

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FIRENZE  
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE FISICHE E NATURALI

TESI DI LAUREA SPECIALISTICA IN SCIENZE FISICHE E  
ASTROFISICHE

**Sviluppo di un sistema laser per la codifica di  
*qubit* su atomi degeneri di Itterbio**

-  
**Development of a laser system for the encoding  
of qubits on degenerate Ytterbium atoms**

CANDIDATO: Giacomo Cappellini  
RELATORE: Dott. Jacopo Catani  
CORRELATORE: Prof. Massimo Inguscio

Anno Accademico 2011/2012



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>1 Atomi di Itterbio ultrafreddi e qubit</b>	<b>3</b>
1.1 L'atomo di Itterbio . . . . .	4
1.2 Raffreddamento e intrappolamento di atomi di Itterbio . . . . .	6
1.3 Codifica, manipolazione e lettura dei qubit . . . . .	8
<b>2 Basi teoriche sulla duplicazione di frequenza e sui controlli automatici</b>	<b>13</b>
2.1 Ottica non lineare . . . . .	14
2.1.1 Principