziale, dato dalla relazione $V_{trap} = |V(r=0, z=0)|$ si è nelle condizioni in cui la dimensione radiale del campione è più piccola rispetto a w_0 e quella assiale lo è rispetto z_R . Di conseguenza è possibile approssimare il potenziale ottico con quello di un oscillatore armonico a simmetria cilindrica, dato dalla relazione

$$V_{dip}(r, z) \approx -V_{trap}[1 - 2(\frac{r}{w_0})^2 - (\frac{z}{z_R})^2] \quad (1.61)$$

le cui frequenze di oscillazione sono $\omega_r = (4V_{trap}/mw_0^2)^{1/2}$ e $\omega_z = (2V_{trap}/mz_R^2)^{1/2}$. La profondità della trappola, V_{trap} è linearmente proporzionale all'intensità del laser e il suo valore può variare da pochi kHz sino a 1 MHz. Come si può notare, la lunghezza di Rayleigh, z_R , è più grande del waist minimo w_0 di un fattore pari a $\pi w_0/\lambda$. Ciò comporta che, poichè queste due quantità rappresentano le distanze su cui diminuisce l'intensità del fascio laser, la forza agente sugli atomi lungo la direzione longitudinale è molto più debole di quella agente lungo la direzione radiale. Di conseguenza per confinare più strettamente gli atomi in ogni direzione dello spazio è necessario utilizzare più fasci laser sovrapposti.

1.5 Reti ottici

Un altro modo per intrappolare gli atomi è quello di utilizzare i reticoli ottici [30].

Un reticolo ottico periodico unidimensionale può essere prodotto sovrapponendo due fasci laser contropropaganti. A causa dell'interferenza tra i due fasci laser, si viene a formare un'onda stazionaria di periodo $\lambda/2$ in cui gli atomi possono essere intrappolati. Più in generale, se si scelgono due fasci laser che interferiscono sotto un angolo minore di 180° , è possibile realizzare un potenziale periodico con grande periodo.

In presenza di un profilo gaussiano, si ottiene un potenziale di trappola del tipo

$$V(r, z) \approx -V_0 e^{-2r^2/w^2(z)} \sin^2(kz) \quad (1.62)$$

dove $k = 2\pi/\lambda$ è il vettore d'onda del fascio laser e V_0 è la massima profondità del potenziale del reticolo. V_0 può anche essere espressa in termini di energia di rinculo $E_r = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ come quantità adimensionale

$$s = \frac{V_0}{E_r} \quad (1.63)$$

Si noti che a causa dell'interferenza dei due fasci laser, V_0 è quattro volte maggiore di V_{trap} se la potenza e i parametri dei fasci che fanno interferenza sono uguali.

Un potenziale periodico bidimensionale può invece essere realizzato sovrapponendo due onde stazionarie lungo differenti direzioni, solitamente ortogonali tra loro. Nel caso in cui i due vettori d'onda dei fasci laser sono ortogonali tra loro, non avviene interferenza. Di conseguenza il potenziale ottico nel centro della trappola è semplicemente la somma di potenziali sinusoidali in entrambe le direzioni. In un reticolo ottico bidimensionale, gli atomi sono confinati in una matrice di sottili tubi unidimensionali (come si può vedere

in fig. 1.6). Tipicamente le frequenze della trappola armonica lungo il tubo sono deboli (dell'ordine di 10-200 Hz), mentre nella direzione radiale possono arrivare sino a 100 kHz. Per reticoli abbastanza profondi, gli atomi possono quindi muoversi solo lungo l'asse del tubo.

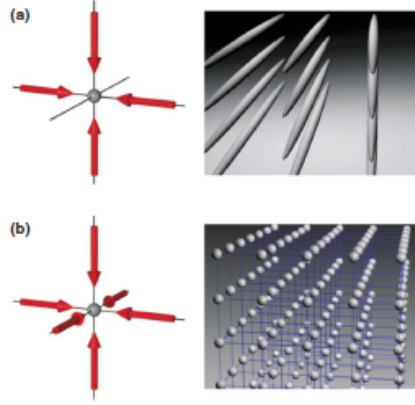


Figura 1.6: (a) Reticolo ottico bidimensionale. Gli atomi sono confinati in una matrice di tubi unidimensionali (b) Reticolo ottico tridimensionale. Esso può essere approssimato ad una matrice cubica di “sottili” potenziali di tipo oscillatore armonico posti in ogni sito del reticolo [30]

Infine un reticolo ottico tridimensionale può essere realizzato sovrapponendo tre onde stazionarie tra loro ortogonali. Per avere onde stazionarie indipendenti tra loro e non avere interferenza tra i fasci laser o diverse onde stazionarie, è possibile scegliere i vettori di polarizzazioni ortogonali tra di loro e usare lunghezze d'onda delle onde stazionarie leggermente differenti tra loro. Il potenziale ottico risultante è dato dalla somma di tre onde stazionarie.

Non è solo la possibilità di variare la dimensione dei reticoli ottici a renderli così importanti dal punto di vista sperimentale. Infatti essi hanno aperto nuove frontiere nell'ambito della fisica dei gas di atomi ultrafreddi in quanto possono essere spenti e la loro intensità può essere variata; poichè possiedono un periodo macroscopicamente grande, le osservazioni sperimentali sono semplificate. Inoltre sono statici e praticamente perfetti ovvero privi di difetti ed è possibile anche aggiungere un disordine in modo controllato.

1.5.1 Teorema di Bloch

Scopo di questo paragrafo è quello di studiare il comportamento di una particella in un potenziale periodico e di osservare come cambia la legge di dispersione che lega l'energia al momento della particella.

Nel caso più semplice [37] in cui la particella si trova in un reticolo ottico unidimensionale, si è in presenza di una Hamiltoniana del tipo

$$H = \frac{p^2}{2m} + V_{latt} \quad (1.64)$$

in cui il primo termine è relativo all'energia cinetica della particella, mentre il secondo è legato alla presenza del reticolo ottico periodico con periodicità d , il quale soddisfa la relazione $V_{latt}(x) = V_{latt}(x + d)$.

In una tale situazione, l'equazione di Schrödinger ha la forma

$$H\Psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_{latt} \right) \Psi = E\Psi \quad (1.65)$$

La periodicità del potenziale V_{latt} si riflette, secondo il teorema di Bloch, sulla forma della funzione d'onda Ψ . Di conseguenza la funzione d'onda, soluzione dell'equazione di Schrödinger 1.65, deve essere un'onda piana, modulata da un termine periodico avente la stessa periodicità del potenziale [37]

$$\Psi_{n,q} = u_{n,q}(x)e^{iqx} \quad (1.66)$$

dove $u_{n,q}(x) = u_{n,q}(x + d)$.

Come si può osservare, sia la funzione d'onda, così come i livelli energetici $E_{n,q}$ sono caratterizzati da due indici, ovvero da due numeri quantici. Il numero quantico q viene chiamato quasimomento ed è legato alla simmetria traslazionale del potenziale periodico.

La periodicità del potenziale impone una periodicità anche nel reticolo reciproco. Infatti in tale spazio dei momenti si ha una periodicità pari a $G = 2\pi/d$. Di conseguenza in una tale situazione valgono le relazioni

$$E_{n,q}(x) = E_{n,q+G}(x) \quad (1.67)$$

$$\Psi_{n,q}(x) = \Psi_{n,q+G}(x) \quad (1.68)$$

Ciò comporta che in generale il quasimomento q può essere confinato nella prima zona di Brillouin, definita come la cella primitiva del reticolo reciproco, la quale si estende, in una dimensione, da $-\pi/d$ a π/d .

L'altro numero quantico n , viene chiamato indice di banda e ciò deriva dal fatto che, come si può vedere dalla relazione 1.67, $E_{n,q}$ è una funzione continua e periodica in q . Ciò comporta che lo spettro di energia risulta essere formato da diverse zone, alcune permesse (dette bande di energia) ed altre proibite (detti gap di energia). In fig. 1.7 sono riportate le bande di energia al variare della profondità del reticolo ottico.

Occupiamoci ora dei due casi limite: potenziale periodico debole ($s \approx 1$) e potenziale periodico profondo ($s > 10$)[38].

Nel primo caso, come si può vedere nella figura 1.7 le energie dipendono in modo critico dal quasi momento q e in particolare in questa situazione vale la relazione

$$\frac{E(\tilde{q})}{E_R} = \tilde{q}^2 \mp \sqrt{4\tilde{q} + \frac{s^2}{16}} \quad (1.69)$$

dove $\tilde{q} = q/\pi/d - 1$ e il segno meno è riferito alla banda di energia più bassa e il segno più alla prima banda di energia eccitata. Poichè l'energia di gap tra la banda n e quella $n+1$ scala come V_0^{m+1} , i soli stati legati del sistema, nel limite di potenziale debole, sono quelli appartenenti alle prime due bande. Le particelle con energie più alte, invece, si

comporteranno come particelle libere. Il gap di energia si apre al limite della banda di Brillouin , ovvero quando $q = \pi/d$ e vale $\Delta E_{gap} = \frac{1}{2}sE_R$.

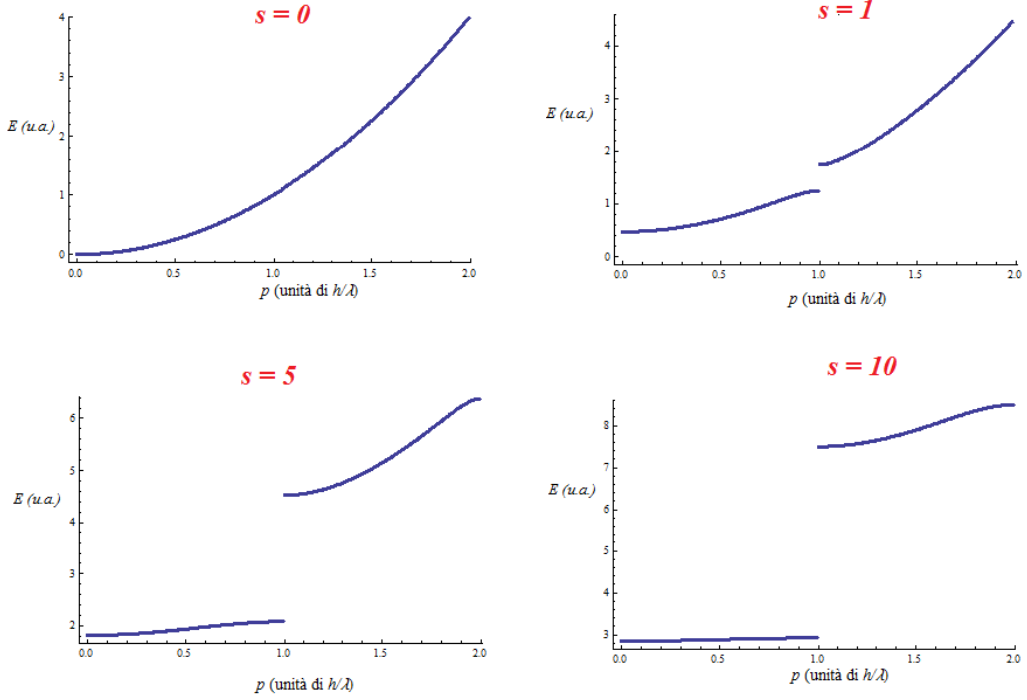


Figura 1.7: Andamento delle bande di energia in presenza di un reticolo ottico secondo la teoria di Bloch al variare della profondità del reticolo. In ascissa è riportato il quasimomento nella prima zona di Brillouin (in unità di $\hbar k$), in ordinata l'energia (in unità arbitrarie). Si noti come all'aumentare della profondità del reticolo, la banda di energia dello stato fondamentale dipende sempre meno dal momento. Inoltre, in presenza di reticoli poco profondi, l'inversione del segno della massa efficace si sposta verso momenti sempre più grandi.

Nel limite invece di potenziali profondi, detto limite di tight-binding, le energie delle bande più basse dipendono debolmente dal quasimomento (fig. 1.7) e in particolare in una tale situazione vale la relazione

$$\frac{E(q)}{E_R} = \sqrt{s} - 2J \cos(qd) \quad (1.70)$$

dove J è l'energia di tunneling, definita come la probabilità di una particella di passare da un sito reticolare a un altro attraversando la barriera di potenziale.

In tale limite è conveniente scrivere la funzione d'onda di Bloch per un dato n in termini di somma di funzioni d'onda ortonormali massimalmente localizzate in ciascun sito del reticolo

$$\Psi_{n,q}(x) = \sum_{j=-\infty}^{j=\infty} e^{ix_j q} w_n(x - x_j) \quad (1.71)$$

dove le funzioni $w_{n,j}(x)$ sono chiamate *funzioni di Wannier* (figura 1.8) e sono spesso approssimabili con funzioni gaussiane localizzate nel sito x_j .

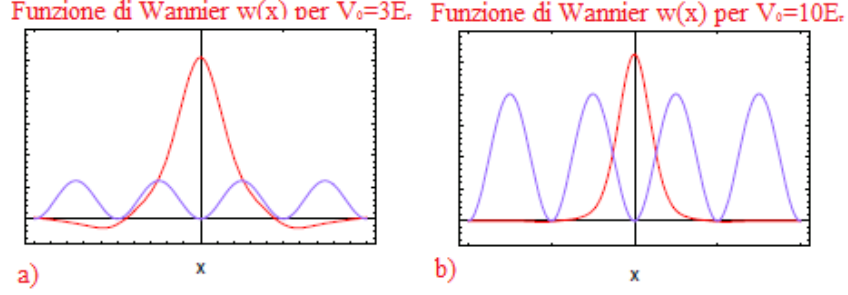


Figura 1.8: Funzioni di Wannier (in rosso) per $V_0 = 3E_r$ (a) e $V_0 = 10E_r$ (b) plottate insieme al potenziale reticolare (in blu). Le funzioni di Wannier costituiscono un set di funzioni ortonormali massimamente localizzate. Adattamento da[39]

1.5.2 Dinamica semiclassica

E' noto dalla teoria [37] che le particelle hanno sia una natura corpuscolare che ondulatoria e che il moto di una particella in un reticolo periodico può esser descritto con una trattazione semiclassica, almeno nel limite in cui l'estensione del pacchetto d'onda che descrive la particella è molto maggiore del periodo reticolare. Classicamente, il comportamento di una particella soggetta a una forza esterna F_{ext} , legata al gradiente di un potenziale, è regolato dalle note equazioni di Hamilton

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad (1.72)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad (1.73)$$

Se si utilizza la somiglianza del quasimomento della funzione d'onda con la reale quantità di moto, le equazioni semiclassiche di un pacchetto d'onda nella prima banda di un reticolo possono essere scritte come

$$\dot{x} = v^{(0)}(q) = \frac{1}{\hbar} \frac{dE}{dq} \quad (1.74)$$

$$\hbar \dot{q} = -\frac{dV(x)}{dx} \quad (1.75)$$

dove si assume che la forza esterna non comporta una transizione della particella da una banda di energia ad un'altra in modo tale da lasciare invariato lo spettro di energia dettato dal potenziale periodico. Di conseguenza la presenza di tale forza modifica esclusivamente la posizione e il quasimomento della particella.

Confrontando l'equazione 1.75, legata all'accelerazione della particella, con la seconda legge di Newton $m/\ddot{x} = -dV(x)/dx$ è possibile introdurre una nuova massa, detta massa efficace, data dalla relazione

$$\frac{1}{m^*} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{d^2}{dq^2} E_q^0 \quad (1.76)$$

la quale dipende esclusivamente dalla curvatura della banda.

Nel limite tight-binding lo spettro delle energie è dato dalla relazione 1.70 e di conseguenza, sotto tale ipotesi, la massa efficace ha la forma

$$m^* = m \left(\frac{E_R}{J} \right) \frac{1}{\pi^2 \cos(qd)} \quad (1.77)$$

ovvero dipende dalla curvatura della banda di energia e tende alla massa reale m nel caso dello spettro parabolico di particella libera.

Il concetto di massa efficace è un utile strumento per descrivere il comportamento dinamico di una particella all'interno di un potenziale periodico. In particolare, è possibile ancora utilizzare la meccanica classica per descrivere il comportamento della particella, a patto di attribuire ad essa una massa pari alla massa efficace che tiene conto delle forze dovute alla presenza del potenziale periodico.

Capitolo 2

Fisica dei condensati unidimensionali

Questo capitolo sarà incentrato sulla fisica dei sistemi unidimensionali e in particolare sarà posta l'attenzione su come la dimensionalità del sistema ne determini il comportamento.

Il capitolo è così organizzato. Inizialmente ci si occuperà di definire una temperatura di degenerazione e di condensazione per il sistema unidimensionale e saranno illustrati i motivi per cui è sempre possibile definire una temperatura di degenerazione, indipendentemente dalla dimensionalità del sistema, ma non una temperatura di condensazione.

Successivamente sarà introdotto il concetto di quasicondensato e di come si può realizzare un sistema unidimensionale reale.

Gran parte del capitolo sarà poi dedicato al modello teorico di Bose-Hubbard, utilizzato per descrivere il comportamento di un gas di bosoni all'interno di un potenziale periodico profondo unidimensionale e quali sono le eccitazioni che intervengono in un tale sistema.

2.1 Temperatura di degenerazione e di condensazione per un sistema unidimensionale

Nel paragrafo 1.1.1 è stata introdotta la statistica di Bose-Einstein senza porre particolare attenzione alla dimensionalità del sistema. In realtà quest'ultima gioca un ruolo molto importante nell'ambito della fisica degli atomi freddi e di seguito verranno illustrati alcune peculiarità della fisica dei condensati quando si è in presenza di un sistema unidimensionale. L'attenzione sarà posta in particolare sul fatto che nei sistemi unidimensionali, a causa della dipendenza dalla dimensionalità della densità degli stati, non si può definire una temperatura di condensazione, al di sotto della quale si osserva un'occupazione macroscopica del livello fondamentale. Tuttavia, è sempre possibile definire una temperatura di degenerazione, al di sotto della quale non è più possibile trascurare la natura ondulatoria delle particelle [27].

E' stato visto nel par. 1.1 che in generale la temperatura critica può essere ricavata utilizzando la relazione 1.17 che viene espressa in termini del parametro α . A causa del fatto che $\zeta(\alpha) \hookrightarrow \infty$ se $\alpha \leq 1$ in presenza di una scatola di dimensioni pari a 1 o 2 e

in presenza di un potenziale armonico unidimensionale si ha che la temperatura critica $T_c = 0$.

Ciò comporta che a temperature finite non si può parlare di condensazione per sistemi a bassa dimensionalità.

Fisicamente questo fenomeno può essere visto nel seguente modo. Se si è in presenza di un gas di bosoni uniforme in una scatola unidimensionale e si calcola il potenziale chimico μ a partire dal numero di particelle, si trova che

$$\mu = T \ln(n_1 \Lambda_T) \quad (2.1)$$

se $n_1 \Lambda_T \ll 1$ (limite classico) mentre

$$\mu = -\frac{\pi T}{(n_1 \Lambda_T)^2} \quad (2.2)$$

se $n_1 \Lambda_T \gg 1$ (limite di gas degenere). Con $n_1 \Lambda_T$, in cui n_1 è la densità unidimensionale e $\Lambda_T = (2\pi\hbar^2/mT)^{1/2}$, si intende il parametro di degenerazione ed esso è legato alla temperatura di degenerazione $T_d = \frac{2\pi\hbar^2 n_1^2}{m}$ per mezzo della relazione $n_1 \Lambda_T = (T/T_d)^{1/2}$.

Nel limite di gas degenere si osserva che il potenziale chimico decresce monotonicamente con T e quindi rimane negativo ad ogni T e ciò comporta l'assenza del condensato di Bose Einstein.

Ciò è dovuto al fatto che nel caso di un gas di Bose, ideale e uniforme la densità degli stati di singola particella ha una dipendenza dall'energia ϵ come $\epsilon^{d/2-1}$ dove d è la dimensionalità del sistema e quindi diminuendola, la densità degli stati a basse energie aumenta rispetto che ad alte energie. Di conseguenza, quando $d < 2$, il potenziale chimico rimane sempre sufficientemente negativo e ciò comporta che non vi è mai un'occupazione macroscopica dello stato a più bassa energia nel limite di un grande numero di particelle.

Simili argomenti valgono anche nel caso in cui il sistema non è in una scatola ma in un potenziale armonico.

Nel caso in cui si è in presenza di un interazione, l'andamento della temperatura di degenerazione cambia. In particolare, la temperatura di degenerazione caratteristica per un gas di Bose unidimensionale in presenza di un intrappolamento armonico lungo la direzione assiale del tipo $V_z = m\omega_z^2 z^2/2$ è data dalla relazione

$$T_d \approx N\hbar\omega_z \quad (2.3)$$

che assume la forma

$$T_d \approx \frac{3}{16} N\hbar\omega_z \quad (2.4)$$

nel caso in cui si è in presenza di un reticolo.

2.2 Quasicondensato unidimensionale

Nel momento in cui si forma un condensato di Bose Einstein, si è in presenza di un effetto di coerenza tra le particelle bosoniche nello stesso stato quantico a più bassa energia.

Queste proprietà di coerenza sono legate al comportamento della funzione di correlazione di singola particelle.

Un gas di Bose, uniforme, a bassa dimensionalità ha una funzione di correlazione di singola particella fortemente diversa da quella di un gas di Bose 3D a causa del fatto che la transizione di fase alla condensazione ha un comportamento differente [40].

In sistemi uniformi è noto che in 3D, al di sotto della temperatura critica T_c le correlazioni della fase a lungo raggio sono osservabili nelle proprietà asintotiche della funzione di correlazione di singola particella, in cui il limite

$$\lim_{|\mathbf{r}| \rightarrow \infty} \langle \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(0) \rangle \approx n_0 \neq 0 \quad (2.5)$$

indica l'ordine del sistema a lungo raggio. Al di sopra della temperatura critica, la funzione di correlazione decade esponenzialmente a grandi distanze come nei sistemi classici.

Nei sistemi a dimensionalità ridotta, le fluttuazioni della fase del parametro d'ordine a grande lunghezza d'onda danno origine a uno stato intermedio tra un sistema condensato e uno non condensato. In queste situazioni si parla di *quasicondensato* in cui la fase del parametro d'ordine è coerente solo su una scala di lunghezza finita e in cui la matrice densità ha un comportamento intermedio tra quello di un condensato di Bose Einstein, per cui la densità tende a una costante per grandi valori di x e quella di un sistema normale in cui la matrice densità tende a zero all'aumentare della distanza.

La presenza di un tale sistema comporta che la funzione di correlazione di singola particella decada con una legge di potenza del tipo

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \langle \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{x}) \hat{\Psi}(0) \rangle \approx \frac{1}{|x|^{L_\phi}} \quad (2.6)$$

dove il parametro L_ϕ è caratteristico del sistema e in particolare, nel caso di un condensato unidimensionale, esso viene chiamato lunghezza di correlazione e assume la forma

$$L_\phi = \frac{n_{1D} \hbar^2}{mkT} \quad (2.7)$$

Di conseguenza se il sistema unidimensionale ha dimensioni minori di tale lunghezza, sono preservate le proprietà di correlazione.

2.3 Realizzazione sperimentale di sistemi unidimensionali

Quando si parla di sistema unidimensionale, è necessario specificare se il sistema in analisi lo è dal punto di vista termodinamico e/o dal punto di vista collisionale.

Si parla di sistema unidimensionale termodinamico quando le particelle sono libere di muoversi lungo una direzione (assiale) e sono confinate lungo le altre due direzioni (radiali). Ciò avviene quando la differenza di energia tra lo stato fondamentale e il primo stato eccitato nella direzione radiale è maggiore dell'energia termica $k_B T$.

Nel caso di trappole armoniche, la differenza di energia nella direzione radiale è $E_{rad} = \hbar\omega_r$ e di conseguenza si è in presenza di un sistema unidimensionale se $k_B T \ll E_{rad}$.

Un modo per congelare il moto nelle direzioni radiali è l'utilizzo dei reticoli ottici. I reticoli hanno una profondità tipicamente utilizzata dell'ordine di $20 E_r$ e la frequenza di ciascun reticolo radiale è dell'ordine di $2\pi \times 50$ kHz mentre quella del reticolo assiale è dell'ordine di $2\pi \times 150$ Hz. Ciò comporta che $\hbar\omega_{rad} \gg k_B T$ mentre $\hbar\omega_z \ll k_B T$.

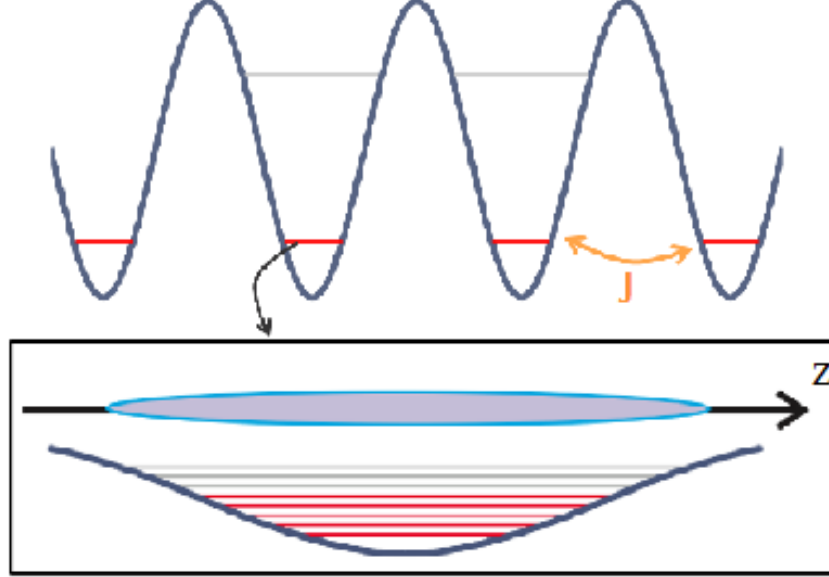


Figura 2.1: Potenziale di confinamento per un gas di Bose unidimensionale. E' possibile utilizzare un reticolo per "congelare" il movimento delle particelle in una direzione. Se la direzione radiale è congelata, le particelle possono solo occupare esclusivamente lo stato fondamentale radiale. Nella direzione assiale possono occupare anche gli stati eccitati. Nella figura i livelli in rosso rappresentano i livelli occupati mentre quelli in grigio quelli vuoti. [41]

In una tale situazione, la funzione d'onda descrivente il sistema può essere fattorizzata in una parte radiale e in una parte assiale

$$\Psi(r, z) = \psi(z)\phi(r) \quad (2.8)$$

Visto l'assunzione precedentemente fatta, secondo cui il confinamento è armonico, la funzione d'onda radiale è del tipo [27]

$$\phi(r) \propto e^{-r^2/2a_r} \quad (2.9)$$

dove $a_r = \sqrt{m\omega_r/\hbar}$ è la lunghezza dell'oscillatore armonico con frequenza ω_r .

A questo punto cerchiamo di capire cosa si intende quando si parla di sistema unidimensionale dal punto di vista collisionale.

E' stato visto che a basse T il moto radiale delle particelle è essenzialmente congelato ed è governato dalla funzione d'onda dello stato fondamentale dell'oscillatore armonico radiale. Se le dimensioni delle direzioni che vengono confinate sono minori della lunghezza

di scattering 3D che caratterizza il sistema di atomi freddi in esame si parla di un sistema unidimensionale anche dal punto di vista collisionale.

Negli esperimenti, tuttavia, le grandezze tipiche sono $a_r \approx 70$ nm (con $\omega_r \approx 2\pi \times 50$ Hz) e $a = 100a_0 \approx 5$ nm e quindi non si è nelle ipotesi tali da potere considerare il sistema unidimensionale dal punto di vista collisionale, ma lo si considera tridimensionale.

In questo modo, utilizzando la fisica per un sistema tridimensionale, si può definire l'energia di interazione come

$$E_{int} = g \int dr |\Psi(r)|^4 = \frac{2\pi\hbar^2}{m} a \int n(r)^2 d^3x = g \int n^2(\mathbf{r}) d^2\mathbf{r} \int n^2(z) dz \quad (2.10)$$

dove l'ultimo passaggio è stato reso possibile dal fatto che la funzione d'onda complessiva è fattorizzabile.

E' possibile quindi in una tale situazione definire una nuova costante di accoppiamento unidimensionale

$$g_{1D} = \frac{2\hbar^2}{m} \frac{a}{a_r^2} = \frac{2\hbar}{ma_{1D}} \quad (2.11)$$

dove $a_{1D} = \frac{a_r^2}{a}$ è la lunghezza di interazione relativa al sistema unidimensionale. Tuttavia questi risultati valgono solo nella condizione in cui $a_r \gg a$. Se tale condizione non è soddisfatta, cosa che accade quando si è vicino la risonanza di Feshbach, bisogna rinormalizzare in modo appropriato tale lunghezza di scattering che assume la forma [42]

$$a_{1D} = \frac{a_r^2}{2a} \left(a - C \frac{a}{a_r} \right) \quad (2.12)$$

con $C=1.0326$. Tale formula vale per ogni valore di a/a_r

2.4 Distribuzione dei momenti e correlazione

Una delle osservabili misurate negli esperimenti su atomi freddi è la distribuzione dei momenti. Tali esperimenti sono realizzati in modo tale da osservare l'immagine della distribuzione atomica dopo aver spento la trappola in cui erano contenuti gli atomi. In particolare gli atomi vengono rilasciati e fatti espandere per un tempo t_{ToF} (nel nostro caso $t=16.5$ ms) prima di prendere l'immagine. Se il tempo di volo è sufficientemente lungo e le interazioni possono essere trascurate, tale immagine riproduce la distribuzione dei momenti all'interno della trappola

$$n_{ToF} \approx \rho(p) = \langle \hat{\Psi}^\dagger(p) \hat{\Psi}(p) \rangle \quad (2.13)$$

in cui la posizione r e momento p sono legate dalla relazione $p = mr/\hbar t_{ToF}$. In generale, le interazioni possono essere trascurate durante l'espansione perchè la veloce espansione radiale dei tubi cancella di fatto l'interazione dalla dinamica assiale e dopo pochi ms un condensato interagente raggiunge una densità tale da poterlo considerare molto diluito. Ad ogni modo, negli esperimenti qui riportati, la lunghezza di scattering viene portata a

zero utilizzando la risonanza di Feshbach e quindi trascurare le interazione non è soltanto un'approssimazione.

Poichè per il teorema di Wiener-Khinchin la funzione d'onda di correlazione nello spazio dei momenti è legata alla funzione d'onda nello spazio reale per mezzo di una trasformata di Fourier, è possibile ricavare la funzione di correlazione nello spazio reale una volta nota la distribuzione dei momenti

$$g_1(r) = F^{-1}[\rho(p)] \quad (2.14)$$

Come detto nel paragrafo precedente, la funzione di correlazione di un quasicondensato decade su una lunghezza dell'ordine di L_ϕ . Più in generale, la funzione di correlazione decade su una lunghezza tipica ξ . Ciò comporta che la distribuzione dei momenti è una lorenziana

$$\rho(p) = \frac{1}{p^2 + (1/\xi)^2} \quad (2.15)$$

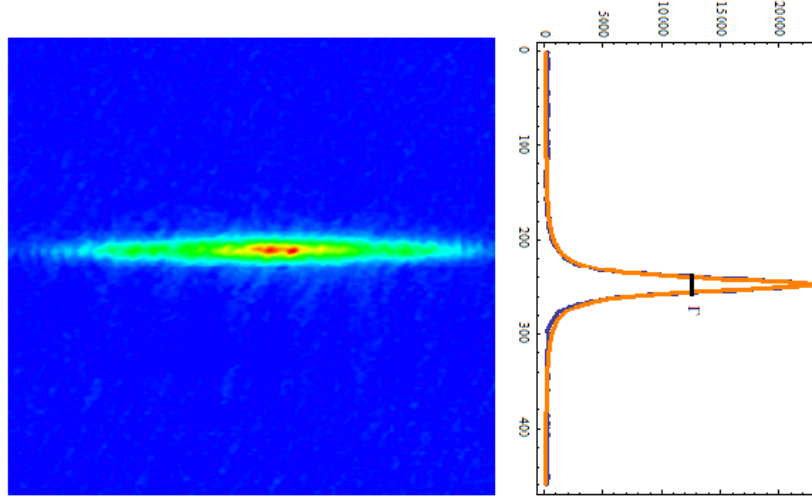


Figura 2.2: Immagine in time of flight del sistema e distribuzione dei momenti media ottenuta integrando l'immagine lungo l'orizzontale

la cui larghezza a metà altezza (*HWHM*) Γ (fig. 2.2) è legata alla lunghezza di correlazione del sistema per mezzo della relazione

$$\xi = \frac{0.67\hbar}{\Gamma} \quad (2.16)$$

Di conseguenza misurando la larghezza della distribuzione dei momenti è possibile ricavare informazioni sulla lunghezza di correlazione del sistema.

2.5 Modelli teorici

Come discusso brevemente paragrafi precedenti, un sistema unidimensionale esibisce un comportamento molto diverso da quello di un sistema tridimensionale. Nel sistema in esame, infatti, le interazioni tra le particelle giocano un ruolo di rilevata importanza e modificano profondamente il comportamento delle particelle. Difatti, a differenza che in un sistema tridimensionale, in un sistema unidimensionale le interazioni sono molto più forti a parità dell'energia cinetica. Ciò comporta per esempio che all'aumentare di questa energia di interazione il sistema unidimensionale bosonico possa acquisire proprietà fermioniche (gas di *Tonks-Girardeau* [43]).

Inoltre in un sistema unidimensionale, oltre alle interazioni, anche le fluttuazioni hanno un'importanza elevata vista la fragilità di tali sistemi se soggetti a perturbazioni esterne.

I sistemi unidimensionali (bosonici e fermionici), caratterizzati da interazioni e fluttuazioni, fanno parte di una classe di sistemi detti *liquidi di Tomonaga-Luttinger* [44].

Tali sistemi sono caratterizzati da eccitazioni a bassa energia che sono modi collettivi aventi una relazione di dispersione lineare. Esse possono essere spiegate come segue: se una particella si muove, a causa delle interazioni presenti tra le particelle, spinge quella vicina che spinge la successiva e così via. Ogni moto individuale è quindi convertito in un modo collettivo. (fig. 2.3)



Figura 2.3: Propagazione delle eccitazioni in un sistema unidimensionale

In questo paragrafo illustrerò il modello di Bose-Hubbard, che è un modello teorico utilizzabile in approssimazione di tight-binding ovvero in presenza di reticoli profondi. Per una maggiore trattazione dei modelli che descrivono i sistemi unidimensionali si rimanda a [44]

2.5.1 Modello di Bose-Hubbard

Se il reticolo è profondo ($s > 3$), il potenziale non può essere semplicemente trattato come una perturbazione. Per reticoli sufficientemente profondi ($s > 5$) si è nel così detto regime di tight-binding, in cui le funzioni di Wannier sono essenzialmente localizzate su un solo sito reticolare. In questo caso è conveniente lavorare con il modello di Bose-Hubbard, che usa la base delle funzioni di Wannier.

Nel par. 1.3 si è visto che in generale, l'Hamiltoniana che descrive il sistema di bosoni interagenti (con un potenziale di contatto) in un reticolo ottico, $V_l(r)$, e sottoposto a un potenziale esterno, $V_e(r)$ ha la forma, in seconda quantizzazione [27]

$$\hat{H} = \int d\mathbf{r} \hat{\Psi}^\dagger \left(\frac{-\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_e(r) + V_l(r) \right) \hat{\Psi} + \frac{g}{2} \int d\mathbf{r} \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} \hat{\Psi} \quad (2.17)$$

Di conseguenza, in questo modello, l'hamiltoniana si può ricavare partendo dalla relazione 2.17 e considerando come operatore di campo Ψ quello scritto in termini di orbitali di Wannier appartenenti alla banda di Bloch più bassa

$$\hat{\Psi}(r) \approx \sum_i w_i(r) \hat{b}_i \quad (2.18)$$

dove $\hat{b}_i$ è l'operatore di annichilazione dell' i -simo sito. In questa situazione l'hamiltoniana assume la forma

$$\hat{H} = -J \sum_i (\hat{b}_i^\dagger \hat{b}_{i+1} + H.c.) + \frac{U}{2} \sum_i \hat{n}_i (\hat{n}_i - 1) + \sum_i (\epsilon_i - \mu) \hat{n}_i \quad (2.19)$$

dove con $\hat{n}_i = \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i$ si intende l'operatore numero, ovvero l'operatore legato all'occupazione di ciascun sito, $\hat{b}_i^\dagger$ l'operatore di creazione e con μ il potenziale chimico.

In tale hamiltoniana il primo termine descrive l'energia cinetica del sistema. J è energia di tunneling introdotta nella 1.70 che può essere ricavata dalla relazione

$$J = - \int dx w_n^*(x) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{latt}(x) \right] w_n(x+d) \quad (2.20)$$

dove viene considerata solo la sovrapposizione delle funzioni di Wannier nei siti vicini. Essa può anche essere scritta in termini del parametro del reticolo s come

$$\frac{J}{E_r} = 1.43 s^{0.98} e^{-2.07\sqrt{s}} \quad (2.21)$$

L'energia di tunneling è così legata alla profondità del reticolo ottico che crea il potenziale periodico e può essere controllato variando l'intensità del laser.

Il secondo termine, proporzionale ad

$$U = g \int dr |\Psi(r)|^4 \quad (2.22)$$

è l'energia di interazione del sistema. U quantifica il costo in energia da pagare per mettere due particelle nello stesso sito. Il parametro di accoppiamento g deve in realtà essere sostituito da g_{1D} in presenza di un reticolo unidimensionale. Ad ogni modo, l'energia di interazione U ha la caratteristica di potere essere variata e controllata utilizzando la risonanza di Feshbach che alcuni atomi possiedono.

L'ultimo termine invece tiene conto della presenza di un potenziale esterno. Nel caso di un condensato in un reticolo ottico, infatti, è sempre presente un potenziale di trappola di tipo armonico. La presenza di un tale potenziale comporta un offset ϵ_i in energia nell' i -simo sito.

Nel caso di un intrappolamento armonico

$$\epsilon_i = \frac{\alpha}{2} \sum_i (i - i_0)^2 \quad (2.23)$$

dove α rappresenta la forza della trappola armonica e i_0 è il centro della trappola.

2.6 Superfluido e isolante di Mott

Scopo di questo paragrafo è quello di introdurre il concetto di isolante di Mott. Per far ciò, consideriamo lo stato fondamentale dell'Hamiltoniana di Bose Hubbard, introdotta nei capitoli precedenti

$$\hat{H} = -J \sum_i (\hat{b}_i^\dagger \hat{b}_{i+1} + H.c.) + \frac{U}{2} \sum_i \hat{n}_i (\hat{n}_i - 1) + \sum_i (\epsilon_i - \mu) \hat{n}_i \quad (2.24)$$

In una tale situazione è possibile distinguere due diversi tipi di regimi: regime superfluido e regime di isolante, a seconda del termine di energia dominante ovvero a seconda del rapporto U/J .

Nel caso in cui U è trascurabile, la fisica è quella delle onde di Bloch. L'energia cinetica è quindi minimizzata occupando lo stato fondamentale di Bloch, in cui le particelle sono delocalizzate su tutti i siti del reticolo.

Quando $U > 2J$ (in una dimensione), allora non è più vero che questo è lo stato con minore energia. Infatti, se si localizzassero le particelle su singoli stati di Wannier, si cancellerebbe U guadagnando però $2J$ di energia cinetica. E' chiaro che nel limite $U \gg J$ lo stato ad energia più bassa deve essere di questo tipo. La teoria prevede infatti una transizione di fase per U dell'ordine di $2J$.

Nel caso in cui $U \ll J$, la funzione d'onda che descrive lo stato superfluido può essere scritta come

$$|\Psi_{sf}\rangle \propto \left(\sum_{i=1}^N \hat{b}_i^\dagger \right)^N |0\rangle \quad (2.25)$$

la cui fase è costante e ben definita in ciascun sito del reticolo. Diversamente, il numero di particelle del sito non è determinato e mostra fluttuazioni di tipo Poissoniano.

Nel caso invece in cui $U \gg J$, la funzione d'onda che descrive lo stato di isolante assume la forma

$$|\Psi_{Mott}\rangle \propto \prod_i (b_i^\dagger)^N |0\rangle \quad (2.26)$$

Tale sistema è detto prende il nome di “*isolante di Mott*”.

In questa situazione, mentre il numero di particelle per sito è ben definito, non vi è correlazione di fase tra le funzioni di Wannier localizzate su ciascun sito.

Il modello di Bose-Hubbard predice quindi una transizione dalla fase superfluida a quella di isolante di Mott all'aumentare del rapporto U/J . Il valore critico a cui avviene la transizione dipende dal potenziale chimico μ come mostrato nel diagramma riportato in fig. 2.4.

Questa transizione è indotta dalle fluttuazioni quantistiche ed è presente anche quando $T=0$, in assenza di fluttuazioni termiche.

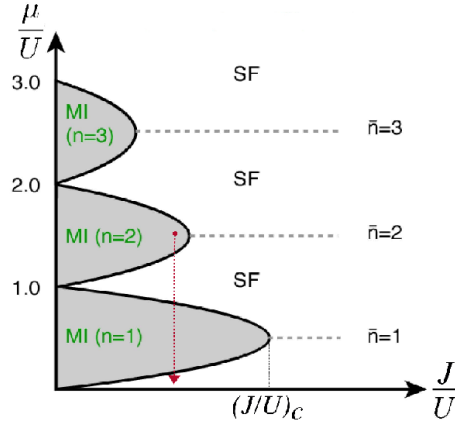


Figura 2.4: Diagramma di fase relativo alla transizione da superfluido (SF) a isolante di Mott (MI) nel caso di un modello di Bose-Hubbard omogeneo. I lobi relativi al MI sono caratterizzati da un numero costante n di particelle per sito. Più grande è il valore di n , più grande è il valore di energia di interazione critica per entrare nella fase di isolante. Nello stato di SF il numero di particelle è definito solo in media [45].

La transizione dallo stato superfluido a quello di isolante di Mott può essere osservata sperimentalmente incrementando l'altezza del reticolo ottico in cui sono confinati gli atomi. In questo modo si provoca un aumento dell'energia di interazione e contemporaneamente un decadimento dell'energia di tunnelling fra i siti primi vicini.

La prima osservazione sperimentale fu fatta da Greiner et al. [46] osservando il comportamento della distribuzione dei momenti degli atomi (fig. 2.5).

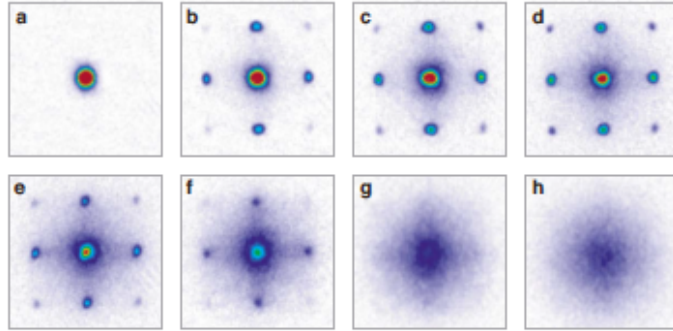


Figura 2.5: Osservazione della transizione da SF a MI misurando la distribuzione dei momenti. Le immagini sono prese aumentando il valore di U/J . Nel caso di SF, la presenza di interferenza indica la presenza di coerenza in tutto il sistema. Al contrario, quando il sistema entra nella fase di MI, gli atomi sono localizzati e la coerenza è persa e ciò comporta un'allargamento nella distribuzione dei momenti. Queste immagini si riferiscono a un reticolo 3D [46].

Quando il sistema è superfluido, infatti, la distribuzione dei momenti presenta effetti di interferenza, mentre nel caso di isolante di Mott, non vi è coerenza di fase nel sistema e l'interferenza è persa.

E' da notare che l'isolante di Mott non si presenta esclusivamente in presenza di reticoli profondi. Infatti, è stato trovato sperimentalmente che se si in presenza di forte interazione, anche una piccola perturbazione, come un reticolo poco profondo ($s < 3$), può causare il passaggio verso lo stato di isolante di Mott [47]

2.7 Eccitazioni di un condensato uniforme e instabilità energetica

Scopo di questo paragrafo è quello di introdurre la descrizione delle eccitazioni in un gas di Bose diluito e per fare ciò si considera l'equazione di Gross-Pitaevskii per il parametro d'ordine dipendente dal tempo (rel.1.39).

Nel limite di bassa temperatura, dove le proprietà delle eccitazioni non dipendono da essa, gli stati eccitati possono essere trovati dalla frequenza "classica" ω dell'equazione linearizzata di GP [48].

Per fare ciò, poniamo l'attenzione sulle soluzioni della forma

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = e^{-i\mu/\hbar}[\phi(\mathbf{r}) + u(\mathbf{r})e^{-i\omega t} + v^*(\mathbf{r})e^{i\omega t}] \quad (2.27)$$

che corrisponde a piccole oscillazioni del parametro d'ordine attorno al valore dello stato fondamentale. Tendendo solo i termini lineari nelle funzioni complesse u e v , l'eq. 1.39 assume la forma

$$\hbar\omega u(\mathbf{r}) = [H_0 - \mu + 2g\phi^2(\mathbf{r})]u(\mathbf{r}) + g\phi^2(\mathbf{r})v(\mathbf{r}) \quad (2.28)$$

$$\hbar\omega v(\mathbf{r}) = [H_0 - \mu + 2g\phi^2(\mathbf{r})]v(\mathbf{r}) + g\phi^2(\mathbf{r})u(\mathbf{r}) \quad (2.29)$$

dove $H_0 = -(\hbar^2/2m)\nabla^2 + V_{ext}(\mathbf{r})$. Queste equazioni accoppiate permettono di calcolare le autofrequenze ω e le energie $\epsilon = \hbar\omega$.

In un gas di bose uniforme, u e v sono onde piane e di conseguenza la legge di dispersione prende la forma di Bogoliubov

$$(\hbar\omega)^2 = \left(\frac{\hbar^2 q^2}{2m}\right) \left(\frac{\hbar^2 q^2}{2m} + 2gn\right) \quad (2.30)$$

dove $\mathbf{q}$ è il vettore d'onda delle eccitazioni e $n = |\phi|^2$ è la densità del gas.

Per grandi momenti lo spettro coincide con quello di una particella libera $\hbar^2 q^2/2m$. Mentre a bassi momenti la legge di dispersione assume la forma di quella dei fononi $\omega = v_s q$ dove

$$v_s = \sqrt{\frac{gn}{m}} \quad (2.31)$$

dove v_s è la velocità del suono o *velocità di Landau* (2.6)

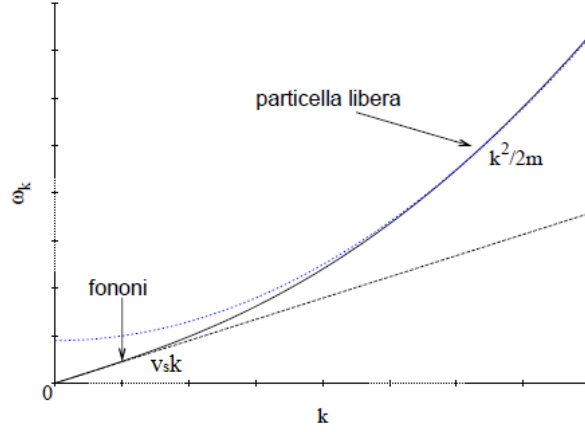


Figura 2.6: Relazione di dispersione per un condensato di Bose-Einstein uniforme

L'andamento lineare a bassi q della relazione di dispersione delle eccitazioni di un condensato di Bose-Einstein è all'origine delle proprietà del condensato stesso. Si supponga di perturbare il condensato per mezzo di un'impurezza di massa M che si muove nel mezzo con velocità $\vec{v}$. Il sistema risulta superfluido nel caso in cui l'impurezza non riesce a perturbare il sistema, ovvero non riesce a trasferire energia e creare eccitazioni.

Affinchè l'oggetto esterno possa trasferire energia ΔE ed impulso ΔP , eccitando alcuni modi collettivi, devono essere soddisfatte le relazioni di conservazione dell'energia [49]

$$\Delta E = \sum_k \hbar q v_s n_{\vec{k}} \quad (2.32)$$

e dell'impulso

$$\Delta \vec{P} = \sum_k \hbar \vec{q} n_{\vec{k}} \quad (2.33)$$

dove $n_{\vec{k}}$ è il numero di modi eccitati con vettore d'onda $\vec{k}$ nel regime fononico. Se si considerano le relazioni

$$c|\Delta \vec{P}| \leq \sum_k \hbar q v_s n_{\vec{k}} = \Delta E \quad (2.34)$$

e

$$\Delta E = \frac{|\vec{P}|^2}{2M} - \frac{\vec{P}}{M} \Delta \vec{P} - \frac{|\Delta \vec{P}|^2}{2M} = \vec{v} \cdot \Delta \vec{P} - \frac{|\Delta \vec{P}|^2}{2M} \approx \vec{v} \cdot \Delta \vec{P} \leq v|\Delta \vec{P}| \quad (2.35)$$

si ha che

$$v_s |\Delta \vec{P}| \leq v |\Delta \vec{P}| \quad (2.36)$$

da cui si trova una condizione sulla velocità

$$v \geq v_s \quad (2.37)$$

Di conseguenza l'oggetto di massa M può perturbare il sistema creando eccitazioni solo nel caso in cui la sua velocità è maggiore della velocità critica di Landau.

Cerchiamo di approfondire meglio perchè il sistema perde la superfluidità in presenza di un condensato con velocità maggiore di una velocità critica analoga a quella di Landau [14].

Per fare ciò, partiamo dall'equazione di Gross-Pitaevskii, che nel caso di un potenziale periodico unidimensionale assume la forma

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_L(x) + g|\Psi|^2 \right] \Psi. \quad (2.38)$$

Se introduciamo delle differenti notazioni

$$V_L(x) = V_0 \cos(2k_L x) \quad (2.39)$$

$$E_L = \frac{4\hbar^2 k_L^2}{m} \quad (2.40)$$

$$l = (2k_L)^{-1} \quad (2.41)$$

$$\tau = \left(\frac{E_L}{\hbar} \right)^{-1} \quad (2.42)$$

dove l è una scala di lunghezza e τ una scala temporale troviamo che con esse l'equazione di Gross-Pitaevskii diventa ($t \mapsto t/\tau$ $x \mapsto x/l$)

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left[-\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + v \cos x + c|\Psi|^2 \right] \Psi \quad (2.43)$$

dove $v = V_0/E_L$ e $c = \pi n_0 a/k_L^2$ in cui con n_0 si intende la densità media del condensato. Con queste notazioni l'equazione di Gross-Pitaevskii indipendente dal tempo diventa

$$\left[-\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + v \cos x + c|\Psi|^2 \right] \Psi = \mu \Psi. \quad (2.44)$$

Questa equazione ammette soluzione del tipo onda di Bloch

$$\Psi(x) = e^{ikx} u_k(x) \quad (2.45)$$

dove il termine $|\Psi(x)|^2 = |u_k(x)|^2$ assume la stessa periodicità del reticolo. Un'onda di Bloch corrisponde quindi ad un condensato che si muove nel reticolo con quasimomento k .

Per discutere l'instabilità energetica, consideriamo una soluzione stazionaria, del tipo onda di Bloch, a cui sommiamo le fluttuazioni

$$\Psi(x) = e^{ikx} [\phi_k(x) + \delta\phi_k(x)] \quad (2.46)$$

dove le fluttuazioni possono essere scritte nella forma

$$\delta\phi_k(x, q) = u_k(x, q)e^{iqx} + v_k^*(x, q)e^{-iqx} \quad (2.47)$$

con $u_k(x, q)$ e $v_k(x, q)$ funzioni aventi la stessa periodicità del reticolo.

Inserendo tale funzione del funzionale dell'energia

$$E[\Psi] = \int dx \Psi^* \left[-\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + v \cos x \right] \Psi + \frac{c}{2} \int dx |\Phi|^4 \quad (2.48)$$

si ottiene

$$\delta E_k = \int dx \begin{pmatrix} u_k^* & v_k^* \end{pmatrix} M_k(q) \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

dove $M_k(q)$ è la matrice

$$M_k(q) = \begin{pmatrix} L(k+q) & c\phi_k^2 \\ c\phi_k^{*2} & L(-k+q) \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

con

$$L(k) = -\frac{1}{2} \left(\frac{d}{dx} + ik \right)^2 + v \cos x - \mu + |\phi_k|^2 \quad (2.51)$$

Poniamo l'attenzione sul caso semplice, risolvibile analiticamente, in cui si è in assenza di reticolo ($v \rightarrow 0$). In questo caso la funzione d'onda si riduce ad un'onda piana

$$\Psi \propto e^{ikx} \quad (2.52)$$

e la matrice $M_k(q)$ assume la forma

$$M_k(q) = \begin{pmatrix} q^2/2 + kq + c & c \\ c & q^2/2 - kq + c \end{pmatrix} \quad (2.53)$$

i cui autovalori sono

$$\lambda_{\pm} = \frac{q^2}{2} + c \pm \sqrt{k^2 q^2 + c^2} \quad (2.54)$$

Quando uno dei due autovalori diventa negativo, contribuisce all'energia totale con un termine $\delta E < 0$ e ciò comporta che eccitare il modo corrispondente comporta un abbassamento dell'energia del sistema: è più favorevole dal punto di vista energetico creare eccitazioni e passare verso una condizione di instabilità.

2.8 Instabilità dinamica

Scopo di questo paragrafo è quello di introdurre il fenomeno dell'instabilità dinamica, il quale si presenta quando un condensato di Bose debolmente interagente si muove all'interno di un reticolo ottico.

Questo effetto si manifesta quando il vettore d'onda associato al momento del condensato supera un certo valore critico, p_c , facendo sì che il moto coerente del sistema risulti instabile e comportando una perdita della superfluidità.

Dal punto di vista formale, anche l'instabilità dinamica può essere ricavata partendo dall'equazione di Gross-Pitaevskii (eq.2.43)[14].

Per discutere l'instabilità dinamica consideriamo una soluzione di tipo onda di Bloch dipendente dal tempo a cui sommiamo delle fluttuazioni

$$\Psi(x) = e^{i(kx - \mu t)}[\phi_k(x) + \delta\phi_k(x, t)] \quad (2.55)$$

dove

$$\delta\phi_k(x, t; q) = u_k(x, q)e^{i(qx - \omega_q t)} + u_k^*(x, q)e^{-i(qx - \omega_q t)} \quad (2.56)$$

Se inseriamo la relazione 2.55 all'interno dell'equazione di Gross-Pitaevskii troviamo la seguente equazione agli autovalori

$$\sigma_z M_z(q) \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix} = \omega_q \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

con $M_k(q)$ definita nel paragrafo precedente e σ_z la matrice di Pauli.

Questa equazione ammette coppie di autovalori complesse coniugate della forma

$$\omega_q = \text{Re}(\omega_q) \pm i\text{Im}(\omega_q) \quad (2.58)$$

Se la parte immaginaria di tali autovalori è diversa da zero, la soluzione 2.55 ha un'evoluzione temporale del tipo

$$e^{-i\omega_q t} = e^{-i\text{Re}(\omega_q)t \pm \text{Im}(\omega_q)t} \quad (2.59)$$

e di conseguenza ci sono modi, (con parte immaginaria positiva) che crescono esponenzialmente nel tempo e si ha quindi l'instabilità dinamica. Una semplice analisi di stabilità lineare mostra che l'instabilità dinamica interviene sempre quando $q=1/2$. [14]

Per comprendere questa instabilità dal punto di vista fisico, si può porre l'attenzione sul comportamento della corrente del superfluido al variare del momento del condensato [13].

In un sistema continuo, la corrente ha la forma

$$I = \rho_s p \quad (2.60)$$

dove con ρ_s si intende la densità del superfluido e con p il momento del condensato.

In un sistema discreto e in approssimazione di tight-binding questa relazione viene modificata e assume la forma

$$I = \rho_s \sin p \quad (2.61)$$

che può essere ricondotta alla relazione di J nel continuo per piccole correnti.

Nel regime di Gross-Pitaevskii, la densità del superfluido non dipende dal momento p e quindi I assume il massimo valore quando $p = \pi/2$ ovvero quando la massa efficace cambia segno e il moto del condensato diventa quindi instabile.

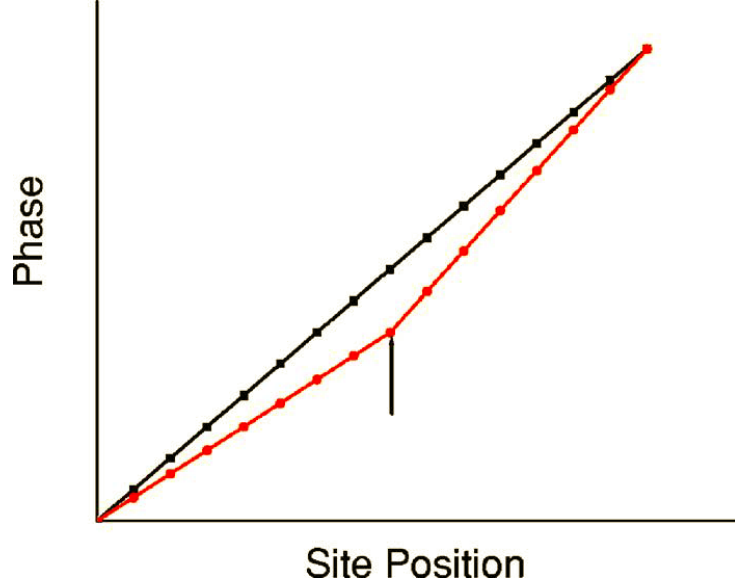


Figura 2.7: Rappresentazione schematica di una perturbazione di uno stato con gradiente di fase uniforme. I punti rappresentano la fase su siti differenti per un sistema uniforme e per uno perturbato. Le linee sono da usare esclusivamente come guida.

Consideriamo una leggera perturbazione del momento $p \pm \delta p$ (fig. 2.7) Questa si traduce in una differenza in energia tra lo stato perturbato e lo stato imperturbato che scritta in termini di potenze di δp assume la forma

$$\delta E \approx \frac{1}{2} \frac{d^2 E}{dp^2} (\delta p)^2 \quad (2.62)$$

Poichè la corrente del superfluido è formalmente definita come la derivata dell'energia rispetto il gradiente di fase, $I(p) = dE/dp$ si trova che

$$\delta E \propto \frac{dI}{dp} (\delta p)^2 \quad (2.63)$$

In questo modo, se la corrente è una funzione crescente del momento, piccole deviazioni dallo stato uniforme aumentano l'energia mentre, quando $dI/dp < 0$ le fluttuazioni considerate riducono l'energia del sistema e il sistema diventa instabile.

Finora si è ipotizzato che le interazioni in gioco fossero piccole. A seguito del loro aumento il sistema subisce una transizione di fase e passa da uno stato di superfluido ad uno stato di isolante. Questa transizione è guidata dall'aumento delle fluttuazioni quantistiche che crescono al crescere dell'interazione.

Se p aumenta, si osserva una diminuzione dell'energia di tunnelling I_{eff} lungo la direzione della corrente, a causa dell'aumento della massa efficace di singola particella all'aumentare del quasimomento. Come conseguenza, vi è un aumento delle fluttuazioni quantistiche che dipendono dal rapporto U/nI_{eff} , e ciò comporta una variazione della densità del superfluido con p . Di conseguenza la corrente assume la forma

$$I = \rho(p) \sin p \quad (2.64)$$

dove $\rho(p)$ diminuisce monotonicamente con p . Ciò comporta che all'aumentare dell'interazione il momento critico $p_c^* < \pi/2$ e in particolare raggiunge 0 nelle vicinanze della transizione tra superfluido a isolante.

L'andamento predetto è stato anche osservato sperimentalmente [12].

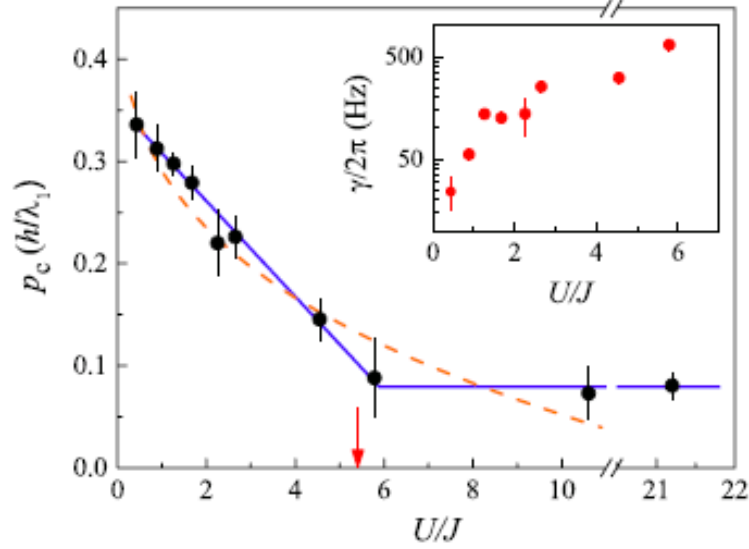


Figura 2.8: Momento critico in presenza di reticolo periodico al variare dell'interazione. La linea continua è un fit lineare e la freccia indica il valore di U/J critico per cui si passa da stato superfluido a isolante di Mott per $n = 2$. Accanto si riporta l'andamento dello smorzamento [12]

Come si può osservare dalla fig. 2.8, il momento critico p_c diminuisce all'aumentare dell'interazione di U (a parità di J), mentre lo smorzamento γ aumenta. Il fatto che il momento critico non raggiunge valore nullo quando U raggiunge il valore che caratterizza la transizione verso isolante può essere spiegato ipotizzando che non tutto il sistema si trovi nello stato di isolante, ma parte di esso sia ancora nello stato di superfluido a causa della presenza di tubi con densità $n < 1$ che non localizzano.

Si noti che al diminuire della profondità del reticolo e in presenza di basse interazioni, le bande energetiche si modificano e l'inversione della massa efficace avviene a momenti maggiori di $0.5\hbar k$ e di conseguenza il momento critico può assumere valori maggiori di tale valore.

2.9 Phase-Slips

Nei capitoli precedenti è già stato illustrato come un sistema unidimensionale risulta fragile e come la presenza di fluttuazioni possa distruggere le proprietà di coerenza e di superfluidità del sistema.

In questo capitolo sarà illustrato il comportamento del sistema unidimensionale in esame a seguito di fluttuazioni di fase termicamente o quantisticamente attivate, dette

phase slips [17, 18, 13]. La presenza di tali fluttuazioni comporta un decadimento del flusso di corrente del superfluido anche in condizioni in cui non si è in presenza di instabilità dinamica.

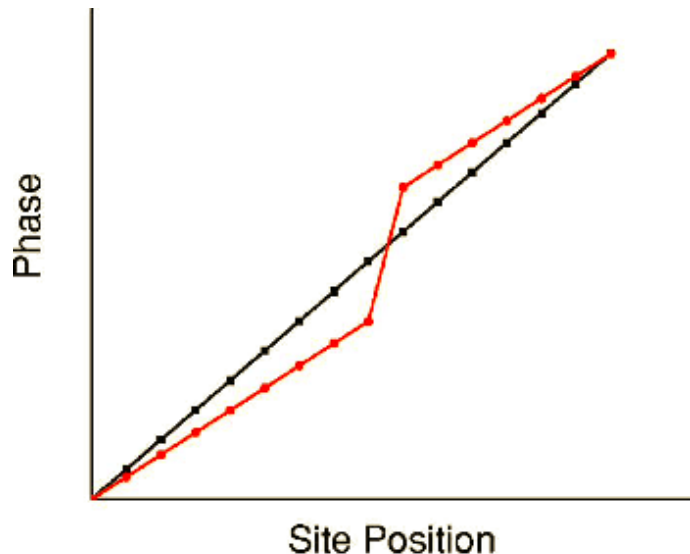


Figura 2.9: Rappresentazione schematica di un phase-slips. Le notazioni sono le stesse che in 2.7

Un phase-slip corrisponde alla generazione di una grande differenza di fase in un sito (fig. 2.9) a simultaneamente alla diminuzione del gradiente di fase nel resto della catena. Poichè l'energia è una funzione periodica della differenza di fase, la generazione di phase-slips riduce la corrente del superfluido anche a piccoli momenti.

La questione dei phase-slips è stata inizialmente studiata nel caso dei superconduttori [19]. Infatti anche in quest'ambito la presenza di phase-slips comporta un aumento della resistenza anche nel caso in cui si è in presenza di un sottile filo superconduttore la cui temperatura è al di sotto della temperatura critica T_c . In questa situazione, durante un phase-slips, il parametro d'ordine descrivente il sistema tende a zero in un qualche punto lungo il filo comportando una fluttuazione di fase di 2π e ciò si traduce in un impulso di tensione. La somma di questi impulsi comporta un aumento della tensione resistiva.

Come discusso nella sessione precedente, se il momento associato al superfluido supera un valore critico pari a $0.5\hbar k$ il sistema è instabile.

Al contrario, se $p < 0.5\hbar k$, la corrente risulta stabile per piccole fluttuazioni. Ad ogni modo questo stato non corrisponde al minimo dell'energia in quanto quello con il minimo di energia è quello in cui non vi è flusso di corrente. Un tale stato è quindi metastabile e di conseguenza può decadere spontaneamente a causa del tunneling quantistico.

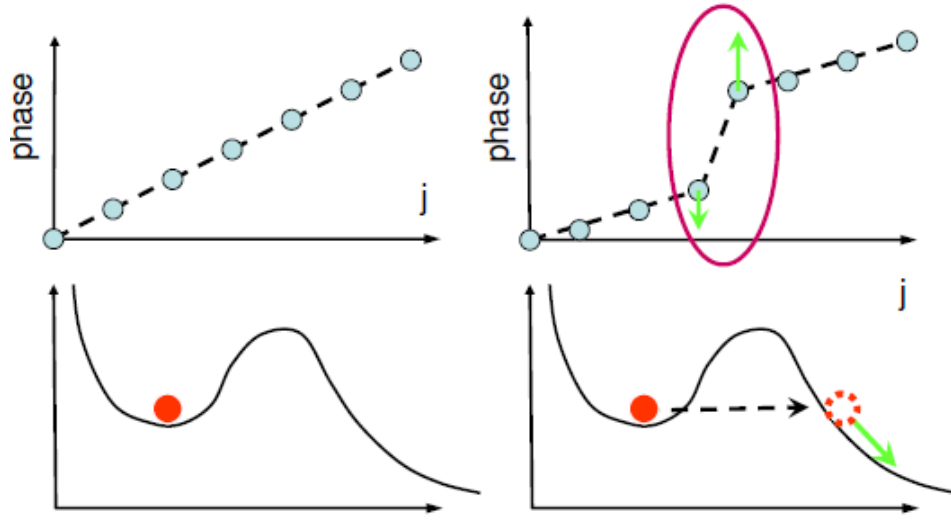


Figura 2.10: Allontanamento dallo stato metastabile a causa del tunneling quantistico. j è indica le coordinate lungo la direzione del flusso di corrente. A sinistra della barriera il sistema si trova in uno stato metastabile. Alla sua destra, invece, è presente lo stato stabile (in cui la corrente è nulla) verso cui il sistema può andare per mezzo di fluttuazioni.

Il rate di generazione delle phase-slips nel sistema unidimensionale in approssimazione di Bose-Hubbard può essere scritto come [13]

$$\Gamma \propto e^{-S} \quad (2.65)$$

dove S è l'azione caratteristica del sistema, definita come

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad (2.66)$$

dove L è la lagrangiana del sistema in esame.

Poniamo ora l'attenzione sui phase-slips attivati termicamente.

L'allontanamento del sistema dallo stato metastabile può non avvenire esclusivamente a causa di effetto tunnel, ma anche la temperatura può influenzare tale passaggio verso un altro stato. In questo caso si ha che il rate di produzione di queste phase slips va come

$$\Gamma = e^{-\Delta E/kT} \quad (2.67)$$

dove ΔE è la differenza in energia che il sistema deve superare per andare dallo stato metastabile allo stato stabile in cui non vi è più flusso di corrente.

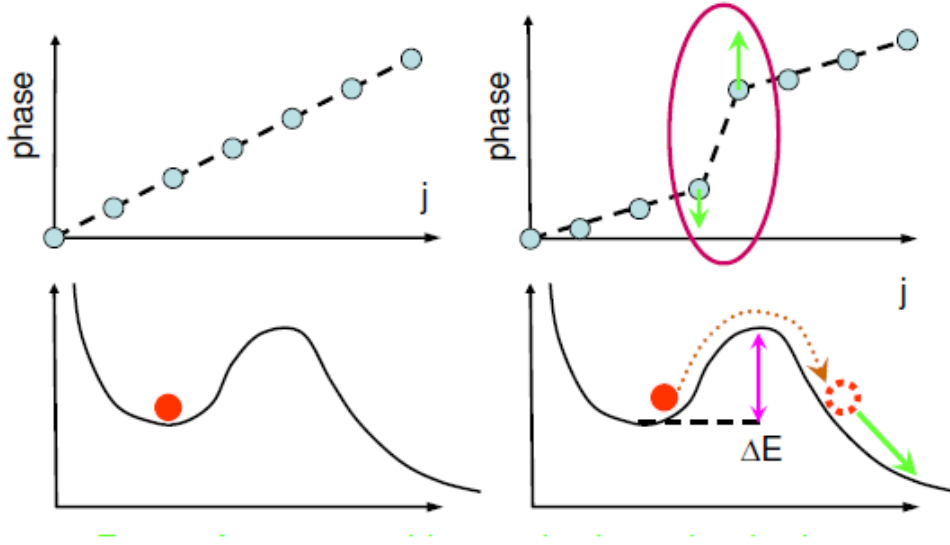


Figura 2.11: Allontanamento dallo stato metastabile a causa della temperatura. j indica le coordinate lungo la direzione del flusso di corrente. A sinistra della barriera il sistema si trova in uno stato metastabile. Alla sua destra, invece, è presente lo stato stabile (in cui la corrente è nulla) verso cui il sistema può andare per mezzo di fluttuazioni.

Di conseguenza quando la temperatura è al di sotto di una temperatura critica T_0 le fluttuazioni termiche sono soppresse e i phase-slips sono generati esclusivamente per effetti quantistici. All'aumentare della temperatura invece, i phase-slips sono attivati termicamente. Secondo le teorie sopra citate la temperatura critica T_0 di intersezione delle due regioni è dell'ordine dell'energia di Josephson

$$kT_0 = c\sqrt{nJU} \quad (2.68)$$

con c un fattore, minore dell'unità, che dipende dal momento.

Secondo il modello preso in considerazione [18], se il sistema viene messo in moto e comincia ad oscillare, si può osservare, a causa della presenza delle phase-slips, uno smorzamento di tale oscillazione. Questo smorzamento è legato al rate di formazione delle phase-slips dalla relazione

$$G(v) \propto \Gamma(v)/v \quad (2.69)$$

Di conseguenza, studiando l'andamento dello smorzamento dell'oscillazione è possibile individuare la presenza di phase-slips attivate quantisticamente.

E' possibile dare una spiegazione qualitativa del perchè lo smorzamento risulta proporzionale al rapporto $\Gamma(v)/v$.

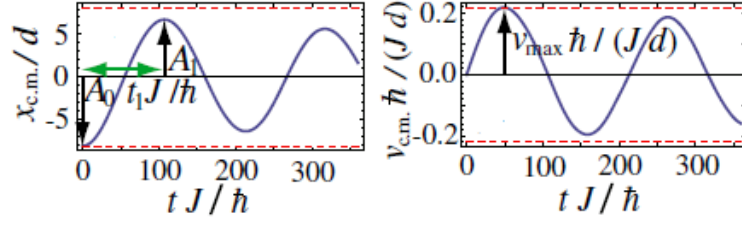


Figura 2.12: Evoluzione della posizione $x_{c.m.}(t)$ e della velocità $v_{c.m.}(t)$ del centro di massa

Per fare ciò consideriamo l'energia persa durante l'oscillazione. Essa può essere scritta in termini dello smorzamento del primo mezzo periodo in due differenti modi.

Il primo modo è in termini dell'energia potenziale persa $E_{loss} = (1/2)M\omega^2(A_0^2 - A_1^2)$, dove ω è la frequenza dell'oscillazione, M è la massa totale e A_0 e A_1 sono l'altezza del massimo e del minimo come riportato in fig. 2.12. Supponendo che lo smorzamento sia così debole che $\delta = 1 - A_1/A_0 \ll 1$, o in modo equivalente $Gt_1 \ll 1$, l'energia persa può essere riscritta come

$$E_{loss} \simeq M(\omega A_0)^2 \delta \simeq M v_{max} G t_1 \quad (2.70)$$

dove sono state usate le relazioni $\delta \simeq Gt_1$ e $v_{max}\omega A_0$ e in cui v_{max} è la velocità massima del centro di massa come indicato in fig. 2.12.

L'altro modo è esprimere l'energia persa in termini di effetto Joule, usando la relazione $E_{loss} = P \times t_1$ dove $P = RI^2$ è la potenza, R la resistenza, e $I \sim n_{medio} v_{max}$ la corrente di particelle con n_{medio} la densità media.

Assumendo che la principale sorgente di resistenza sia causata dalla presenza di phase-slips, essa può essere relazionata con il rate di formazione delle stessa con $R = 2\pi\hbar\Gamma/I$ e quindi

$$E_{loss} \sim 2\pi\hbar n_{medio} v_{max} \Gamma t_1 \quad (2.71)$$

che connette l'energia persa e il rate di formazione di phase-slips. Eguagliando le eq. 2.70 e l'eq. 2.71 si trova che $G \sim 2\pi\hbar n_{medio}/M \times \Gamma/v_{max}$

Secondo il modello, studiato in approssimazione di tight-binding [18], lo smorzamento dell'oscillazione ha diversi comportamenti a seconda che si sia in presenza di phase-slips attivate termicamente o quantisticamente.

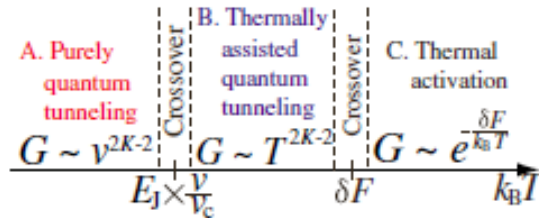


Figura 2.13: Diagramma schematico che illustra il comportamento dello smorzamento al variare della temperatura [18].

Se $k_B T \ll E_j v/v_c$, dove E_j è l'energia di Josephson, le phase-slips sono causate puramente dal tunnelling quantistico e $G \propto v^{2K-2}$ con K parametro di Luttinger [43]. Se $E_j v/v_c \ll k_B T \ll \delta F$ le phase-slips sono causate dal tunneling quantistico assistite dalla temperatura e $\Gamma \propto v T^{2K-2}$ e $G \propto T^{2K-2}$. Con δF si intende la barriera di energia libera. Quando $K_B T \gg \delta F$ diventa dominante il processo di attivazione puramente termico e $G \propto e^{-\delta F/K_B T}$

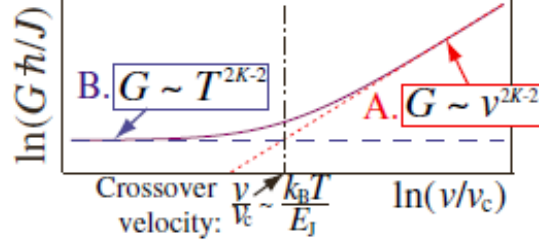


Figura 2.14: Andamento dello smorzamento al variare della velocità (normalizzata per il valore di velocità critico a cui avviene l'instabilità dinamica). E' possibile individuare due diversi regimi. A basse velocità lo smorzamento non dipende dalla velocità, e questo corrisponde alla presenza di phase-slips generate dal tunneling quantistico assistite della temperature. Ad alte v , invece, lo smorzamento dipende da una potenza della velocità [18]

Come si può vedere dalla fig. 2.14, quando $k_B T \ll \delta F \sim E_j$, è possibile osservare il passaggio dalla regione di phase-slips dovute al tunneling quantistico assistito termicamente verso la regione di phase-slips puramente quantistiche variando la velocità del condensato a T fissata.

Capitolo 3

Realizzazione sperimentale di una BEC di ^{39}K

La componente principale dell'esperimento descritto in questa tesi è il condensato di ^{39}K con interazione variabile [50]. Quest'ultimo è un elemento avente una naturale lunghezza di scattering negativa [51], pari a $a_{39} = -44a_0$, che comporta un'interazione attrattiva e di conseguenza il collasso della BEC [52].¹

Tuttavia il ^{39}K è caratterizzato da una risonanza di Feshbach che, come mostrato nel 1.2.1, permette di variare la lunghezza di scattering tra gli atomi e consente di portarla a un valore positivo o nullo in modo tale da permettere la realizzazione e lo studio di una BEC debolmente interagente.

Per realizzare il condensato di Bose Einstein non è possibile utilizzare tecniche di raffreddamento di termodinamica classica basate sul contatto termico con liquidi di azoto o di elio. Per di più, a causa delle proprietà del ^{39}K in assenza di campo magnetico, è molto difficile raffreddare tale elemento utilizzando un processo di raffreddamento evaporativo [53]. Di conseguenza, per portare il sistema a temperature tali da permettere la condensazione si utilizza, negli esperimenti in esame, il raffreddamento simpatetico e per fare ciò è viene utilizzato un altro elemento che nel caso in esame è il ^{87}Rb .

Il potassio è un metallo alcalino che in natura esiste sottoforma di tre isotopi stabili, due dei quali bosonici, ^{39}K (93.3 %) e ^{41}K (6.7 %) mentre il terzo fermionico ^{40}K . (0.01 %)

Anche il rubidio è un metallo alcalino e in natura esistono due isotopi stabili, entrambi bosonici ^{85}Rb (72.2 %) e ^{87}Rb (27.8 %). Come il ^{39}K , anche il ^{85}Rb è caratterizzato da una lunghezza di scattering negativa e ciò non permette la formazione di un condensato.

In figura 3.1 viene riportata la struttura iperfine del ^{39}K e del ^{87}Rb

Di seguito saranno introdotti brevemente i processi sperimentali che permettono di realizzare un condensato di Bose Einstein di ^{39}K . Per ulteriori dettagli si rimanda alle tesi precedentemente scritte [32, 54, 55, 56, 57, 41, 58]

¹Quando la lunghezza di scattering, a , è negativa le interazioni sono attrattive e il condensato di Bose-Einstein tende a contrarsi per minimizzare l'energia complessiva. In una trappola armonica, questa contrazione compete con l'energia cinetica di punto zero, che tende a fare espandere il condensato. Tuttavia se l'energia di interazione attrattiva è abbastanza forte, l'energia cinetica non riesce a stabilizzare il condensato che quindi implode. Un condensato può evitare l'implosione solo se il numero di atomi N_0 è minore di un valore critico dato da $N_{cr} = ka_{ho}/|a|$

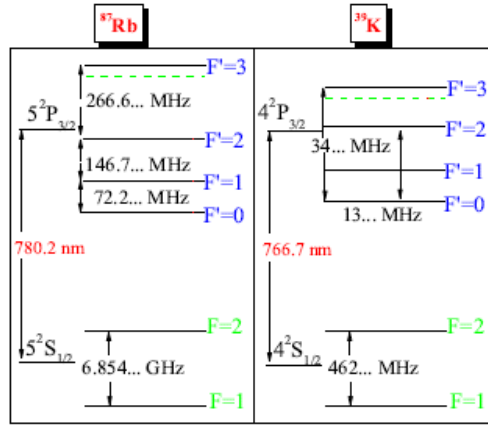


Figura 3.1: Struttura iperfine del ^{39}K e del ^{87}Rb . Adattata da[55]

3.1 Trappola magneto-ottica

Primo passo per la realizzazione di un condensato di Bose Einstein è il raffreddamento e l'intrappolamento degli atomi di ^{39}K e di ^{87}Rb in una trappola magneto-ottica (MOT).

In un modello unidimensionale, per raffreddare gli atomi vengono utilizzati due fasci laser, di pari intensità e frequenza, che si propagano in versi opposti. I fasci laser permettono di raffreddare gli atomi per mezzo dell'effetto Doppler. Tale raffreddamento è legato allo scambio di impulso nel processo di interazione (assorbimento e emissione) tra atomo e fotone in cui l'assorbimento dà come risultato medio un cambiamento della velocità dell'atomo nella direzione della luce (a differenza dell'emissione che è equiprobabile in tutte le direzioni).

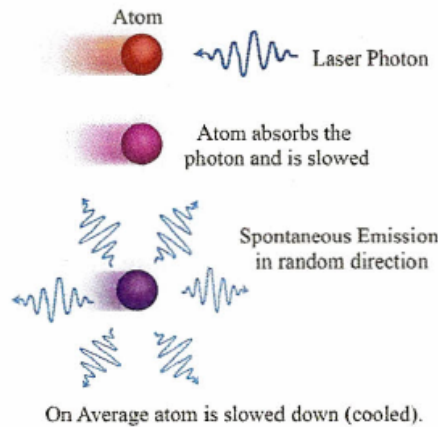


Figura 3.2: Schematizzazione dell'interazione tra la radiazione elettromagnetica e gli atomi [58].

I due fasci contropropaganti, la cui frequenza è spostata rispetto la transizione atomica, generano sugli atomi una forza di tipo viscoso ($F = -\gamma v$) che li rallenta e li raffredda in quanto le forze esercitate dai due fasci su ciascun atomo saranno sbilanciate a favore di quella esercitata dal fascio che viene visto spostato verso la risonanza, ovvero quello che si muove in direzione opposta all'atomo (fig 3.3) [27].

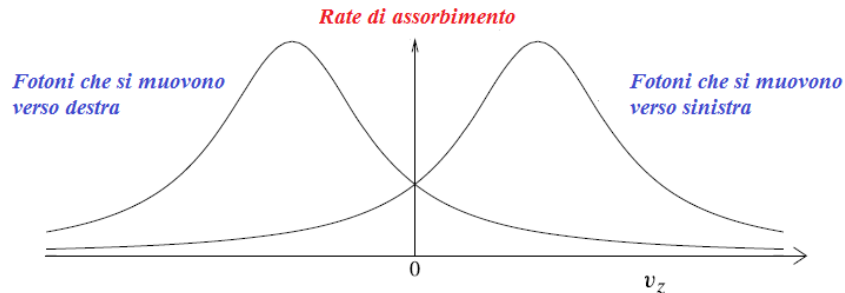


Figura 3.3: Rate di assorbimento dei fotoni dei due laser detunati verso il rosso come funzione della velocità atomica [27]

Il processo di raffreddamento è efficace solo se avviene su una transizione ottica chiusa che permetta agli atomi di compiere ripetuti cicli di assorbimento ed emissione spontanea senza che questi decadano in livelli non accoppiati con la luce laser.

Nel caso degli atomi di ^{87}Rb e di ^{39}K si utilizza come transizione principale per il raffreddamento quella che permette di passare dal livello con $F = 2$ al livello $F' = 3$. Tuttavia alcuni atomi potrebbero spontaneamente decadere verso il livello $F=1$ non accoppiato con la luce laser e quindi verrebbero persi. Di conseguenza si utilizza un fascio laser, detto di ripompa, che lega gli stati $F = 1$ e $F = 2$.

Se oltre ai fasci laser, siamo in presenza di un campo magnetico di quadrupolo disomogeneo della forma

$$\mathbf{B} = B'(x, y, -2z) \quad (3.1)$$

possiamo non solo raffreddare gli atomi ma intrappolarli. In questa situazione si parla di trappola magneto-ottica (MOT). La situazione è schematizzata in fig. 3.4 dove i fasci laser sono polarizzati circolarmente.

Si ipotizzi, per semplicità, che l'atomo possieda solo due livelli energetici, uno fondamentale e uno eccitato, caratterizzati dal numero quantico $J = 0$ e $J = 1$ rispettivamente. A causa del campo magnetico, si è in presenza di una separazione dei sottolivelli magnetici a causa dell'effetto Zeeman. Quando i fasci laser interagiscono con gli atomi in una tale configurazione, a causa delle regole di selezione che derivano dalla conservazione della proiezione J_z del momento angolare lungo l'asse z , si ha che il fascio con polarizzazione σ_- proveniente da destra può indurre la transizione solo verso il livello caratterizzato da $m=-1$, al contrario per il fascio con polarizzazione σ_+ . Se i fasci laser hanno frequenza minore di quella che caratterizza la transizione atomica (ovvero se la frequenza è spostata verso il rosso), si ha che un atomo che si muove verso destra interagisce (a causa dell'effetto Doppler) maggiormente con il fascio che proviene da destra. Al contrario per gli atomi che

si muovono verso sinistra. In entrambi i casi, la pressione di radiazione spinge gli atomi verso il centro. Applicando tre coppie di fasci laser contropropaganti lungo gli stessi assi, è possibile realizzare una trappola tridimensionale.

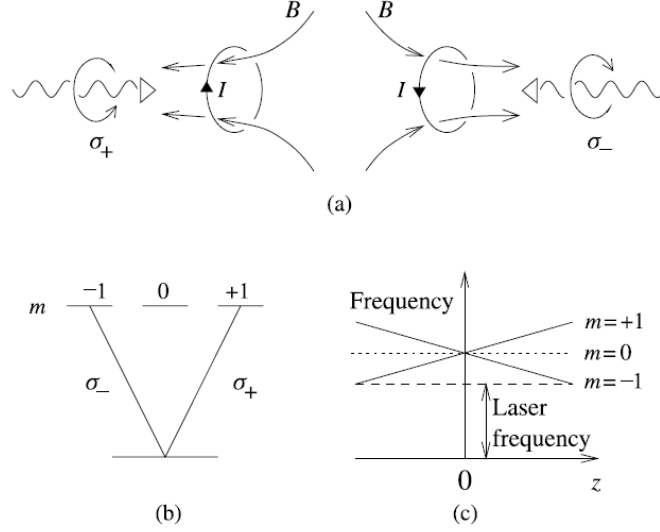


Figura 3.4: a) Trappola magneto ottica b) Transizioni rilevanti c) Influenza sulle transizioni atomiche di un campo magnetico spazialmente variabile [27]

Il sistema da noi utilizzato è un sistema a doppia MOT. La prima MOT è collegata ai campioni atomici allo stato solido che diffondono all'interno della prima cella, in cui vi è una pressione di 10^{-9} Torr, a seguito di un processo di sublimazione. Tali atomi, una volta che sono stati intrappolati nella prima MOT, vengono spinti nella seconda per mezzo di un fascio di spinta. Qui la pressione della MOT è di 10^{-12} Torr.

Utilizzare un sistema a doppia MOT permette sia di intrappolare un elevato numero di atomi, grazie all'alta pressione della prima cella, ma anche di avere nella seconda MOT una miscela con una vita media più elevata a grazie alla pressione più bassa.

Alla fine di questa fase si ottengono circa 10^9 atomi di ^{87}Rb e 10^7 atomi di ^{39}K raffreddati sino a temperature dell'ordine di decine di μK .

3.2 Intrappolamento magnetico

Gli atomi di potassio vengono preparati nello stato $|F = 2, m_f = 2\rangle$ ² che vengono chiamati *low-field seekers* e che possono essere intrappolati per mezzo di un campo magnetico (fig. 3.5).

²Nella MOT gli atomi sono distribuiti quasi equamente in tutti i livelli Zeeman. Per popolare quindi il livello di interesse, $|F = 2, m_f = 2\rangle$ si utilizza un pompaggio ottico selettivo sui sottolivelli Zeeman che viene applicato alla fine della fase di MOT

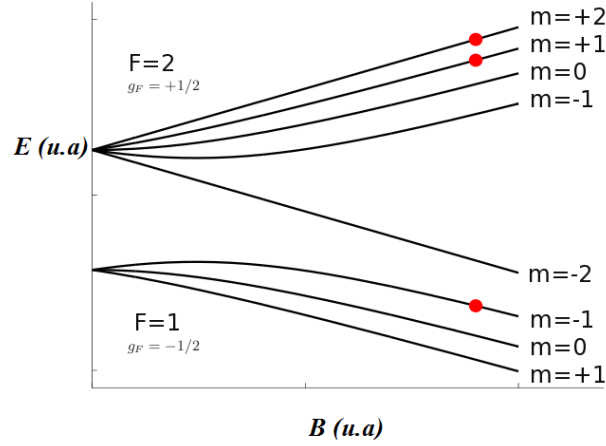


Figura 3.5: A sinistra viene riportata la struttura iperfine e a destra la separazione dei livelli a causa dell'effetto Zeeman degli stati $|F = 1\rangle$ e $|F = 2\rangle$. I livelli contraddistinti dal punto rosso indicano gli stati intrappolabili dal punto di vista magnetico [57].

Difatti l'applicazione di un campo magnetico $B(\mathbf{r})$ comporta, a seguito dell'effetto Zeeman, una separazione dei livelli iperfini

$$\Delta E = m_f g_F \mu_B B(\mathbf{r}) \quad (3.2)$$

dove con g_F si intende il fattore di Landè e con μ_B il magnetone di Bohr. I livelli low-field seekers sono quelli in cui il prodotto $m_f g_F > 0$ e di conseguenza sono quelli intrappolabili in un minimo del potenziale in quanto all'aumentare di B la loro energia aumenta.

Il campo magnetico è realizzato utilizzando tre bobine in configurazione QUIC (Quadrupole Ioffe-Pritchard Configuration), due delle quali generano un campo radiale di quadrupolo mentre la terza, di pinch, è ortogonale all'asse di quadrupolo. La presenza di quest'ultima bobina è necessaria per spostare il minimo del campo di quadrupolo a valori diversi da zero in modo da evitare la perdita di atomi a seguito della depolarizzazione.

Come detto nell'introduzione, con la strumentazione utilizzata è difficile raffreddare il K per mezzo del processo di evaporazione. Di conseguenza si sceglie di raffreddarlo per mezzo del raffreddamento simpatetico con il Rb per il quale si utilizzano le procedure sino ad ora introdotte.

Durante la fase di intrappolamento magnetico avviene il raffreddamento per evaporazione degli atomi di Rb (fig. 3.6)

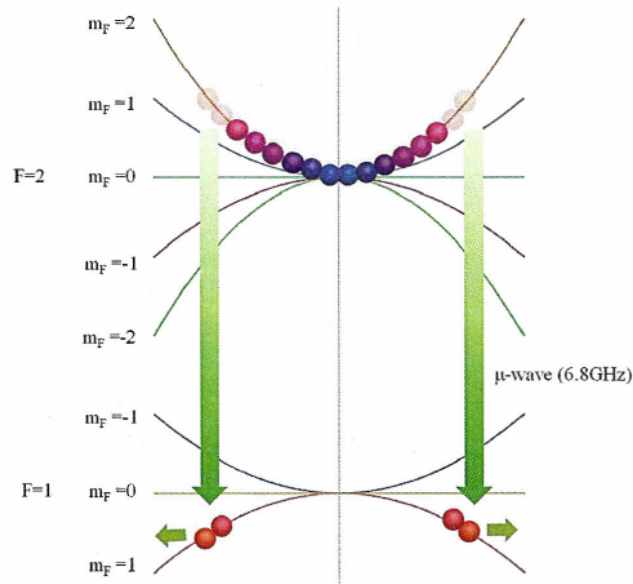


Figura 3.6: Utilizzando la radiazione a μ -onda vengono popolati sottolivelli Zeeman non intrappolabili per mezzo del campo magnetico B [58]

Questo ulteriore raffreddamento è necessario perché le temperature raggiunte per mezzo del raffreddamento laser, seppur molto basse, non sono tali da potere produrre la condensazione di Bose Einstein.

Il raffreddamento nella trappola ottica viene fatto eliminando dal sistema le particelle con energia più alta dell'energia media delle particelle del sistema e ciò viene fatto popolandosi i sottolivelli Zeeman che non vengono intrappolati dal campo magnetico utilizzando una microonda opportuna (fig.3.6) In questo modo le particelle restanti vengono raffreddate per mezzo delle collisioni elastiche che ripopolano la coda ad alta energia della distribuzione di Boltzman.

Per quanto riguarda gli atomi di potassio, questi vengono raffreddati per mezzo delle collisioni elastiche con gli atomi di rubidio. Si parla in questo di raffreddamento simpatetico.

In questa situazione le temperature raggiunte sono dell'ordine di $T \approx 1\mu K$.

3.3 Intrappolamento ottico

Per riuscire a portare gli atomi di potassio a temperature tali da poter fare avvenire la condensazione è necessario intrappolare tali atomi in una trappola ottica (par- 1.4) la quale viene prodotta utilizzando due fasci laser spostati verso il rosso, a una lunghezza d'onda $\lambda=1064$ nm e con una frequenza di trappola armonica media di circa 50 Hz (nella figura 3.7 viene riportato il setup sperimentale)

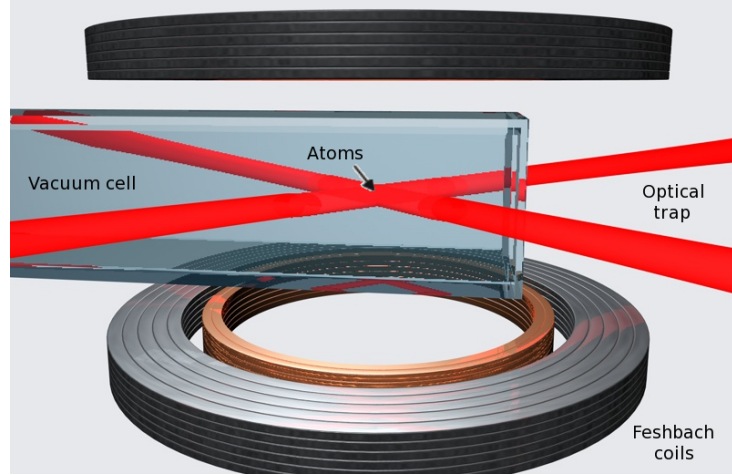


Figura 3.7: Setup sperimentale. La trappola ottica dipolare è creata facendo incrociare sul piano orizzontale due fasci laser detunati verso il rosso con $\lambda=1064$ nm. Il campo magnetico di Feshbach è generato da una coppia di bobine in configurazione di Helmholtz con l'asse nella direzione verticale. Il campo magnetico può essere variato in un range da 0 a 1000 G con un incertezza $\Delta B \leq 0.1G$ [56]

All'interno della trappola ottica viene effettuato il raffreddamento evaporativo e ciò viene fatto abbassando esponenzialmente l'intensità dei due fasci laser di intrappolamento (fig. 3.8). Prima di cominciare l'evaporazione, viene acceso un campo magnetico omogeneo (campo di Feshbach.)

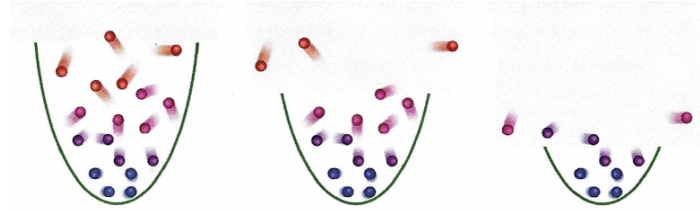


Figura 3.8: Schematizzazione degli stadi del raffreddamento evaporativo. La forza del potenziale di trappola è abbassato per permettere agli atomi più veloci di scappare, mentre quelli più lenti restano intrappolati [58].

Una volta che gli atomi di rubidio e di potassio risultano intrappolati all'interno della trappola ottica, vengono trasferiti dallo stato $|F = 2, m_f = 2\rangle$ allo stato fondamentale $|F = 1, m_f = 1\rangle$ per mezzo di due impulsi a microonde differenti. Tale trasferimento è necessario in quanto in questo stato il potassio ha una risonanza di Feshbach intraspecie (intorno ai 400 G) e inoltre ha una risonanza interspecie con il rubidio (fig 3.9).

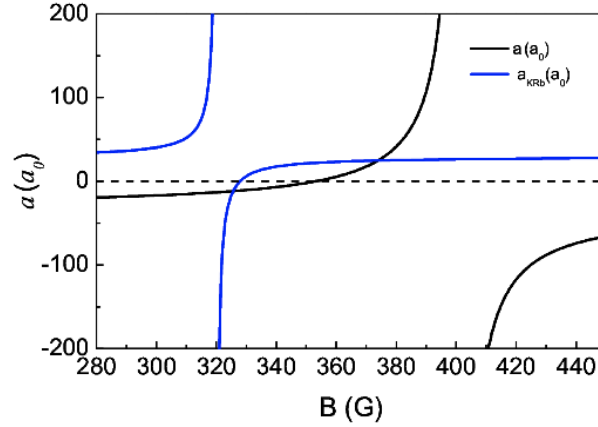


Figura 3.9: Dipendenza dal campo magnetico della lunghezza di scattering eteronucleare tra ^{87}Rb e ^{39}K (linea blu) e della lunghezza di scattering omonucleare ^{39}K - ^{39}K . Durante la prima parte dell’evaporazione nella trappola ottica il valore di B è portato a 316 G in modo da aumentare la lunghezza di scattering eteronucleare tra ^{87}Rb e ^{39}K e aumentare il processo di termalizzazione tra le due specie. Nella seconda parte dell’evaporazione viene utilizzato il campo a 395 G dove la lunghezza di scattering è positiva, ma non ha un valore troppo grande (cosa che accadrebbe in presenza della risonanza di Feshbach a 402 G) da comportare la perdita degli atomi per collisioni a tre corpi [59]

Prima di procedere all’evaporazione nella trappola magnetica è comunque necessario ripulire i restanti atomi di rubidio nello stato $|F = 2, m_f = 2\rangle$ in quanto la loro presenza potrebbe causare la depolarizzazione del campione di K e il suo riscaldamento.

Il raffreddamento nella trappola ottica consta di due parti dove le risonanze di Feshbach giocano un ruolo fondamentale.

Nella prima parte dell’evaporazione, le rampe sono realizzate in modo da evaporare gli atomi nella direzione verticale in modo da perdere gli atomi di rubidio che sono più pesanti. Durante questa operazione il campo magnetico è portato a un valore di 316 G in cui è presente una risonanza di Feshbach interspecie tra K e Rb [60]. In questo modo il rate di collisioni elastiche tra le due specie è aumentato e di conseguenza si è in presenza di una più efficiente termalizzazione.

Nella seconda parte dell’evaporazione, il campo magnetico è aumentato in modo da essere in presenza di una grande lunghezza di scattering positiva [32]. In questa fase, la trappola non permette di trattenere gli atomi di ^{87}Rb che vengono quindi persi e il raffreddamento del ^{39}K avviene per mezzo delle collisioni intraspecie.

3.4 Acquisizione dell’immagine

Per ottenere le immagini del BEC e le sue informazioni si usa la tecnica dell’acquisizione delle immagini degli atomi per assorbimento. Nel caso in esame le immagini sono prese

dopo che gli atomi, una volta liberi dal confinamento, sono lasciati liberi di espandere sotto l'azione della gravità per un tempo detto *time of flight* (TOF).

Per realizzare l'immagine in assorbimento, viene inviata sulla nuvola atomica una luce risonante con una transizione atomica (da $F = 2$ a $F' = 3$) e si raccoglie l'immagine su una telecamera a CCD ottenendo quindi il negativo della nuvola.

L'intensità del fascio laser che viene rivelata dalla CCD è legata a dei parametri caratteristici del sistema, come la densità atomica n e la sezione d'urto σ , dalla nota relazione

$$I(x, z) = I_0 e^{-\int \sigma n(x, y, z) dy} \quad (3.3)$$

dove l'integrale prende il nome di densità ottica ed è proporzionale alla densità del campione integrata sulla direzione del fascio. Noto questo parametro, è possibile risalire al numero di atomi, alla temperatura e alla distribuzione di velocità.

Bisogna tenere in considerazione del fatto che nel momento in cui si è in presenza di due diverse specie di atomi di cui si vuole prendere l'immagine (come accade quando si realizzano le immagini nella trappola magnetica o nella trappola ottica) bisogna lasciarle espandere per due TOF differenti in quanto altrimenti non si potrebbero distinguere le due immagini. Di conseguenza, prima si invia una luce risonante con il potassio e si lascia che il rubidio sia libero di espandere e solo dopo qualche millisecondo si prende l'immagine del rubidio.

3.5 Sistemi laser sperimentali

Per realizzare la BEC di ^{39}K è necessario utilizzare un sistema di fasci laser abbastanza complesso in quanto in presenza di due diverse specie atomiche.

I fasci di raffreddamento (cooling) e ripompaggio (repumper) per la MOT, il pompaggio ottico e le luci dell'imaging per il Rb sono realizzate utilizzando due differenti laser a diodo, ciascuno di frequenza di 780 nm. L'utilizzo di due laser è dovuto al fatto che la separazione iperfine dello stato fondamentale è molto grande ($\Delta\nu = 6.8\text{GHz}$) e non è possibile quindi ottenere tutte le frequenze con un unico laser.

Al contrario, per il K , è sufficiente l'utilizzo di un unico laser $\text{Ti} : \text{Sa}$, di frequenza pari a 766.7 nm, poichè la struttura iperfine di tale atomo permette di avere tutte le frequenze necessarie con il semplice uso di modulatori acusto-ottici (AOM).

Per aumentare la potenza dei fasci laser di cooling e repumper all'interno della MOT in modo da avere a disposizione un elevato numero di atomi, vengono utilizzati degli amplificatori a forma "affusolata" (per ulteriori dettagli si rimanda all'appendice).

I fasci laser utilizzati per realizzare la trappola ottica e i reticoli sono invece generati da un sistema laser *Mephisto* che consiste in un laser infrarosso a stato solido $\text{Nd} : \text{YAG}$ pompato otticamente da un laser a diodo, con frequenza pari 1064 nm.

In accordo con quanto detto nel primo capitolo, la luce laser del fascio pari a $\lambda_1 = 1064$ nm è spostata verso il rosso rispetto la lunghezza d'onda $\lambda = 766.1$ nm risonante con la transizione del ^{39}K in modo da intrappolare gli atomi.

Il fascio del *Mephisto* viene separato in due, una parte viene utilizzato per la trappola ottica e l'altra per i reticoli, per mezzo di una lamina a cristalli liquidi che permette di

controllare la potenza relativa dei due fasci durante le varie fasi dell'esperimento. Successivamente, il fascio della trappola ottica viene diviso in due (uno diretto lungo la direzione x e uno lungo la direzione y) mentre quello relativo al reticolo viene diviso in tre. I fasci sono alla fine accoppiati a delle fibre ottiche e indirizzati sulla cella contenente gli atomi e retroriflessi in modo da realizzare le onde stazionarie che formano i reticoli ottici

Capitolo 4

Osservazione dell'instabilità e delle phase-slips

Scopo di questo capitolo è illustrare e analizzare le misure riguardanti gli effetti dell'instabilità dinamica e delle phase-slips. Per comprendere la fisica di questi due fenomeni, è stata studiata l'evoluzione dell'oscillazione del condensato dopo che questo veniva messo in moto a seguito dello spostamento della trappola ottica. Nel primo caso, è stata posta l'attenzione sul comportamento del momento associato al condensato, la cui crescita viene bloccata a seguito di uno smorzamento eccessivo dell'oscillazione, se si è in presenza dell'instabilità dinamica. Nel secondo caso, per studiare il fenomeno delle phase-slips è stata limitata l'ampiezza dell'oscillazione in modo da osservare uno smorzamento più lento e da essere lontani dalle condizioni dell'instabilità dinamica e anche in questa situazione è stata posta l'attenzione sul comportamento dello smorzamento dell'oscillazione al variare del momento impresso al condensato.

Il capitolo è organizzato come segue. Inizialmente, dopo una introduzione sul come vengono realizzati e analizzati i dati sperimentali, saranno riportate le misure riguardanti il comportamento dell'oscillazione del condensato unidimensionale in assenza di reticolo e come lo smorzamento dell'oscillazione può essere legato all'instabilità di Landau. Successivamente saranno riportate le misure dell'oscillazione in presenza di reticolo profondo e sarà illustrato come si manifesta l'effetto dell'instabilità dinamica. Infine saranno riportate le misure dello smorzamento dell'oscillazione al variare del momento impresso al condensato per comprendere il fenomeno delle phase-slips, sia in presenza di reticolo profondo che in presenza di reticolo poco profondo.

4.1 Realizzazione esperimento

Le proprietà di trasporto del sistema in esame sono studiate eccitando le oscillazioni collettive di un quasi condensato unidimensionale di atomi di ^{39}K intrappolato all'interno di un reticolo periodico.

Una volta realizzato un condensato tridimensionale, è possibile ottenere il sistema unidimensionale alzando i reticoli profondi diretti lungo le direzioni radiali utili (x e y nel caso in esame), come riportato in fig. 4.1

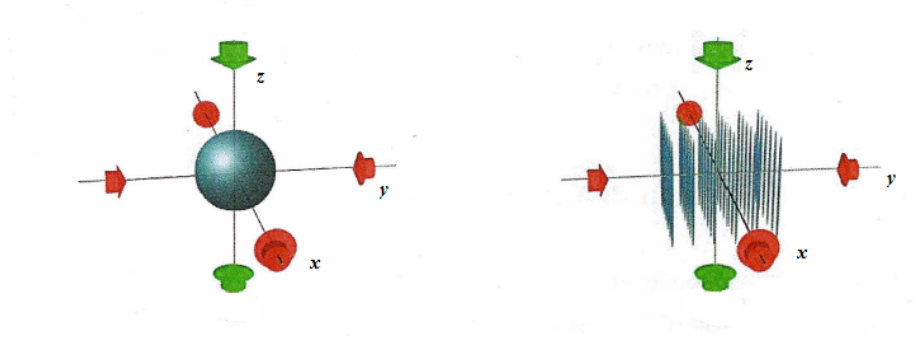


Figura 4.1: Rappresentazione schematica della configurazione sperimentale. I due fasci laser allineati lungo z e lungo y , formano la matrice di tubi unidimensionali. Il potenziale periodico utilizzato durante le misure è invece diretto lungo z , che è la direzione assiale dei tubi [58]

Essi sono alzati utilizzando una rampa a forma di s di durata 400 ms. In particolare, nei primi 200 ms si raggiunge metà della profondità del potenziale desiderato utilizzando una rampa esponenziale con costante di tempo $\tau = 80$ ms. La profondità completa la si raggiunge utilizzando una rampa esponenziale con $\tau = -80$ ms. Il reticolo principale invece è realizzato utilizzando sempre una rampa ad s , però di durata pari 300 ms. Un terzo della profondità desiderata è raggiunta utilizzando una rampa esponenziale in 150 ms con $\tau = 30$, mentre gli altri due terzi con $\tau = -70$ ms.

La procedura sopra descritta è quella che permette di alzare i reticoli in maniera il più possibile adiabatica in modo da minimizzare il riscaldamento del condensato.

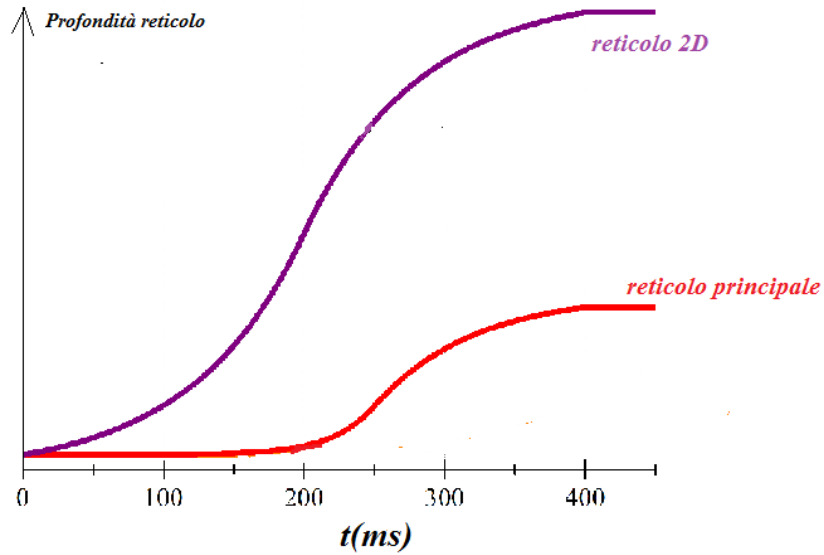


Figura 4.2: Evoluzione temporale della profondità dei potenziali che formano i reticoli. Il reticolo 2D serve per produrre l'insieme di sistemi unidimensionali, mentre il reticolo principale è applicato lungo la direzione dell'asse dei tubi [41].

Alla fine delle operazioni si è in presenza di una matrice di tubi. Nel caso in esame i reticoli hanno una profondità di $20 E_r$ e frequenza $\omega_r = 2\pi \times 50$ Hz ($\omega_z = 2\pi \times 150$ Hz). In questa situazione si ha che $\hbar\omega_r \gg E_{int}$ e $k_B T \geq \hbar\omega_z$ e gli atomi occupano solo lo stato fondamentale radiale e ogni tubo si comporta come un sistema unidimensionale. Il tunneling ,trasverso dell'ordine di 2 Hz, è trascurabile sulle scale di tempo sperimentali (dell'ordine di poche centinaia di millisecondi) e quindi ogni tubo può essere considerato come un sistema indipendente.

Il numero di atomi in ciascun tubo può essere determinato integrando la distribuzione di Thomas-Fermi della densità del condensato interagente lungo il tubo. In questo modo, nel tubo appartenente alla i -sima riga e alla j -sima colonna, il numero di atomi è [12]

$$N_{i,j} = N_{0,0} \left[1 - \frac{2\pi N_{0,0}}{5N_{tot}} (i^2 + j^2) \right]^{3/2} \quad (4.1)$$

dove N_{tot} è il numero totale di atomi, $N_{0,0} = 5N_{tot}d^2/2\pi R_x R_y$ è il numero di atomi nel tubo centrale, R_x e R_y sono i raggi di Thomas-Fermi nelle direzioni orizzontali (che dipendono dalla lunghezza di scattering a il cui valore è impostato dal campo di Feshbach) e $d = \lambda/2$ è la spaziatura tra i tubi.

Noto il numero totale di atomi, è possibile stimare la densità media di ogni sottosistema usando la relazione

$$n_{ij} = \frac{1}{5} \left(\frac{3N_{ij}m\omega_z}{\hbar} \right)^{2/3} a_{1D}^{1/3} \quad (4.2)$$

Una volta nota la densità del sistema, è possibile stimare un limite superiore alla temperatura utilizzando la relazione

$$T = \frac{\hbar^2 n}{\xi_T dm^* k_B} \quad (4.3)$$

dove ξ_T è la lunghezza di correlazione termica del sistema che è legata alla lunghezza di correlazione (data dall'eq. 2.16) secondo la relazione

$$\xi_T = 1.11\xi \quad (4.4)$$

Ci si aspetta che questo modo di calcolare la temperatura dia soltanto un limite superiore per la temperatura reale, in quanto l'allargamento della distribuzione dei momenti potrebbe essere legata ad altri effetti.

Per studiare le proprietà di trasporto del sistema, viene applicato un impulso al quasicondensato in trappola. Per fare ciò, il centro della trappola dove si trova il condensato viene spostato di una piccola quantità nella direzione verticale spegnendo il gradiente del campo magnetico che compensa parzialmente la gravità (fig. 4.3)

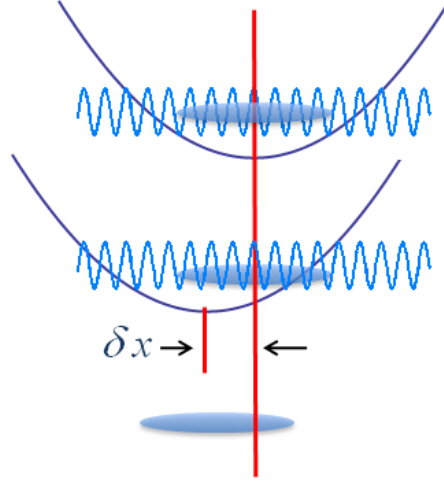


Figura 4.3: Illustrazione che mostra come lo spostamento della trappola ottica inneschi l'oscillazione del sistema unidimensionale. Tale spostamento è innescato spegnendo il campo magnetico responsabile della parziale compensazione della gravità. L'oscillazione avviene nella direzione verticale.

Come conseguenza, il sistema di atomi comincia a oscillare attorno al nuovo centro del potenziale spostato.

Il sistema viene quindi lasciato evolvere per un tempo variabile t , all'interno del potenziale spostato, prima di acquisirne l'immagine. L'osservabile sperimentale è la distribuzione dei momenti $\rho(p)$ dopo che il sistema degli atomi è stato fatto espandere per $t_{tof} = 16.5$ ms.

In particolare, per studiare le proprietà di trasporto del sistema in esame, studiamo l'evoluzione della posizione del picco della distribuzione dei momenti, coincidente con il momento medio p_0 acquistato dagli atomi, al variare del tempo rispetto alla posizione del picco preso all'istante $t = 0$, ovvero l'istante in cui al sistema non è ancora stata spostata la trappola e non c'è stata evoluzione.

Il moto degli atomi all'interno di un oscillatore armonico in presenza del reticolo può essere ricavato risolvendo il sistema di equazioni

$$\begin{cases} \dot{p}_0 = -m\omega_z^2 z - 2m\gamma\dot{x} \\ \dot{p}_0 = m^*(p)\dot{x} \end{cases}$$

dove m^* è la massa effettiva presente nel reticolo. E' necessario ricordare che l'andamento della massa efficace dipende dal comportamento dell'energia al variare del momento, come detto nel par. 1.5.2. In particolare essa assume valore costante solo in presenza di reticoli poco profondi. In approssimazione di tight-binding, invece, la massa efficace dipende dal momento del condensato e vale la relazione $m \propto \cos(qd)$. Per realizzare i fit, si è tenuto quindi in considerazione il comportamento della massa efficace al variare del momento.

In assenza di qualsiasi effetto dissipativo, gli atomi oscillerebbero con una frequenza diversa $\omega^* = \omega_z \sqrt{m/m^*}$. Tuttavia in presenza di un effetto dissipativo l'oscillazione seguirà un'equazione del tipo

$$p_0(t) = \frac{m^* \omega^{*2} x_0}{\omega'} \sin(\omega' t) e^{-\gamma^* t} \quad (4.5)$$

dove $\omega' = \sqrt{\omega^{*2} - \gamma^{*2}}$ e $\gamma^* = \gamma m / m^*$

Per fittare l'evoluzione del picco della distribuzione dei momenti è stata usata la funzione

$$x(t) + p_0(t) t_{exp} / m \quad (4.6)$$

dove $x(t)$ e $p_0(t)$ sono ricavate risolvendo il sistema, lasciando γ come parametro libero.

Questo viene fatto in quanto, come detto nei capitoli precedenti, le immagini prese in time-of-flight riproducono la distribuzione dei momenti in trappola $n_{tof}(x) \approx \rho(p)$. Più precisamente la posizione in time-of-flight è relazionata al momento in trappola dalla relazione

$$x_{tof}(t) = x(t) + t_{exp} p_0(t) / m, + t_{exp}^2 g / 2 \quad (4.7)$$

dove $x(t)$ e $p(t)$ sono la posizione e il momento in situ all'istante di tempo t e dove g è l'accelerazione di gravità terrestre. Quindi la posizione relativa del picco all'istante t , rispetto alla posizione all'istante 0 è pari a

$$x_{tof}(t) - x_{tof}(0) = x(t) + t_{exp} p(t) / m \quad (4.8)$$

avendo imposto come condizioni iniziali $p_0(0) = x(0) = 0$.

Ad ogni modo il contributo di $x(t)$ è trascurabile per tempi di evoluzioni molto brevi (dell'ordine della frazione di micrometri) e quindi $|x_{tof}(t) - x_{tof}(0)| \propto p_0$

4.2 Misure di trasporto in assenza di reticolo

Inizialmente sono state realizzate misure in assenza del reticolo per comprendere meglio le proprietà di trasporto del condensato.

In una tale situazione quello che ci si aspetterebbe è che il condensato oscilli in modo continuo, senza subire alcuno smorzamento. Quello che si osserva invece è un'oscillazione smorzata che tende a un'oscillazione periodica non smorzata ad alte interazioni, come mostrato in fig. 4.4.

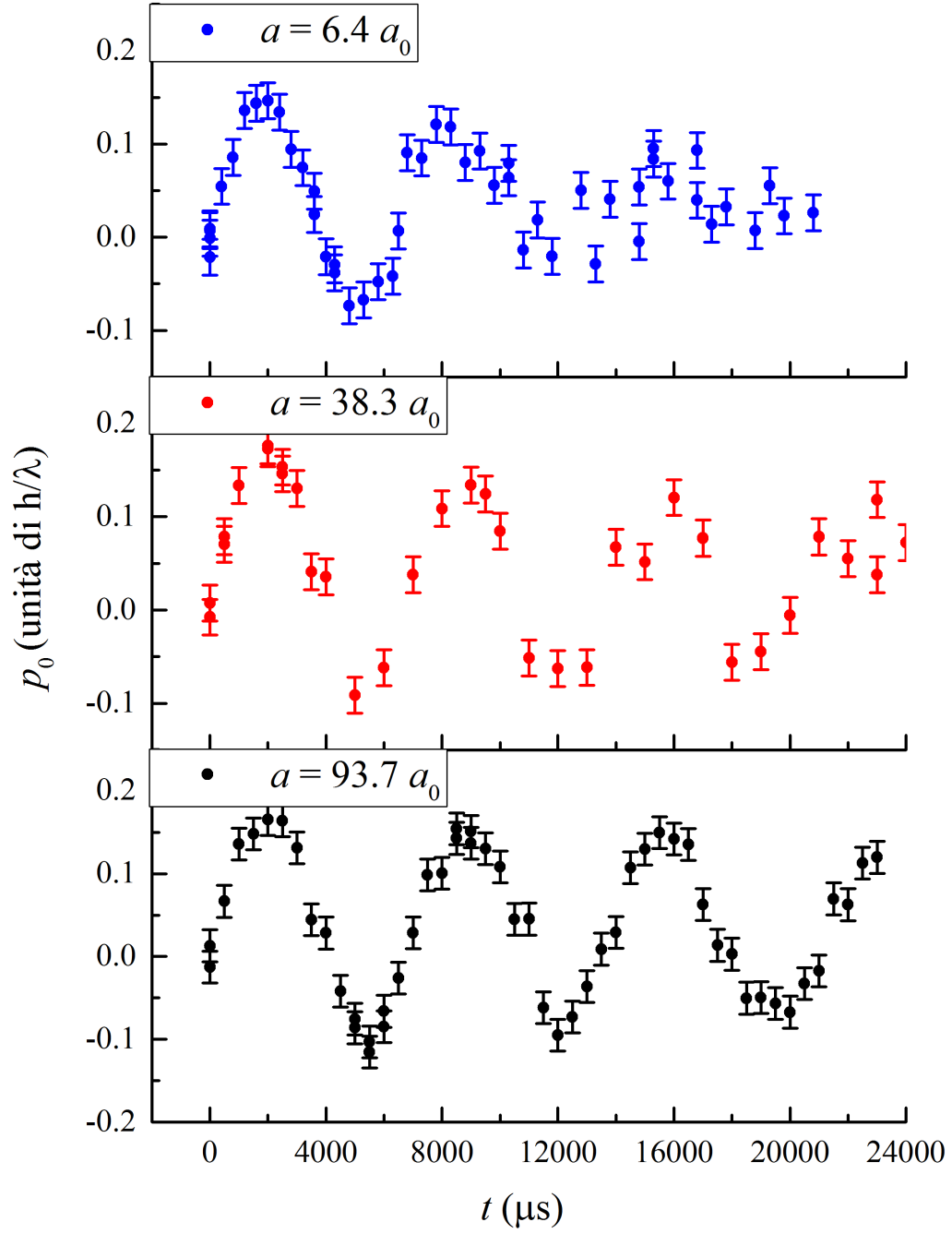


Figura 4.4: Oscillazioni in assenza di reticolo per varie interazioni. In ascissa è riportato la posizione del momento medio $p_0(t)$ all'istante t rispetto alla posizione del momento medio $p_0(0)$ all'istante iniziale, mentre in ordinata il tempo t . Gli errori indicano la risoluzione del sistema di imaging. Si noti come lo smorzamento diminuisca all'aumentare dell'interazione

Tale smorzamento può essere legato alla presenza di un'impurezza presente nel sistema.

A basse interazioni gli atomi risentono maggiormente della presenza di tale impurezza e ciò comporta uno smorzamento dell'oscillazione. Ad alte interazioni, invece, il sistema si muove come se essa non fosse presente.

Tali dati sono stati fittati (fig.4.5) utilizzando come funzione una sinusoide smorzata

$$p_0(t) = Ae^{-\gamma t} \sin(\omega t) \quad (4.9)$$

con cui è stato possibile studiare l'andamento dello smorzamento γ dell'oscillazione al variare dell'interazione.

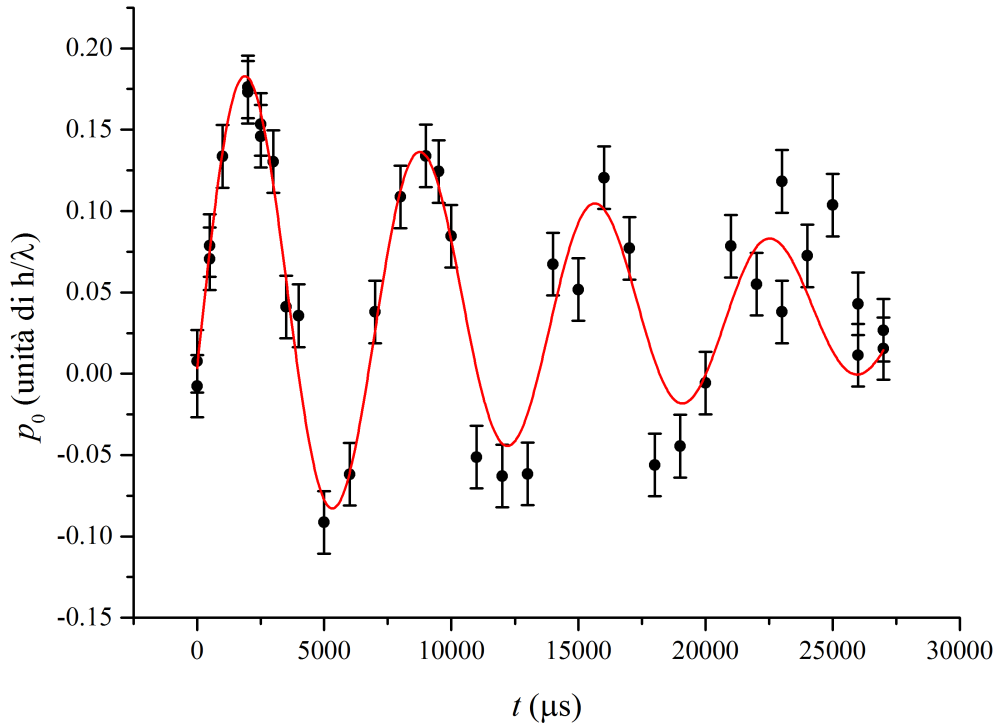


Figura 4.5: Fit dati sperimentali per un'interazione con $a = 38.3a_0$. In ascissa è riportato la posizione del momento medio $p_0(t)$ all'istante t rispetto la posizione del momento medio $p_0(0)$ all'istante iniziale, mentre in ordinata il tempo t . Gli errori sono legati alla risoluzione del sistema di imaging.

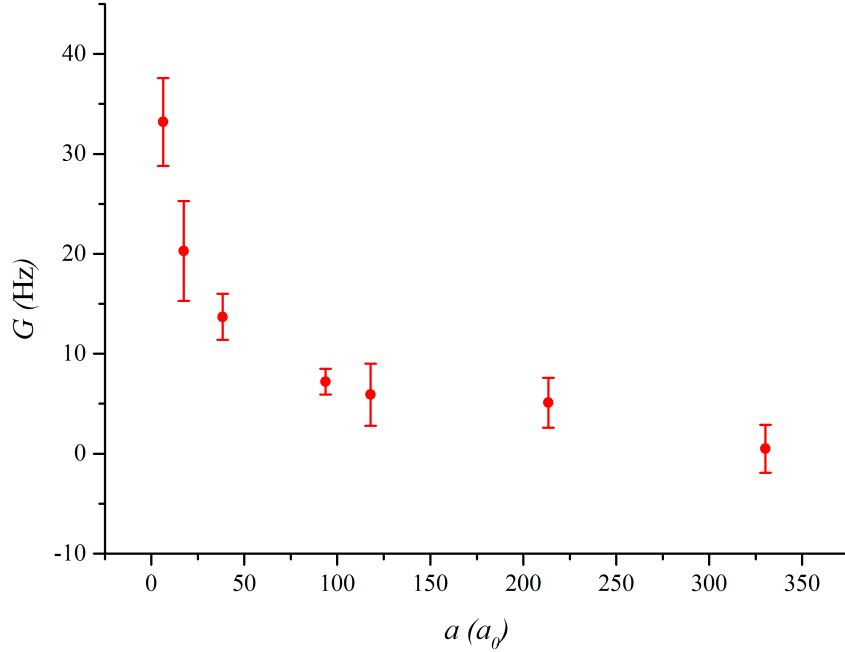


Figura 4.6: Andamento dello smorzamento al variare dell'interazione in assenza del reticolo. Gli errori associati allo smorzamento sono quelli stimati dal fit.

Come si può osservare dalla fig. 4.6, un'interazione maggiore maschera la presenza dell'impurezza.

La natura di tale imperfezione non è chiara. Potrebbe essere per esempio un'imperfezione nei fasci laser che realizzano il sistema di tubi o la presenza di atomi di Rb anche dopo la realizzazione del condensato di ^{39}K . Per comprendere se l'imperfezione fosse nei fasci ed eventualmente identificare quello in cui essa fosse presente, sono state realizzate misure di trasporto in un sistema bidimensionale (realizzato con un unico fascio laser). Tuttavia, si è sempre in presenza di un moto smorzato.

Ad ogni modo, pur non sapendo quale sia la sua natura, è possibile confermare la presenza di un'impurezza in quanto questa produce un'instabilità energetica. Secondo quanto riportato nel par. 2.7, se il sistema è soggetto a una velocità superiore a quella del suono, è più conveniente dal punto di vista energetico creare eccitazioni piuttosto che rimanere nello stato del superfluido. E' stato visto, nel paragrafo 2.7 che la velocità del suono viene scritta come

$$v_s = \sqrt{\frac{gn}{m}} \quad (4.10)$$

dove g è il parametro legato all'interazione e n la densità del sistema.

Tuttavia il sistema in esame, come visto nel paragrafo precedente, è un sistema disomogeneo e non si è in presenza della stessa densità in ogni sottosistema. Se si utilizza

l'approssimazione di Thomas-Fermi, in cui il termine di interazione è predominante su quello cinetico, la distribuzione di densità assume la forma [27]

$$|\phi|^2 = \frac{\mu}{g} \left(1 - \sum_i \left(\frac{r_i}{R_i^{TF}}\right)^2\right) \quad (4.11)$$

dove μ è il potenziale chimico e R_i^{TF} è il raggio di Thomas-Fermi. Quindi, la distribuzione di densità passa da una forma gaussiana nel caso di interazione nulla a una forma di parabola invertita all'aumentare dell'interazione come riportato in figura 4.7

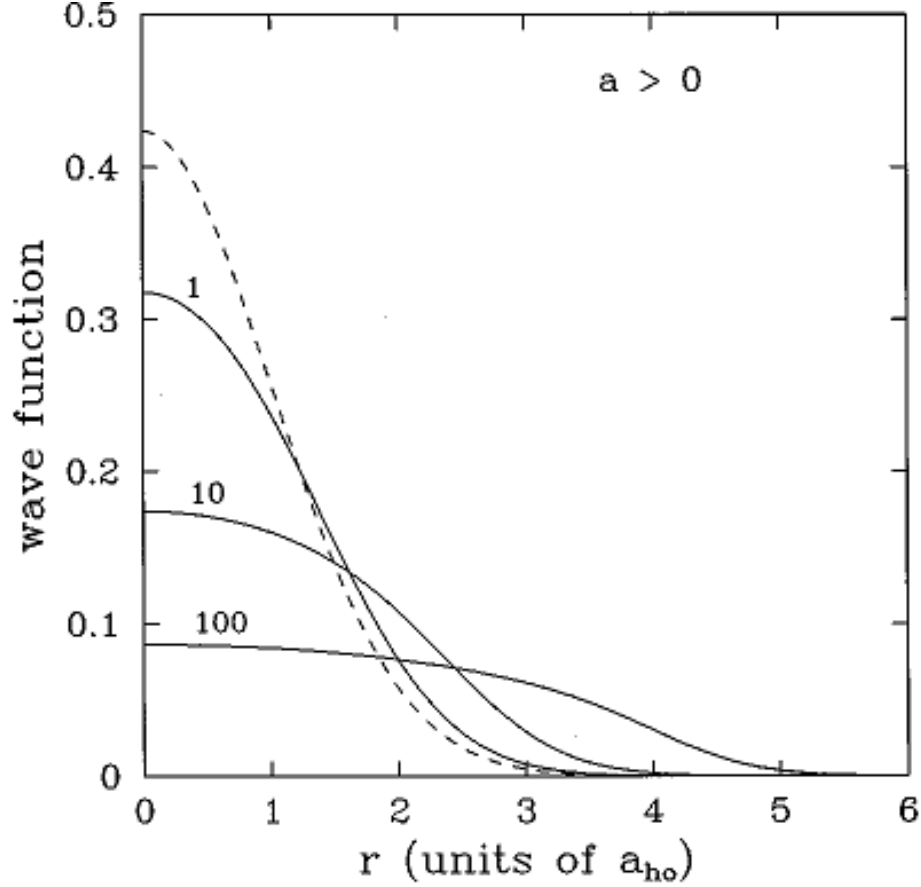


Figura 4.7: Profilo di densità del condensato nel passare dal caso non interagente ($a = 0$, linea tratteggiata) al limite Thomas-Fermi ($a \gg 1$) [48].

Per tenere conto della disomogeneità del sistema si è stimata la velocità del suono utilizzando la relazione 4.10 considerando la densità media.

Se si fosse effettivamente in presenza dell'instabilità di Landau, quello che si dovrebbe osservare è una diminuzione dello smorzamento all'aumentare dell'interazione e a parità di velocità. Infatti, aumentando l'energia di interazione, la velocità del suono aumenta, in quanto $v_s \propto \sqrt{g}$, e quindi ci sono valori di interazione per cui la velocità del sistema è al di sotto di quella del suono.

Nella tabella seguente si riporta, per ogni interazione, il valore del momento e la velocità del suono del condensato in $\hbar k$. Per tutte le interazioni si è cercato di avere lo stesso momento associato al condensato.

a (a_0)	$p(\hbar k)$	$p_s(\hbar k)$
6.4	0.16	0.13
17.4	0.17	0.19
38.3	0.17	0.25
93.73	0.18	0.34
118	0.19	0.37
213.4	0.18	0.44
330.2	0.15	0.54

Tabella 4.1: Tabella riportante il momento del condensato e il momento associato alla velocità del suono (in $\hbar k$) al variare dell'interazione

Come si può vedere, a basse interazioni il momento del sistema è più alto o confrontabile con il momento associato alla velocità del suono. Aumentando l'interazione invece, ci si discosta sempre di più da tale valore e si osserva effettivamente una diminuzione dello smorzamento dell'oscillazione.

Quindi è plausibile che l'effetto osservato sia causato dalla presenza dell'instabilità energetica.

Tale effetto, ad ogni modo, è molto debole; infatti lo smorzamento è dell'ordine di decine di Hz e assume valori molto piccoli per interazioni alte. Quindi, anche se questo effetto fosse dovuto a imperfezioni del sistema, è trascurabile se le misure vengono fatte ad alte interazioni.

4.3 Misure in presenza di reticolo profondo: instabilità dinamica

Un primo set di misure è stato realizzato in presenza di un reticolo sufficientemente profondo per essere nel regime di tight-binding, che è quello più studiato dal punto di vista teorico. In particolare, abbiamo lavorato con un reticolo di profondità $s = 5$.

Come introdotto nei paragrafi precedenti, si è in presenza di instabilità dinamica nel momento in cui il momento associato al sistema supera il valore critico pari a $0.5\hbar k$ [13]. Per verificare tale assunzione, sono state fatte misure della posizione della distribuzione dei momenti al variare del tempo che si può identificare con il momento medio p_0 acquistato dagli atomi. In figura si riporta una misura tipica.

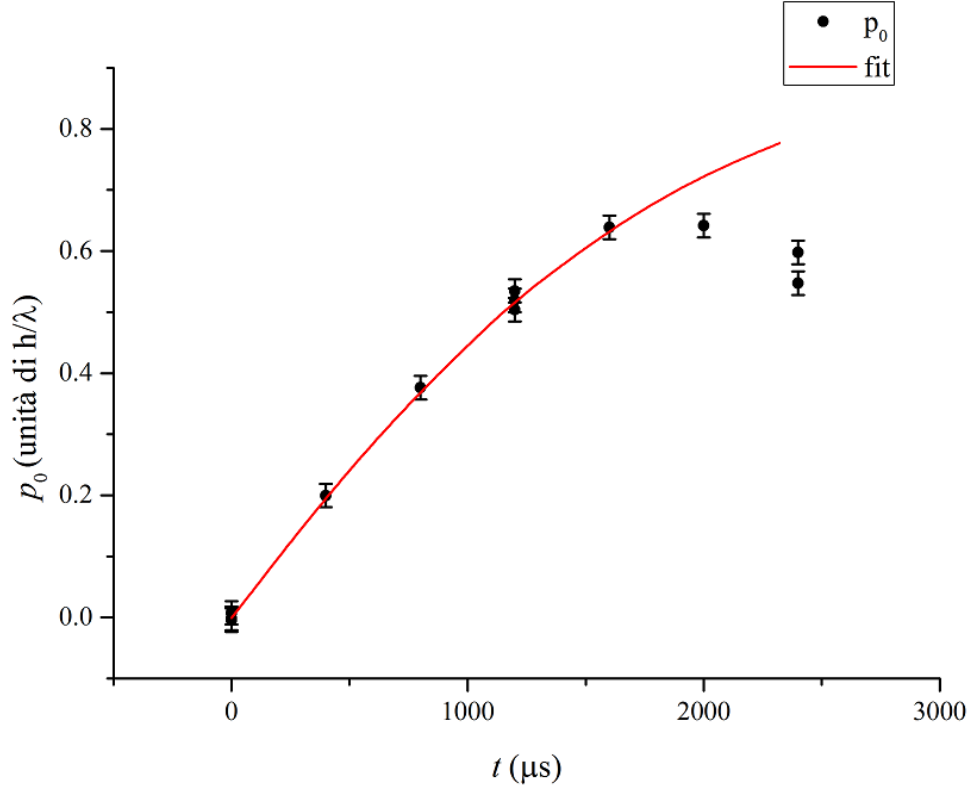


Figura 4.8: Evoluzione temporale del picco della distribuzione dei momenti per $a = 6.4 a_0$. La linea continua rappresenta il fit dei primi 4 punti ad una oscillazione smorzata come in eq. 4.5 , per i parametri noti dell'ampiezza del moto. Si noti come attorno a $p \simeq 0.6\hbar k$ ci sia una chiara deviazione dall'andamento descritto dal fit. Gli errori sono legati alla risoluzione del sistema di imaging.

Per capire quantitativamente le osservazioni sperimentali viene utilizzato il modello introdotto nel par. 4.1. In particolare, i primi dati (sino a $t = 1500 \mu\text{s}$) possono essere fittati utilizzando una sinusoide smorzata, eq. 4.9 ,con smorzamento γ costante. Successivamente, quando p_0 aumenta si osserva che in punti si discostano dal fit che descrive un'oscillazione smorzata, la crescita di p_0 è bloccata e questo viene associato a un aumento dello smorzamento γ (fig. 4.8). Contemporaneamente si osserva un notevole allargamento nella distribuzione dei momenti, che può essere interpretato come una rottura del condensato (fig. 4.9)

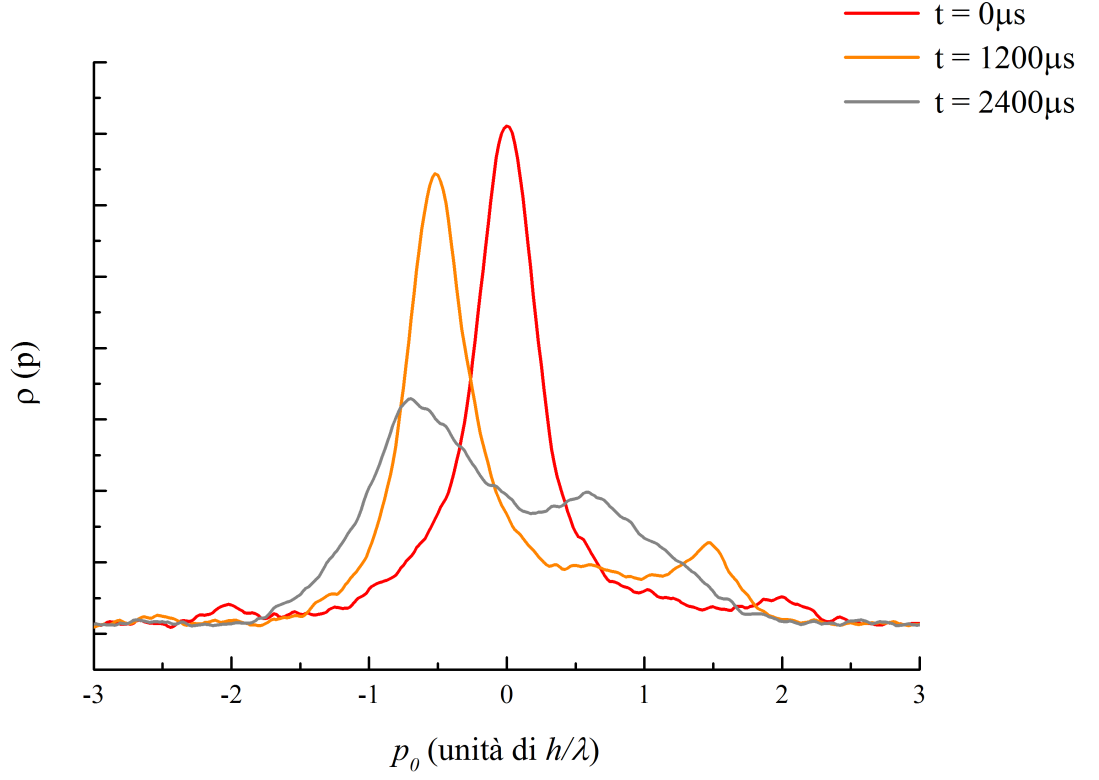


Figura 4.9: Distribuzione dei momenti a diversi istanti di tempo. E' possibile notare che all'aumentare del tempo si osserva un allargamento nella distribuzione dei momenti.

Per stimare il momento critico p_c che separa il regime di dissipazione debole da quello fortemente instabile, si stima la differenza tra il fit di una sinusoide smorzata e i dati sperimentali e si realizza un fit utilizzando come funzione

$$y(x) := \begin{cases} y_0 + A \cdot (x - x_0) & x > x_0 \\ 0 & x < x_0 \end{cases}$$

Il punto x_0 nella relazione precedente corrisponde all'istante di tempo in cui si raggiunge il valore del momento critico p_c .

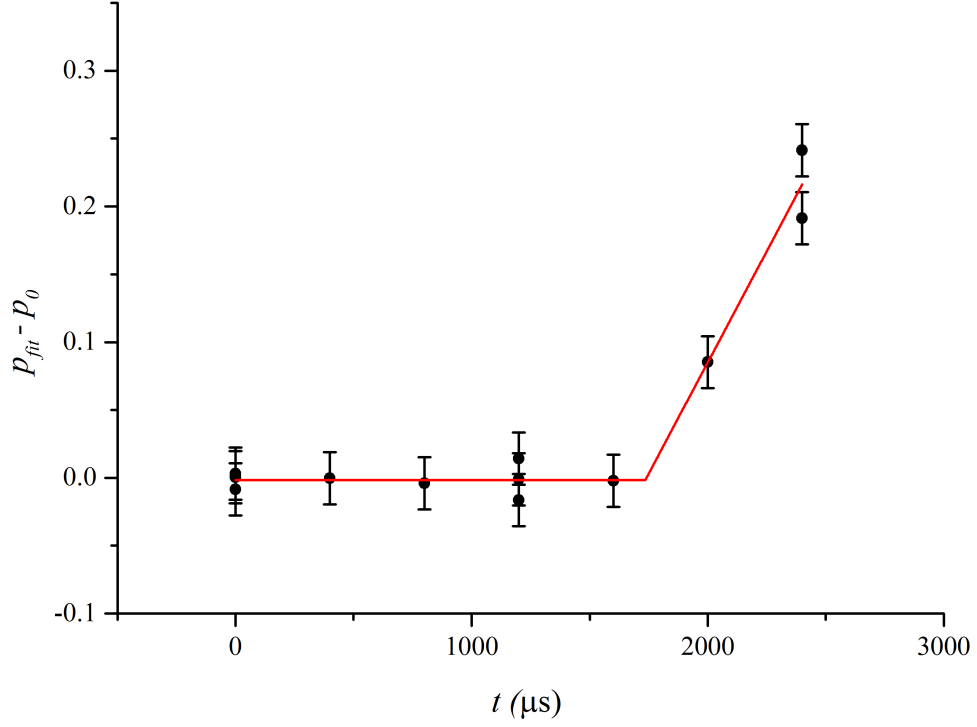


Figura 4.10: Differenza tra i punti del fit e i dati sperimentali per $a = 6.4 a_0$. Come si può osservare per $x < x_0$ si ha un andamento costante (e in particolare $y=0$), mentre per $x > x_0$ si ha un andamento crescente. Per la misura in questione si trova $x_0 = 1735.2 \pm 75.9 \mu s$ e $A = (3.28 \pm 0.43) \times 10^{-4}$. Gli errori sono ricavati utilizzando le regole di propagazione degli errori.

Questo comportamento è accompagnato anche da un evidente allargamento della distribuzione dei momenti $\rho(p)$. Nel caso in cui si è in presenza di forte smorzamento, è possibile osservare che l' *HWHM* ha un comportamento simile: ha un andamento costante per un certo intervallo di tempo, che corrisponde a quello in cui il sistema è superfluido e $p < p_c$, e poi ha un repentino aumento quando si raggiunge il momento critico. Un esempio di questo andamento è riportato in figura 4.11

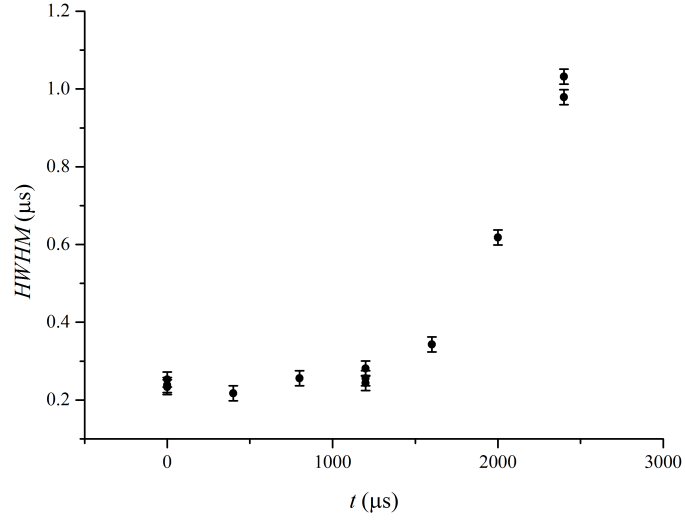


Figura 4.11: Andamento $HWHM$ per $a = 6.4 a_0$. Come si può osservare, per piccoli istanti di tempo la $HWHM$ assume un valore costante per poi aumentare all'improvviso quando il momento del condensato supera il valore critico. Gli errori sono legati alla risoluzione del sistema di imaging.

Sono state fatte diverse misure al variare dell'energia di interazione U a fissato J con un reticolo diretto lungo z avente profondità pari a $5E_r$ (fig. 4.12)

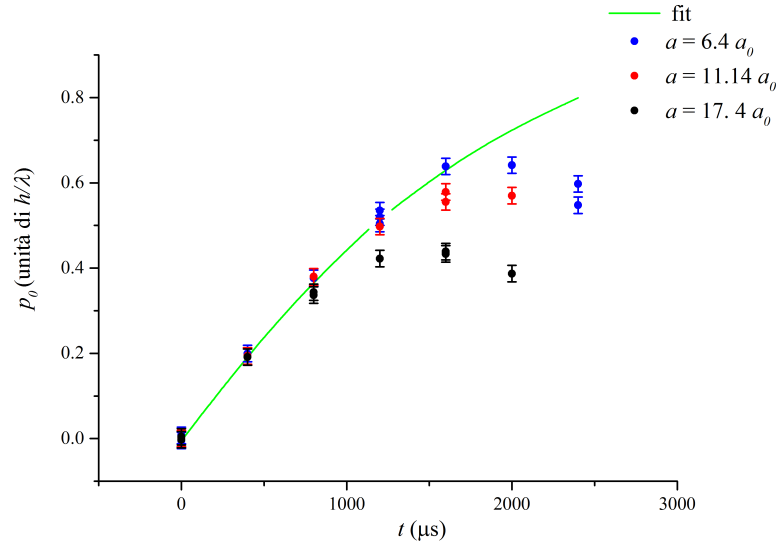


Figura 4.12: Evoluzione temporale del picco della distribuzione dei momenti al variare dell'interazione. Aumentando l'interazione il momento critico si presenta a momenti più bassi. Gli errori sono legati alla risoluzione del sistema di imaging.

Nella tab. 4.2 vengono riportati i valori di momento critico al variare dell'interazione.

a (a_0)	$p_c(\hbar k)$
6.4	0.67
11.14	0.59
17.4	0.42

Tabella 4.2: Misura del momento critico al variare dell'interazione, in presenza di reticolo profondo e E_r .

Come si può vedere all'aumentare dell'interazione U il momento critico diminuisce e in particolare dovrebbe tendere a zero nel momento in cui U si avvicina al valore per cui si è in presenza dell'isolante di Mott. Se si realizza un fit lineare dei punti stimati sperimentalmente, si trova che il momento critico tende a zero per una lunghezza di scattering $a = 27.6 a_0$. Ciò comporta che per interazioni maggiori si è in presenza dell'isolante di Mott.

Come si può osservare nel caso in esame, il momento critico p_c è sempre più alto di $0.5\hbar k$ [13] che sarebbe il valore del momento critico stimato per un sistema non interagente in approssimazione di reticoli alti. Al diminuire dell'altezza del reticolo e a parità di interazione il momento critico cresce in quanto si modificano le bande di energia. Infatti, diminuendo s , l'inversione del segno della massa efficace si sposta a valori più alti e ciò comporta un momento critico maggiore.

4.4 Misure di trasporto in presenza di reticolo profondo

Una volta caratterizzata l'instabilità dinamica, si è cercato di porre l'attenzione sul fenomeno delle phase slips studiando il comportamento del sistema a bassi momenti, ben lontani da p_c . Per questo motivo abbiamo scelto un momento massimo pari a $p = 0.18\hbar k$, che è meno della metà del momento critico misurato.

Tuttavia, mentre per alcune interazioni questo momento è effettivamente al di sotto del momento critico (tab. 4.2), per altre non lo è, in quando all'aumentare dell'interazione il momento critico diminuisce notevolmente. Di conseguenza, per interazioni alte, si osserva l'effetto dell'instabilità dinamica. Non è possibile diminuire ulteriormente il momento massimo, in quanto non si osserverebbe chiaramente un'oscillazione perchè il sistema si fermerebbe dopo pochi istanti di tempo.

Per confermare quanto detto, sono state realizzate misure di trasporto al variare dell'energia e in particolare, successivamente allo spostamento della trappola, è stato misurato lo smorzamento dell'oscillazione.

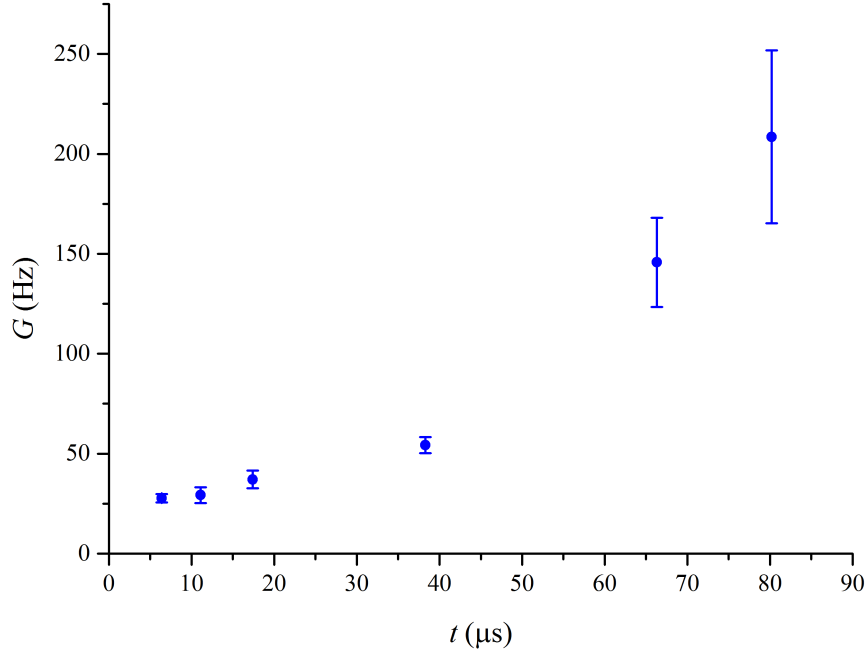


Figura 4.13: Andamento smorzamento al variare dell'interazione con reticolo $s=5$. Come si può osservare in presenza di alta interazione si osserva uno smorzamento maggiore. Gli errori associati allo smorzamento sono quelli stimati dal fit.

Come si può osservare dal grafico, all'aumentare dell'interazione, lo smorzamento dell'oscillazione aumenta notevolmente a conferma del fatto che si è in presenza dell'effetto dell'instabilità dinamica.

A questo punto sono state fatte delle misure al variare della velocità in modo da vedere se si riusciva a ottenere un grafico simile al graf. 2.14 e osservare se si era in presenza di due regimi identificabili come regime di phase-slips attivate termicamente e quantisticamente.

Per fare ciò, sono stati realizzate diverse misure dello smorzamento al variare del momento associato al condensato. Di seguito viene riportata l'analisi nel caso in cui il parametro di interazione corrisponde a una lunghezza di scattering $a = 11.14 a_0$. E' stato scelto questo valore di interazione in quanto, visto l'analisi fatta precedentemente al variare dell'interazione, si era in presenza di uno smorzamento molto debole (25 Hz). Eventuali smorzamenti sarebbero quindi da identificare con la generazione di phase-slips.

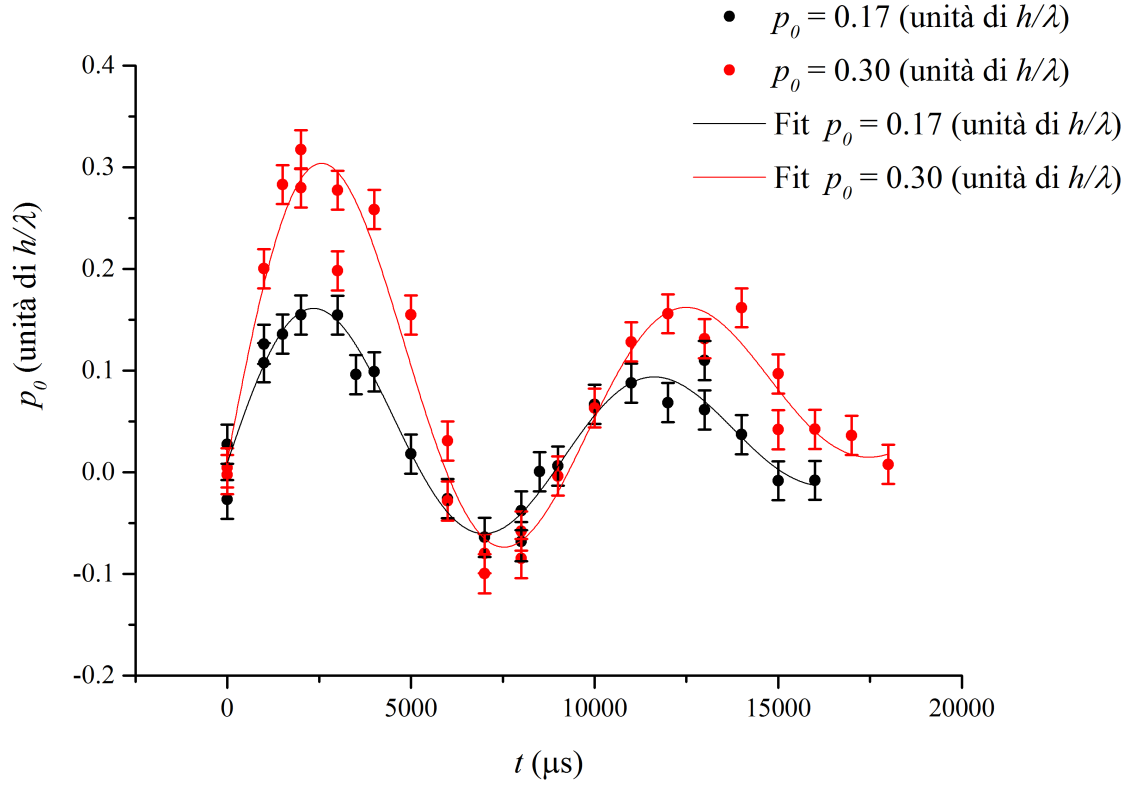


Figura 4.14: Oscillazioni smorzate nel caso di due diversi momenti , $p = 0.17\hbar k$ $p = 0.3\hbar k$ e con interazione $a = 11.14 a_0$ con i relativi fit. Si noti come lo smorzamento delle due oscillazioni non differisce molto tra le due misure al variare della velocità. Gli errori sono legati alla risoluzione del sistema di imaging.

I valori dello smorzamento sono stati calcolati fittando i punti sperimentali con una sinusoide smorzata. In fig. 4.14 si riportando due diverse misure i cui momenti a loro associati sono quello più alto e quello più basso misurati. Come si può osservare, le due curve in fig. 4.14 non presentano differente smorzamento. Come conferma si riportano i valori dello smorzamento G al variare del momento in fig. 4.15.

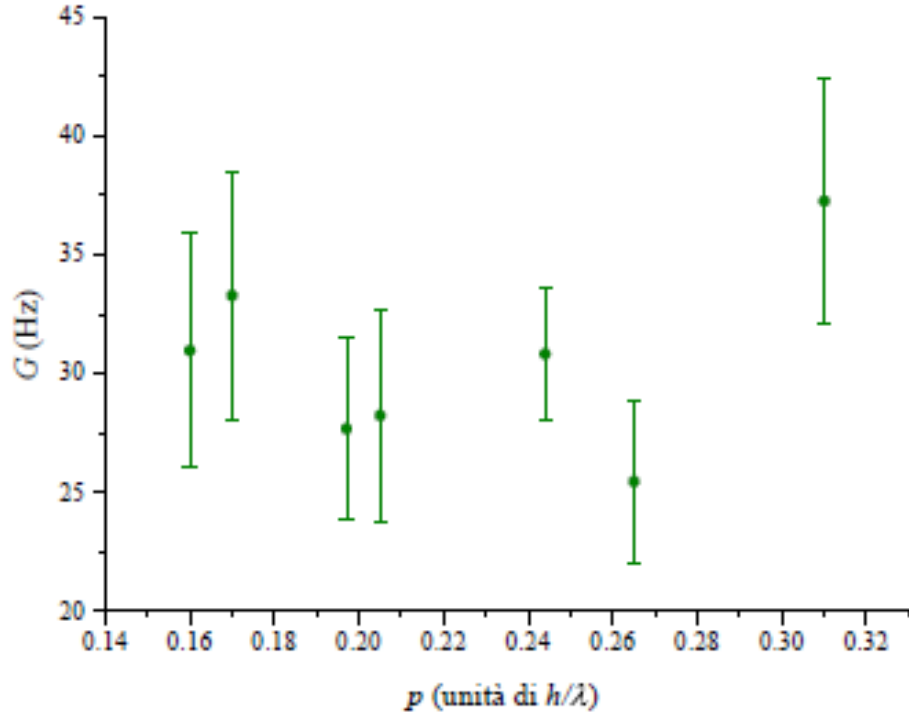


Figura 4.15: Andamento dello smorzamento al variare della velocità nel caso di interazione pari a $a = 11.14 a_0$. In questo caso non si ha una dipendenza dalla momento impresso al condensato e l'andamento dello smorzamento è costante al variare della velocità. Gli errori sono stimati dal fit.

Come si può osservare dalla fig.4.15, lo smorzamento ha un andamento costante con il momento e quindi non si riesce ad osservare la presenza di phase-slips attivate quantisticamente, ma si osservano solo le phase-slips attivate termicamente.

Dalla teoria è noto che ad interazioni più alte, si entra nel regime di phase-slips quantistiche a momenti più piccoli. Si è quindi tentato di realizzare le stesse misure a interazioni maggiori. Tuttavia, studiando il comportamento dello smorzamento al variare dell'interazione a momento fissato, si è visto che non è possibile aumentare l'interazione del sistema e fare misure per osservare la formazione di phase-slips in quanto ad alte interazioni l'aumento dello smorzamento è causato dalla presenza di un momento critico molto basso e si è soggetti al fenomeno dell'instabilità dinamica.

Sperimentalmente, in presenza di reticolo profondo, è difficile osservare la presenza di phase-slips studiando il comportamento dello smorzamento al variare della velocità in quanto l'effetto predominante è quello dell'instabilità dinamica. Si è quindi deciso di cambiare il regime in cui prendere le misure.

4.5 Misure di trasporto in presenza di reticolo poco profondo

Per evitare di entrare nel regime di instabilità dinamica osservata nella sezione precedente, si è deciso di studiare il caso di un reticolo poco profondo. In questo caso, come abbiamo già visto, il momento critico dell'instabilità dinamica tende a spostarsi verso valori più alti, così che il momento tipico studiabile sperimentalmente ($0.18 \hbar k$) sia ben separato dal fenomeno dell'instabilità dinamica.

Come abbiamo visto nel cap.2, il regime di reticoli deboli non viene descritto dal modello di Bose Hubbard, i quanto questo modello viene usato in presenza di reticoli profondi. Il regime di reticoli deboli è descritto, dal modello di sine-Gordon [44]. Anche se non abbiamo una teoria specifica che ci illustri il comportamento del rate di generazione di phase-slips e di conseguenza quello dello smorzamento dell'oscillazione in questo secondo regime, possiamo però aspettarci che vi sia una analoga dipendenza dalla velocità.

Ovvero, si ipotizza che in presenza di phase-slips quantistiche assistite dalla temperatura lo smorzamento dell'oscillazione non dipenda dalla velocità, al contrario di quanto è previsto se si è in presenza di phase-slips puramente quantistiche.

Come nel caso precedente, sono state realizzate diverse misure dello smorzamento dell'oscillazione al variare della velocità impressa, e questo è stato fatto per diverse interazioni.

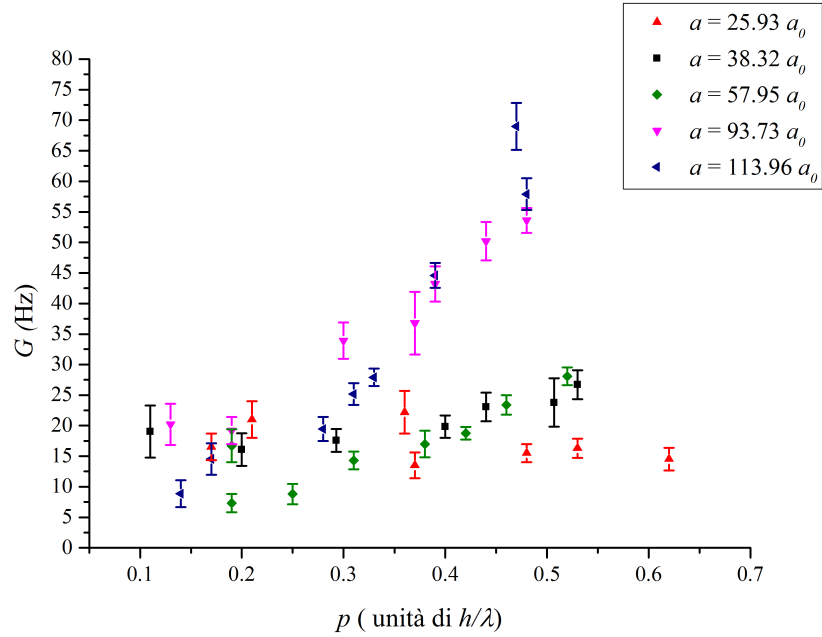


Figura 4.16: Andamento dello smorzamento al variare della velocità per varie interazioni. Per l'interazione più bassa si osserva un andamento costante dello smorzamento, mentre aumentando l'interazione si riesce ad evidenziare una dipendenza lineare da essa. Gli errori sono stimati a partire dal fit.

I momenti riportati sull'asse delle ascisse, sono stati calcolati a partire dal fit dell'oscillazione, prendendo come momento l'ordinata del primo massimo del fit, come riportato in figura 4.17.

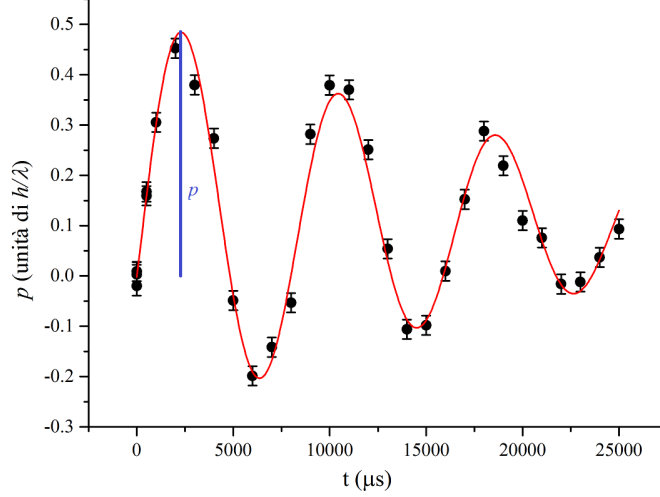


Figura 4.17: Oscillazione tipica con riferimento alla velocità presa in considerazione. L'oscillazione riportata è relativa a un'interazione pari a $a=25.93 a_0$ e viene fittata con una sinusoide smorzata. Gli errori sono legati alla risoluzione del sistema di imaging.

Come si può osservare, nel caso di due interazioni, $a = 57.95 a_0$ e $a = 113.96 a_0$, i punti a velocità più bassa hanno uno smorzamento più basso rispetto alle altre interazioni. Si è quindi supposto che i due sistemi potessero essere a temperatura differente. Utilizzando la relazione 4.3 introdotta nel paragrafo 4.1 si trova che effettivamente la presenza di due temperature :

$$T_1 = (28 \pm 8)nK \quad (4.12)$$

nel caso di $a = 57.95 a_0$ e $a = 113.96 a_0$, mentre

$$T_2 = (37 \pm 8)nK \quad (4.13)$$

nelle interazioni restanti.

Anche in questo caso si è preliminarmente caratterizzata l'instabilità dinamica, per essere sicuri che le misure di smorzamento fossero lontane da questo regime. In effetti, dato il reticolo debole utilizzato, il momento critico era così alto da essere difficile da raggiungere sperimentalmente.

Si è riusciti quindi a misurare il valore di p_c soltanto per due interazioni molto alte. Per le altre interazioni, si è ricavato il valore utilizzando un fit lineare dei punti misurati e del punto a $\gamma = 0$ stimato per mezzo di simulazioni, dove con γ si intende il rapporto tra l'energia di interazione $E_{int} \approx g_{1D}n_{1D}$ e l'energia cinetica necessaria a portare una particella a distanza n_{1D}^{-1} , $E_{cin} \approx \hbar^2 n_{1D}^2 / m$

$$\gamma = \frac{mg_{1D}}{\hbar^2 n_{1D}} \quad (4.14)$$

Di seguito si riportano i valori di p_c al variare dell'interazione. Per comodità si mette sia il valore della lunghezza di scattering che quello di γ . In seguito per indicare l'interazione si userà tale valore ricavato per mezzo della relazione introdotta precedentemente.

$a \text{ (} a_0 \text{)}$	γ	p_c
25.93	0.126	0.741
38.32	0.187	0.732
57.95	0.366	0.703
93.73	0.644	0.658
113.96	1.221	0.565

Tabella 4.3: Andamento del momento critico al variare dell'interazione

A questo punto è stato ricavato il valore dello smorzamento normalizzato per $\hbar/J$, che nel caso in esame è pari a 816 Hz, ed è stato messo questo valore nel grafico riportante in ascissa il momento normalizzato per il momento critico. E' necessario considerare il fatto, che al di fuori del modello di Bose-Hubbard, l'energia di tunneling J non è ben definita. In questa situazione si usa quindi un'energia di tunneling effettiva, pari a un quarto della larghezza di banda. Di seguito sono riportati i grafici per ogni interazione, raggruppati per temperatura.

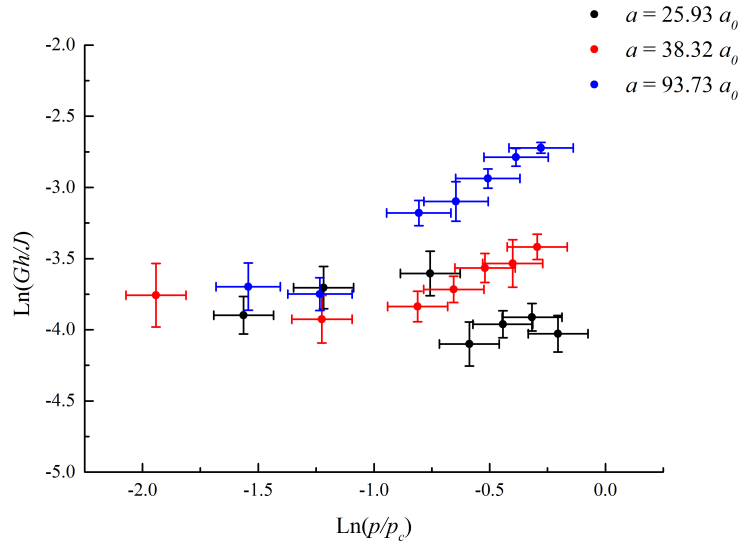


Figura 4.18: Logaritmo dello smorzamento in funzione del logaritmo della velocità a $T = 38$ nK. Si può notare che per interazione con $a = 25.93 a_0$ il $\text{Ln}(Gh/J)$ ha un andamento costante con la velocità. Per interazioni più alte si osserva invece una dipendenza lineare dalla velocità. Gli errori sono ricavati utilizzando le regole di propagazione degli errori.

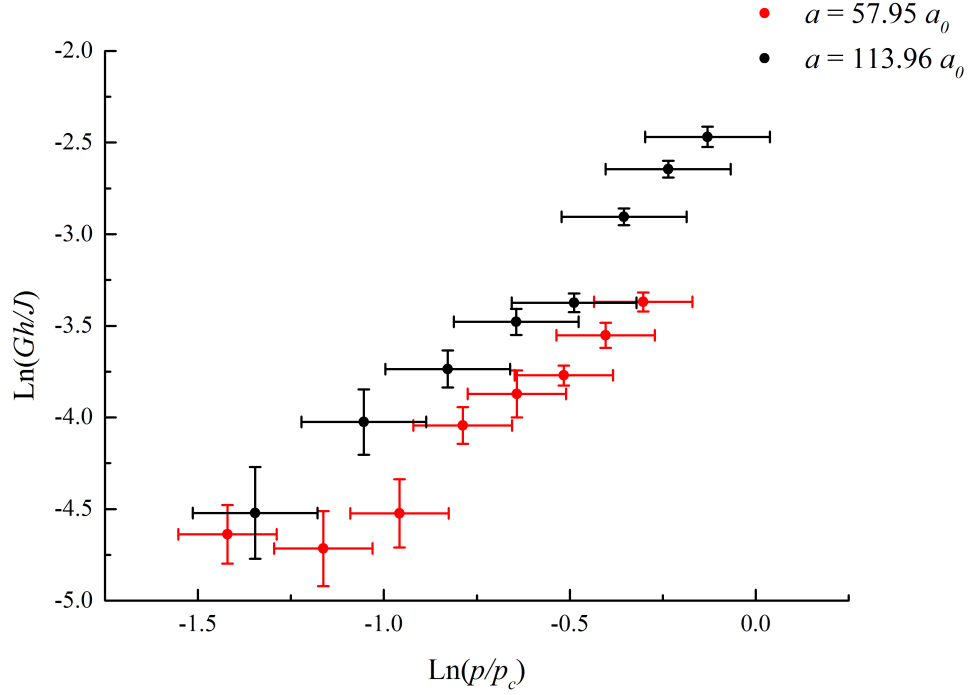


Figura 4.19: Logaritmo dello smorzamento in funzione del logaritmo della velocità a $T = 28$ nK. Per interazione con $a = 57.95 a_0$ si osservano due regimi. Un andamento costante per piccoli valori di $\text{Ln}(p/p_c)$ e un andamento lineare per alti valori. Per interazione con $a = 113.96 a_0$ si osserva subito una dipendenza lineare del $\text{Ln}(Gh/J)$ al variare di $\text{Ln}(p/p_c)$. Gli errori sono ricavati utilizzando le regole di propagazione degli errori.

Come si può notare dalle figure 4.18 e 4.19, sembra che lo smorzamento abbia un andamento costante a basse velocità, nel regime di phase-slips quantistiche assistite dalla temperatura, seguito da una crescita, circa lineare ad alte v , che segnala un regime di phase-slips quantistiche. L'andamento dello smorzamento al variare della velocità è stato fittato (come riportato in fig. 4.20) con una funzione del tipo

$$y(x) := \begin{cases} y_c + A \cdot (x - x_c) & x > x^* \\ y_c & x < x^* \end{cases}$$

da cui è stato estratto il valore di x^* .

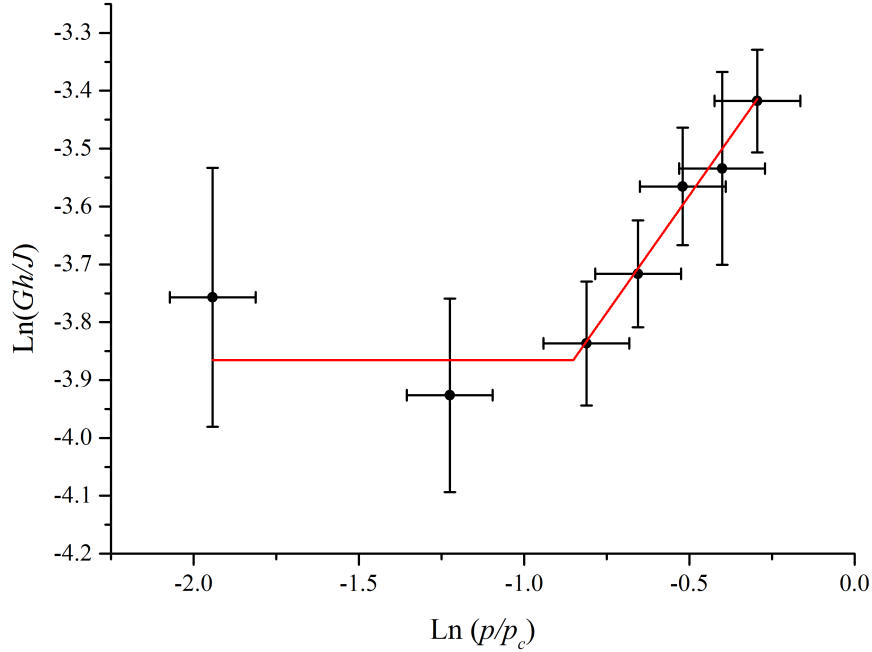


Figura 4.20: Fit dell'andamento dello smorzamento al variare della velocità per un'interazione caratterizzata da $a = 38.32 a_0$. Si noti come è possibile evidenziare due diversi regimi: uno caratterizzato da una dipendenza costante da parte dello smorzamento dalla velocità e un regime caratterizzato da una dipendenza lineare da essa. I valori del fit trovati sono $y_c = -3.86 \pm 0.05$, $A = 0.81 \pm 0.09$ e $x^* = -0.85 \pm 0.07$. Gli errori sono ricavati utilizzando le regole di propagazione degli errori.

Tale valore corrisponde alla velocità caratteristica, normalizzata per il momento critico, che identifica la transizione tra lo stato di phase-slips attivate termicamente e quello di phase-slips attivate quantisticamente.

Come si può vedere dai grafici 4.18 e 4.19, nei dati con interazione pari a $a = 25.93a_0$ e $a = 113.96a_0$ non è possibile individuare la presenza di due regimi, cosa che accade invece in presenza delle altre tre interazioni e ciò può essere spiegato come segue. Nel caso dell'interazione più bassa, il valore più alto di momento è troppo piccolo e non si riesce mai ad essere in presenza di un momento tale da innescare la formazione di phase-slips quantistiche. Al contrario, nel caso di più alta interazione, le velocità considerate sono talmente alte che si è in presenza esclusivamente di phase-slips quantistiche. Di conseguenza, il valore di x^* per l'interazione più bassa è stimato per difetto, mentre nel caso di interazione più alta si ha una stima per eccesso.

Nel caso delle altre interazioni, invece, l'andamento dello smorzamento è tale da potere identificare una regione in cui le fluttuazioni termiche comportano cambiamenti di fase, e un'altra regione in cui esse sono dovute a fluttuazioni quantistiche.

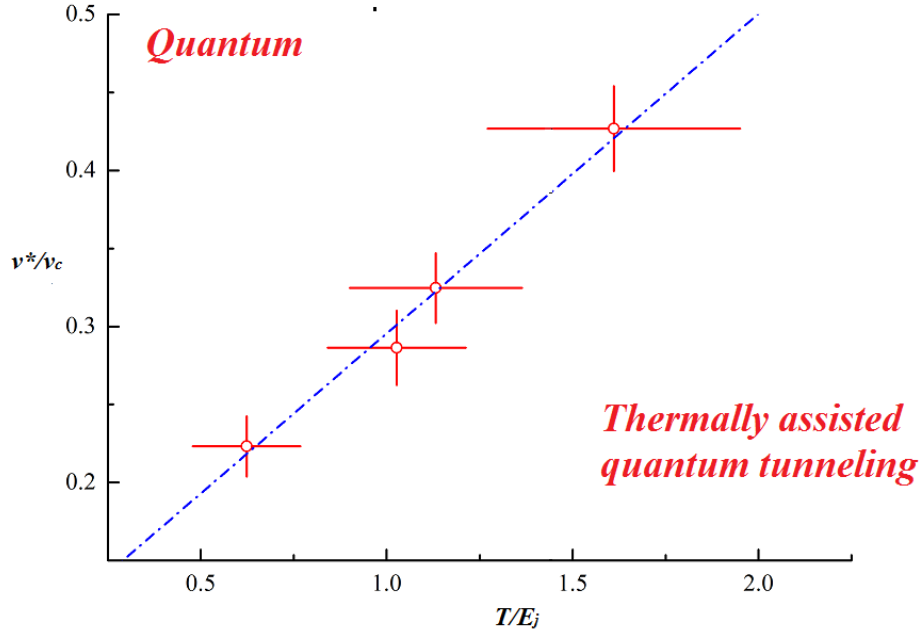


Figura 4.21: Andamento della velocità normalizzata al variare dell'interazione. Si noti come aumentando l'interazione, la velocità normalizzata per il valore critico diminuisce. Gli errori sono ricavati utilizzando le regole di propagazione degli errori.

A questo punto si è cercato di mettere a confronto tutte le misure. Per fare ciò è stato realizzato un grafico della v^*/v_c dove v^* è il momento minimo che il condensato deve possedere per attivare le fluttuazioni quantistiche, al variare del rapporto tra la temperatura T e l'energia di Josephson $E_j = \hbar v_s/(\sqrt{2}d)$. Questo grafico è stato realizzato in quanto la velocità di intersezione tra i regimi di phase-slips puramente quantistiche e phase-slips attivate quantisticamente assistite dalla temperatura, è dell'ordine di $v_c \times k_B T/E_j$ [18]. Come si può vedere dal grafico 4.21, effettivamente il valore di v^*/v_c ha un andamento lineare con $k_B T/E_j$.

La retta, in blu, passante per i punti sperimentali, divide il grafico in due zone. Al di sotto della retta si è in presenza di phase-slips attivate quantisticamente, assistite dalla temperatura, mentre al di sopra di phase-slips attivate quantisticamente. I punti sulla retta sono le velocità minime che si devono possedere se si vuole osservare il fenomeno di phase-slips attivate quantisticamente. Di conseguenza, una volta note la temperatura e l'energia di Josephson, è possibile trovare il valore minimo di v^*/v_c che si deve possedere per osservare quantum phase-slips facendo l'intersezione tra la retta di equazione $x = T/E_j$ e la retta passante per i punti sperimentali.

E' importante notare come se si aumenta la temperatura, la retta di equazione $k_B T/E_j$ si sposta verso valori più alti e a valori di v^*/v_c maggiori. Ciò può essere spiegato con il fatto che a temperature maggiori, l'intervallo di velocità in cui si osservano le phase-slips attivate termicamente è maggiore. Al contrario, aumentando l'energia di Josephson,

ovvero aumentando l'interazione¹ ci si sposta verso valori di v^*/v_c più bassi. Infatti, come si può notare dalle fig. 4.19 e 4.18, è proprio a valori alti di interazione che si osservano le phase-slips attivate quantisticamente.

Questo grafico può quindi essere interpretato come un diagramma di fase, che permette quindi di individuare la natura dei cambiamenti di fase presenti nel sistema.

4.5.1 Instabilità di Landau

A completamento di questa analisi, si è voluto verificare che lo smorzamento osservato non fosse compatibile con il fenomeno dell'instabilità di Landau. Le velocità raggiunte nell'esperimento sono infatti comparabili con la velocità del suono del sistema, per cui si è cercato di avere conferma del fatto che le eccitazioni rilevate durante l'esperimento fossero effettivamente phase-slips e non si fosse in presenza dell'instabilità di Landau in cui le eccitazioni sono fononi con velocità maggiore della velocità del suono. Per avere la conferma di ciò, sono state stimate le velocità del suono, normalizzate anch'esse rispetto alla velocità critica (come riportato in fig. 4.22)

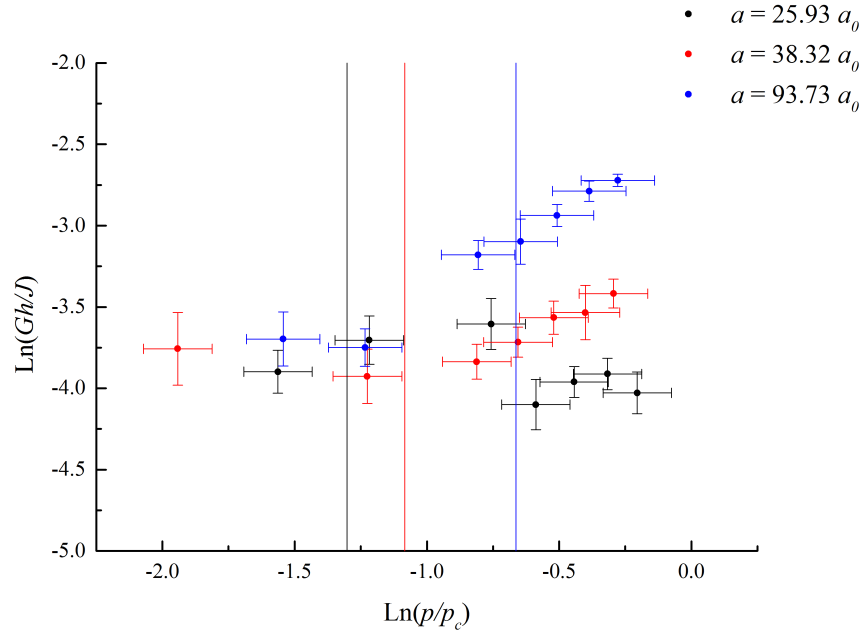


Figura 4.22: Logaritmo dello smorzamento in funzione del logaritmo della velocità a $T = 38$ nK. Si può notare che per interazione con $a = 25.93 a_0$ il $\text{Ln}(Gh/J)$ ha un andamento costante con la velocità. Per interazioni più alte si osserva invece una dipendenza lineare dalla velocità. Le rette verticali sono relative alle velocità del suono (in unità di $\hbar k$). Gli errori sono ricavati utilizzando le regole di propagazione degli errori.

¹Come introdotto precedentemente l'energia di Josephson è proporzionale alla velocità del suono che a sua volta è proporzionale a $\sqrt{ng}$ con g costante parametro di interazione. Di conseguenza aumentare l'interazione si traduce in un aumento dell'energia.

Come si può vedere, le velocità da noi raggiunte sono effettivamente superiori alla velocità del suono. Tuttavia, se le eccitazioni fossero dovute all'effetto dell'instabilità di Landau, ad alte velocità dovrei essere in presenza di una diminuzione del damping all'aumentare dell'interazione, come osservato nel caso in cui si è in presenza di reticolo nullo. Infatti a velocità fissata, aumentando l'interazione, la velocità del suono aumenta, e quindi lo smorzamento dovrebbe diminuire. Come si può vedere dalla fig. 4.23, il comportamento è esattamente l'opposto

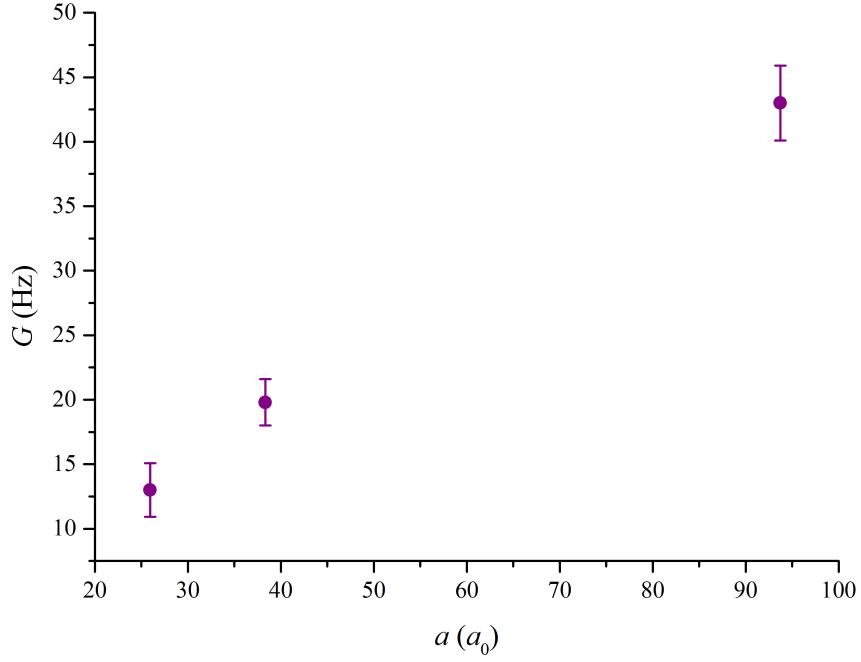


Figura 4.23: Andamento dello smorzamento al variare dell'interazione, a velocità fissata pari a $0.38 \hbar k$ ad una $T = 38 \text{ nK}$. Si noti l'andamento crescente dello smorzamento in contrasto con l'andamento decrescente che si dovrebbe avere se si fosse in presenza di instabilità energetica. Gli errori sono quelli stimati dal fit.

A basse velocità invece, lo smorzamento è costante (fig. 4.24), e anche questo comportamento non è associabile all'instabilità di Landau.

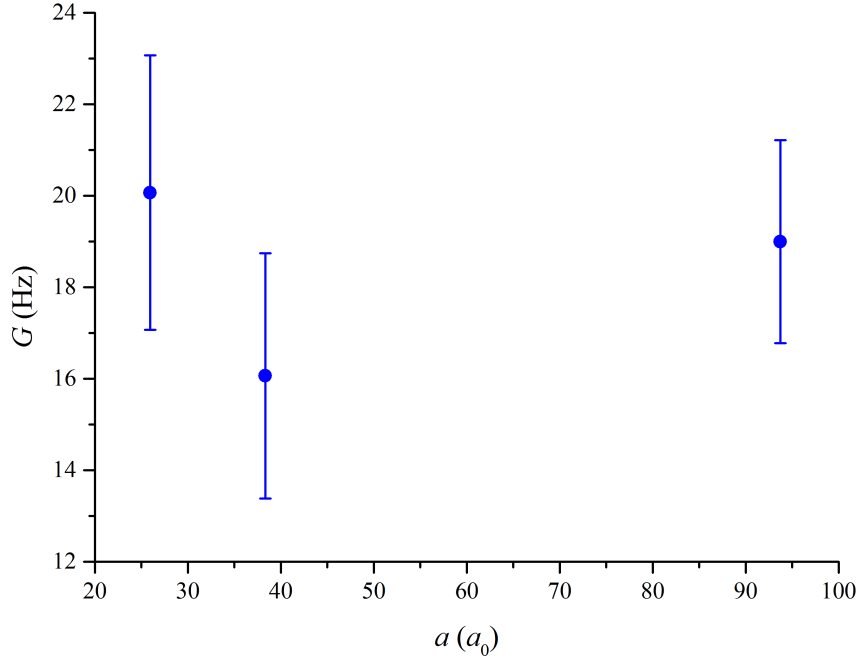


Figura 4.24: Andamento dello smorzamento al variare dell'interazione, a velocità fissata pari a $0.2 \hbar k$ ad una $T = 38$ nK. Si noti l'andamento costante dello smorzamento in contrasto con l'andamento decrescente che si dovrebbe avere se si fosse in presenza di instabilità energetica. Gli errori sono quelli stimati dal fit.

E' possibile quindi escludere che tali eccitazioni siano dovute all'instabilità di Landau, a conferma che si è in presenza di phase-slips.

Conclusioni

Negli ultimi anni, particolare attenzione è stata posta verso lo studio della superfluidità e della superconduttività in sistemi unidimensionali. Per comprendere meglio la fisica in gioco in tali sistemi, possono essere usati gli atomi bosonici ultrafreddi, i quali offrono l'opportunità di studiare la fisica in sistemi aventi bassa dimensionalità, che sono caratterizzati da un'elevata fragilità e dove le fluttuazioni di fase giocano un ruolo cruciale.

Scopo del mio lavoro di tesi è stato quello di studiare le cause che comportano la perdita di superfluidità in sistemi unidimensionali, analizzando le proprietà di trasporto di un superfluido all'interno di un potenziale periodico unidimensionale. In particolare l'attenzione è stata posta su fenomeni quali l'instabilità di Landau, l'instabilità dinamica e le phase-slips. Essi sono stati studiati in diversi ambiti come per esempio nei superconduttori, ma l'utilizzo di sistemi di atomi freddi ha permesso di avere una maggiore comprensione di questi fenomeni. In questo lavoro di tesi, è stato osservato per la prima volta la sovrapposizione tra il regime di phase-slips attivate dal tunneling quantistico e assistite dalla temperatura e quello di phase-slips attivate puramente dal tunneling quantistico.

Questi due regimi possono essere identificati studiando il comportamento dello smorzamento dell'oscillazione al variare del momento del condensato. In particolare in presenza di phase-slips attivate dal tunneling quantistico e assistite dalla temperatura è previsto dalla teoria un andamento costante dello smorzamento al variare del momento, mentre nel caso di phase-slips puramente quantistiche si osserva una dipendenza da una potenza del momento. Nelle misure riportate, si osserva una chiara presenza di questi due regimi. Osservando inoltre l'andamento del momento minimo che il condensato deve possedere affinché si possa essere in presenza di phase-slips attivate quantisticamente si è riusciti a ottenere un diagramma di fase che permette di identificare i due differenti regimi di phase-slips.

Studiando il comportamento delle oscillazioni del condensato in assenza di reticolo, si è riusciti ad avere una chiara visione del fenomeno dell'instabilità di Landau che ci ha permesso di avere conferma del fatto che le eccitazioni osservate durante le misurazioni potessero essere identificate come phase-slips. Infatti, grazie alla presenza di un'imperfezione, si è osservato come l'instabilità energetica abbia un comportamento rilevante a basse interazioni e basse densità e di come tale effetto non sia più importante ad alte interazioni se il momento associato al condensato non è elevato. Infatti, una volta fissato il momento associato al condensato, se questo è dell'ordine della velocità del suono si osserva l'instabilità energetica e il sistema perde superfluidità e smette di oscillare. Quando si aumenta l'interazione, la velocità del suono si discosta maggiormente dal momento del condensato e non si osserva più l'instabilità di Landau. Al sistema non è più conveniente dal punto di vista energetico, generare fononi.

Una volta nota la risposta del sistema in presenza di un'imperfezione, si è riusciti a escludere che le eccitazioni del condensato all'interno di un reticolo periodico unidimensionale fossero legata all'instabilità di Landau e avere conferma che essere fossero in realtà phase-slips. Se così non fosse, infatti, in presenza di un momento del condensato dell'ordine della velocità del suono, all'aumentare dell'interazione avremmo dovuto osservare una diminuzione dello smorzamento dell'oscillazione, mentre noi abbiamo osservato un aumento o un andamento costante, a seconda del momento del condensato. Questo ci ha permesso di avere quindi la conferma di avere osservato i phase-slips.

Per comprendere in quale intervallo di momenti era possibile fare le misure, è stato studiato il comportamento del momento al variare dell'interazione e si è studiato il fenomeno dell'instabilità dinamica. Questo effetto comporta anch'esso una perdita di superfluidità e si presenta in presenza di un reticolo. Studiando l'oscillazione del sistema si è visto come essa si discosti da una oscillazione smorzata quando il momento associato al condensato supera un valore critico. In particolare, in questo caso, si osserva che la crescita del momento del condensato è bloccata e questo effetto è accompagnato da un improvviso aumento dello smorzamento. Aumentando le interazioni, il momento critico associato al condensato diminuisce e tende a zero quando si passa nello stato di isolante.

Queste misure aprono la via verso nuovi studi. Infatti utilizzando le proprietà di trasporto dei sistemi unidimensionali all'interno di un reticolo ottico si può studiare la transizione verso lo stato di isolante di Mott. E' stato visto infatti, che all'aumentare dell'interazione, il momento critico del condensato diminuisce e tende a zero quando si passa nello stato di isolante. Di conseguenza, lo studio del comportamento del momento critico al variare dell'interazione permette di avere maggiori informazioni riguardo tale transizione. Inoltre tutte queste misure possono essere fatte in presenza di disordine ed è interessante comprendere come la presenza di un vero disordine o di un potenziale quasi periodico influenzi il comportamento del superfluido.

L'interesse per lo studio del comportamento dei condensati di Bose-Einstein in presenza di disordine è dovuto al fatto che il disordine è presente ovunque in natura ed influenza fortemente il comportamento del sistema. E' stato infatti dimostrato, sia dal punto di vista teorico che sperimentale, che la presenza del disordine comporta una transizione verso lo stato di isolante. Tuttavia, poco si sa, del comportamento di un sistema unidimensionale in presenza sia dell'interazione che del disordine a temperatura finita. Secondo un dogma non può esserci una transizione di fase in sistemi unidimensionali a temperatura finita in quanto le fluttuazioni termiche distruggono ogni correlazione a lungo raggio. Tuttavia, dal punto di vista teorico, è previsto una transizione di fase a temperatura finita, ovvero esiste una T^* al di sotto della quale il sistema si comporta come un isolante a causa della presenza della many body localization [61, 62]. Questa transizione può essere analizzata studiando le proprietà di trasporto del sistema unidimensionale al variare dell'interazione e del disordine. Infatti, nella fase fluida è previsto il trasporto di massa, mentre nella fase di isolante questo è completamente bloccato anche a temperature finite.

E' interessante inoltre comprendere come le generazione delle phase-slips venga influenzata in presenza del disordine e al variare della temperatura, in modo da avere una visione più chiara del fenomeno in esame. Durante il mio periodo di tesi, è stata sviluppata una nuova tecnica che permette di raggiungere velocità più basse di quelle utilizzate nelle misure riportate. Questo metodo consiste nello spostare lentamente il centro della

trappola, seguendo l'evoluzione della sola larghezza della distribuzione dei momentiint.

E' interessante notare che nonostante le teorie descriventi i sistemi unidimensionali siano state sviluppate da alcuni anni, pochi sono gli esperimenti realizzati su sistemi unidimensionali reali. Infatti, sino a questo momento, sono stati realizzati esperimenti che coinvolgono condensati tridimensionali all'interno di reticoli ottici unidimensionali e superconduttori. Un approfondimento dello studio di questi fenomeni utilizzando i gas quantistici ultrafreddi sarebbe quindi molto importante. Di conseguenza il lavoro scientifico da me condotto si inserisce all'interno di un ambito di ricerca giovane e innovativo. Esso può quindi essere il primo passo verso una maggiore conoscenza delle proprietà di trasporto dei sistemi unidimensionali.

Appendice A

Tapered Amplifier (TA)

Per riuscire ad intrappolare gli atomi è spesso necessario l'utilizzo di amplificatori laser che permettono di avere potenze adeguate [63, 64]. Tali amplificatori possono essere facilmente costruiti una volta in possesso del chip che permette l'amplificazione del fascio laser (fig. A.1)



Figura A.1: Chip dell'amplificatore

Il chip da noi utilizzato è un diodo laser a semiconduttore di GaAs (Eagleyard Photonics, modello EYP-TPA-0765-01500-3006-CMT03-0000).

L'amplificatore a semiconduttore preso qui in considerazione si differenzia dai comuni amplificatori ottici a semiconduttore (SOA) a causa del fatto che ha una regione di guadagno a forma conica come rappresentato in Fig. A.2

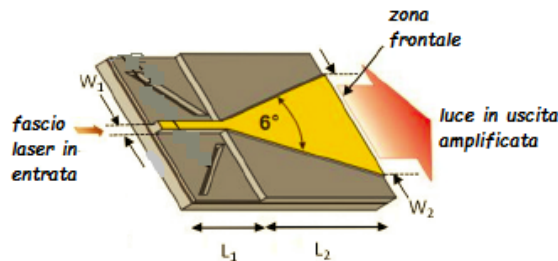


Figura A.2: Regione di guadagno conica vista dall'alto. La parte colorata è la regione conica di contatto che definisce la regione di guadagno e il dispositivo è un amplificatore o un laser a seconda dei valori di riflettività, R_1 e R_2 [64]

Come si può osservare dalla figura A.2, questi amplificatori constano di due parti: una sezione lineare (la cui lunghezza $L_1 \sim 0.5mm$), che funge da guida d'onda, e una sezione conica (la cui lunghezza $L_2 \sim 1.5 - 3mm$), che ha il ruolo di amplificare il segnale.

Il fascio laser che deve essere amplificato è accoppiato con la parte più piccola del laser (la cui apertura ha dimensioni $W_1 \sim 1 - 3\mu m$) e in seguito espande lateralmente a causa della diffrazione, riempiendo la regione di guadagno conica del dispositivo (avente un'apertura $W_2 \sim 200\mu m$)

La parte lineare del dispositivo è usato come un filtro modale che serve ad eccitare esclusivamente il modo trasverso fondamentale e ha il vantaggio che anche una piccola potenza in ingresso da una grande densità in energia. Tuttavia un laser realizzato solo con la zona lineare non può raggiungere le alte potenze date da un laser con la zona conica.

Come detto prima, il fascio laser utilizzato come input viene focalizzato nell'apertura in ingresso e successivamente, dopo la guida d'onda, diffrange con un angolo pari a quello della zona conica e riesce a riempire l'intero mezzo. Tale angolo è dell'ordine di 6° . Se la zona di guadagno è abbastanza lunga, l'emissione spontanea è piccola rispetto a quella stimolata dal fascio laser.

Poichè la regione di guadagno viene pompata da una densità di corrente spazialmente omogenea, il guadagno lungo l'asse di propagazione è uniforme, ma non lo è lateralmente perchè esso varia con l'inverso della densità di potenza ottica. Di conseguenza un fascio Gaussiano ha un alto guadagno lungo la zona lineare e un basso guadagno verso centro.

I contatti elettrici del chip sono realizzati ponendo sopra e sotto la superficie del chip un materiale metallico. In questo modo è possibile connettere la parte superiore al catodo e la parte inferiore al montaggio che sarà legato all'anodo.

I chip utilizzati per realizzare gli amplificatori conici sono facilmente danneggiabili, e possono per esempio essere rovinati in modo permanente da picchi di tensione, da temperatura elevata (nel caso in esame la temperatura massima sopportabile è $40^\circ C$) o anche da una retroriflessione. Per questo motivo non bisogna mai toccare il chip e mentre si monta l'amplificatore è conveniente essere messi a terra. E' necessario porre anche attenzione alla potenza del fascio laser di iniezione. Nel caso del chip qui utilizzato è necessario lavorare con una potenza che sta nell'intervallo $[10, 50]$ mW.

Per evitare un riscaldamento elevato indesiderato viene utilizzato un sistema di feedback che misura la temperatura del sistema e la regola alla temperatura impostata.

Nel caso in esame è stata utilizzata una sonda per misurare la temperatura e una cella di Peltier, come quella rappresentata in figura A.3, per portare il sistema alla temperatura desiderata. Tale cella è stata cosparsa di pasta termica prima di essere messa a contatto con la base di rame.

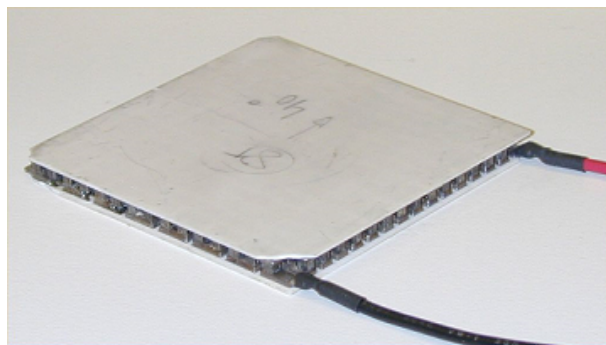


Figura A.3: Esempio di cella Peltier

Un'altra cosa di cui tenere in considerazione è il fatto che per avere la massima potenza in uscita dal chip, l'accoppiamento del fascio laser in entrata con il chip dell'amplificatore deve essere quasi perfetto. Per questo scopo è stato utilizzato un collimatore che è stato posto nella posizione desiderata grazie all'uso di un traslatore a cui esso era attaccato. Tale strumento ha permesso lo spostamento del collimatore nello spazio.

In particolare per iniettare il laser per la prima volta all'interno del chip, si è fatto in modo di sovrapporre su un lungo percorso il fascio laser in entrata con la retroriflessione del diodo laser. In questo modo i due fasci risultavano sempre sovrapposti, anche all'ingresso del chip.

Una volta trovata la posizione desiderata, il collimatore è stato attaccato alla base della scatola dell'amplificatore.

Per avere in uscita un fascio laser circolare, è stato utilizzato un secondo collimatore per collimare il fascio lungo la direzione verticale e una lente cilindrica per correggere la divergenza del fascio lungo la direzione orizzontale. Nel posizionare tale lente bisognava fare attenzione al fatto che retroriflessioni non incidessero sul chip danneggiandolo.

In figura A.4 è riportato l'amplificatore realizzato.

Nella figura , con il n° 1 si intendono i collimatori, con il n°2 i cavi collegati alla sonda della temperatura, mentre il n°3 è relativo ai 2 cavi che permettono il passaggio di corrente nel sistema e agli altri 2 che sono collegati al LED. Quest'ultimo funge da feedback e se il sistema è nelle condizioni adatte a funzionare si accende. Il n°4 è il chip da noi utilizzato.

La cella Peltier non è visibile nella foto in quanto posta al di sotto della base di rame.

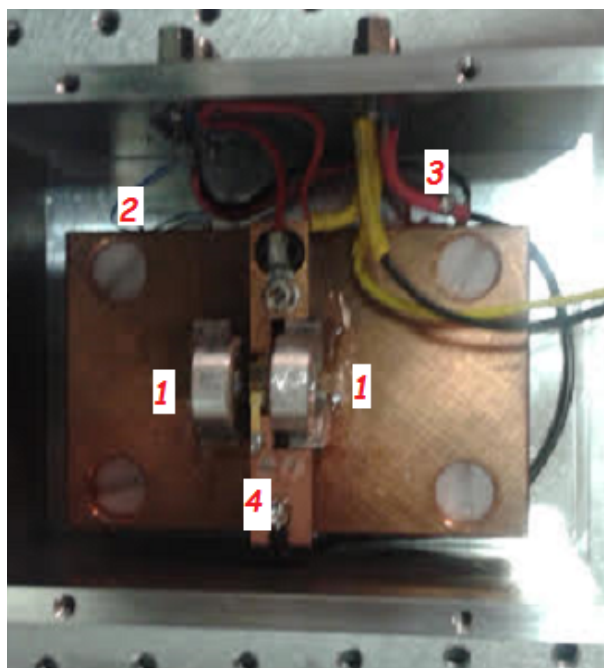


Figura A.4: Amplificatore realizzato

Per quanto riguarda i valori di potenza emessa, di seguito viene riportato un grafico in cui in ascissa c'è il valore della corrente a cui il sistema è sottoposto e in ordinata la potenza emessa. Tutti questi valori sono presi in presenza di un fascio laser di iniezione di potenza pari a circa 24 mW e sono presi appena fuori dall'amplificatore

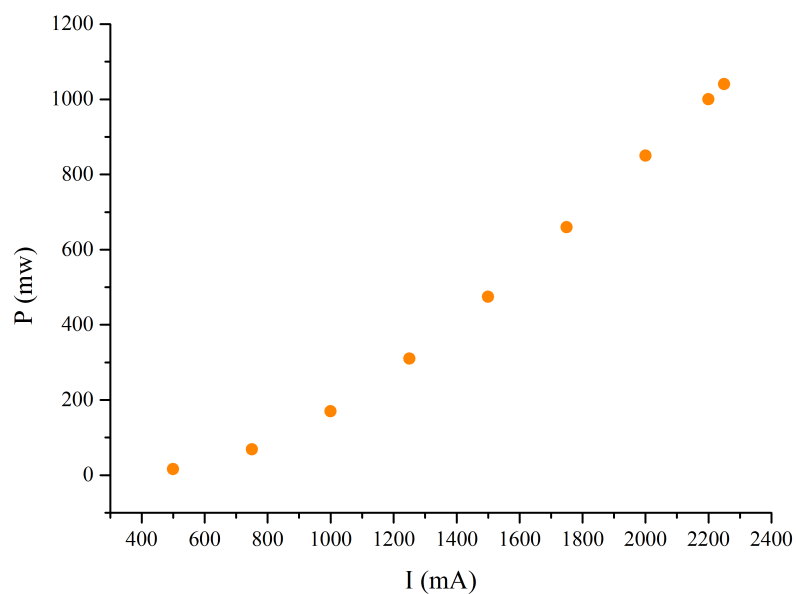


Figura A.5: Andamento della potenza al variare della corrente dell'amplificatore

Ringraziamenti

Per prima cosa vorrei ringraziare il Prof. Massimo G. Palma, il quale alla mia richiesta di volere fare una tesi sperimentale mi ha indirizzato verso il gruppo di laboratorio adatto a me. Quando ho cominciato questa avventura, non avrei mai pensato che mi sarebbe piaciuta così tanto. Grazie per essere stato così disponibile e per essersi fidato di me.

Questo lavoro di tesi è stato infatti svolto presso i laboratori del “Lens” di Firenze, nel gruppo diretto dal Prof. Giovanni Modugno. Anche a lui ovviamente vanno i miei ringraziamenti: pur non conoscendomi, mi ha accolto nel suo laboratorio permettendomi di fare un’esperienza di tesi interessante e stimolante. Grazie per il tanto tempo dedicatomi per chiarire i miei tanti dubbi e per la fiducia dimostratami.

Un grandissimo pensiero va ai miei colleghi di laboratorio: Chiara, Eleonora, Luca, Lorenzo e Federica. Grazie per le giornate passate insieme, le pause caffè e per tutto quello che mi avete insegnato. Grazie per avermi dato fiducia e avermi fatto fare cose che non avrei mai pensato di essere capace di fare: mai avrei pensato che sarei stata in grado di saldare (anche se, visto il mio amore per la saldatura, sono più brava a dissaldare). Grazie per avermi seguito e incoraggiato! Il vostro supporto è stato davvero importante! E’ stato davvero bello lavorare insieme.

Anche alle mie più vecchie amiche va un pensiero affettuoso. Grazie Genny, per avere sempre condiviso con me la passione per i fumetti, i telefilm, i libri, “Bang!”...insomma, grazie per avere alimentato la parte “nerd di me”. Grazie Giovi, per avere invece compreso e accudito la mia parte “normale”. Grazie ad entrambe per sopportarmi da anni, e soprattutto perché siete così incoscienti da farlo ancora.

Un ringraziamento va anche ai colleghi che hanno avuto un ruolo importante in questi anni. Grazie a Bianca (neve) Ambra per avere condiviso con me questo percorso di studi. Grazie per avermi salutato il primo giorno: non so se per te questo è stato un bene...ma ognuno è artefice del proprio destino...Grazie a Nana Giuli, Rosy e Ciccio, per le chiacchierate sulla fisica e soprattutto per aver sopportato le mie (tante) paranoie. Grazie per essermi stati vicino anche se spesso non è stato facile. Un “in bocca al lupo” ad Emanuele e Salvo: fatevi valere anche in quelle terre lontane! Non sono del tutto certa che mi mancheranno le vostre tristi battute!

Per ultimo, ma non per questo meno importanti, grazie alla mia famiglia. Grazie ai miei genitori, che mi hanno sempre supportato e che hanno sempre avuto fiducia in me. Grazie al mio amorevole e egocentrico fratello Ale, che con il suo modo di essere, è capace di farmi ridere. A Marisa...che nonostante mi conosca da 20 anni mi sopporta ancora, anche quando le ripeto migliaia di volte sempre le stesse cose. Infine, grazie a mia sorella che mettendo al mondo i miei piccoli nipoti, Jacopo e Simone, mi ha reso felice. Grazie a loro perché riescono a fare uscire la parte migliore di me.

Bibliografia

- [1] N. Giordano, Phys. Rev. Lett. 61, 2137 (1988).
- [2] A. Bezryadin, C. N. Lau, and M. Tinkham, Nature (London) 404, 971 (2000).
- [3] F. Altomare, A. M. Chang, M. R. Melloch, Y. Hong, and C. W. Tu, Phys. Rev. Lett. 97, 017001 (2006).
- [4] P. Li, P. M. Wu, Y. Bomze, I. V. Borzenets, G. Finkelstein, and A. M. Chang, Phys. Rev. Lett. 107, 137004 (2011).
- [5] K. Yu. Arutyunov, D. S. Golubev, and A. D. Zaikin, Phys. Rep. 464, 1 (2008).
- [6] R. Toda, M. Hieda, T. Matsushita, N. Wada, J. Taniguchi, H. Ikegami, S. Inagaki, and Y. Fukushima, Phys. Rev. Lett. 99, 255301 (2007).
- [7] J. Taniguchi, Y. Aoki, and M. Suzuki, Phys. Rev. B 82, 104509 (2010).
- [8] T. *Stöferle*, H. Moritz, C. Schori, M. *Köhl*, and T. Esslinger, Phys. Rev. Lett. 92, 130403 (2004).
- [9] C. D. Fertig, K. M. O? Hara, J. H. Huckans, S. L. Rolston, W. D. Phillips, and J. V. Porto, Phys. Rev. Lett. 94, 12040 (2005).
- [10] J. Mun, P. Medley, G. K. Campbell, L. G. Marcassa, D. E. Pritchard, and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. 99, 150604 (2007).
- [11] E. Haller, R. Hart, M. J. Mark, J. G. danzl, L. *Reichsöllner*, M. Gustavsson, M. Dalmonte, G. Pupillo, and H.C. *Nägerl*, Nature (London) 466, 597 (2010).
- [12] L. Tanzi , E. Lucioni , S. Chaudhuri, L. Gori , A. Kumar, C. D’Errico, M. Inguscio, and G. Modugno, Phys. Rev. Lett. 111, 115301 (2013)
- [13] A. Polkovnikov, E. Altman, E. Demler, B. Halperin, and M.D. Lukin, Phys. Rev. A 71, 063613 (2005)
- [14] B. Wu and Q. Niu, Phys. Rev. A 64, 061603 (2001)
- [15] I. Danshita, and C.W. Clark, Phys. Rev. Lett. 102, 030407 (2009)
- [16] K. Iigaya, S. Konabe, I. Danshita, and T. Nikuni Phys. Rev. A 74, 053611 (2006)

- [17] I. Danshita, and A. Polkovnikov, Phys. Rev. A 85, 023638 (2012)
- [18] I. Danshita, Phys. Rev. Lett. 111, 025303 (2013)
- [19] A. Bezryadin, J. Phys.: Condens. Matter 20, 043202 (2008)
- [20] H. Feshbach, Ann. Phys. 5, 357(1958).
- [21] S. Inouye, M. R. Andrews, J. Stenger, H. J. Miesner, D. M. Stamper-Kurn, and W. Ketterle, Science 392, 151 (1998).
- [22] A. Einstein, Sitzber. Kgl. preuss. Akad. Wiss., 261 (1924); ibidem, 3(1925).
- [23] S. N. Bose, Z. Phys. 26, 178 (1924).
- [24] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Weiman, and E. A. Cornell, Science 269, 198 (1995).
- [25] K. B. Davis, M. O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. 75, 3969 (1995)
- [26] C. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollet, and R. G. Hulet, Phys. Rev. Lett. 75, 1687 (1995).
- [27] C. J. Pethick, H. Smith, Bose-Einstein condensation in Dilute Gases, Cambridge University Press (2001).
- [28] J. Giacomelli, Localizzazione di un condensato di Bose-Einstein in potenziali ottici, Tesi di diploma, Università di Firenze (2007).
- [29] J.J Sakurai, Modern Quantum Mechanics, 2nd ed., Addison Wesley (1993)
- [30] I. Bloch, J. Dalibard and W. Zwerger, Rev. Mod. Phys., 80 (2008).
- [31] A. J. Moerdijk, B. J. Verhaar, and A. Axelsson, Phys. Rev. A 51, 4852 (1995).
- [32] C. D'Errico. Osservazione di risonanze di Fano-Feshbach in miscele atomiche K-Rb. Tesi magistrale, University of Florence (2005).
- [33] E. P. Gross, Nuovo Cimento 20, 454 (1961).
- [34] E. P. Gross, J. Math. Phys. 4, 195 (1963).
- [35] L. P. Pitaevskii, Zh. Eksp. Teor. Fiz., 40, 646 (1961); Sov. Phys. JETP 13, 451 (1961).
- [36] R. Grimm, M. Weidemüller, and Y. B. Ovchinnikov, Advances in Atomic, Molecular and Optical Physics 42, 95-170 (2000).
- [37] C. Kittel, Quantum Theory of Solids, John Wiley and Sons, New York, (1963).
- [38] O. Morsch, M. Oberthaler, Rev. Mod. Phys. 78, 179215 (2006).

- [39] M. Greiner, Ultracold quantum gases in three-dimensional optical lattice, Ph.D Thesis, University of *München*
- [40] D.L. Luxat, and A. Griffin, Phys. Rev. A 67, 043603 (2003)
- [41] L. Tanzi, One-dimensional disordered boson from weak to strong interactions: the Bose glass, PhD thesis, University of Florence (2013)
- [42] M. Olshanii, Phys. Rev. Lett., 81, 938 (1998)
- [43] M.A. Cazalilla, R. Citro, T. Giamarchi, E. Orignac, and M. Rigol, Rev. Mod. Phys. 83, 1405 (2011)
- [44] T. Giamarchi, Quantum Physics in One Dimension, Oxford University Press (2003)
- [45] M. P. A. Fisher, P. B. Weichman, G. Grinstein, and D. S. Fisher, Phys. Rev. B 40, 546 (1989).
- [46] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T. W. Hansch and I. Bloch, Nature 415, 39 (2002).
- [47] E. Haller, R. Hart, M.J. Mark, J.G. Danzl, L. *Reichsöllner*, M. Gustavsson, M. Dalmonte, G. Pupillo, H.C. *Nägerl*, Nature 466, 597 (2010)
- [48] F. Dalfovo, S. Giorgini, L.P. Pitaevskii, S. Stringari, Rev. Mod. Phys., 71, 463 (1999)
- [49] K. Huang, Statistical Mechanics, Wiley (1987)
- [50] G. Roati, M. Zaccanti, C. D'Errico, J. Catani, M. Modugno, A. Simoni, M. Inguscio, and G. Modugno, Phys. Rev. Lett. 99, 010403 (2007).
- [51] H. Wang, A. N. Nikolov, J. R. Ensher, P. L. Gould, E. E. Eyler, and W. C. Stwalley, Phys. Rev. A 62, 052704 (2000).
- [52] E.A. Donley, N.R. Claussen, S.L. Cornish, J.L. Roberts, E.A. Cornell, and C.E. Wieman, Nature 412, 295 (2001)
- [53] M. Landini, S. Roy, L. Carcagni, D. Trypogeorgos, M. Fattori, M. Inguscio, and G. Modugno, Phys. Rev. A 84, 043432 (2011)
- [54] G. Roati, Quantum degenerate Potassium-Rubidium mixtures, PhD Thesis, University of Trento (2003).
- [55] M. Zaccanti, Tuning of the interactions in ultracold K-Rb quantum gases, PhD thesis, University of Florence (2007).
- [56] E. Lucioni, Experiments with interacting bosons in a disordered lattice, PhD thesis, University of Florence
- [57] L. Gori, Exploring the phase diagram of a disordered Bose Gas, Master thesis, University of Florence

- [58] A. Kumar, One dimensional bosons: Atoms to molecules, PhD Thesis, University of Florence (2013)
- [59] C. D’Errico, Anderson localization of a weakly interacting Bose-Einstein condensate, PhD Thesis, University of Florence (2009).
- [60] A. Simoni, M. Zaccanti, C. D’Errico, M. Fattori, G. Roati, M. Inguscio, and G. Modugno, Phys. Rev. A 77, 052705 (2008).
- [61] I. L. Aleiner, B.L. Altshuler, and G. V. Shlyapnikov Nature Physics 6, 900-904 (2010)
- [62] V.P. Michal, B.L. Altshuler, and Shlyapnikov, Phys. Rev. Lett. 113, 045304 (2014)
- [63] J.W. Walpole, Optical and Quantum Electronics 28, 623 (1996)
- [64] J. Kangara, Design and construction of tapered amplifier systems for laser cooling and atom trapping experiments, Master Thesis, University of Miami (2012)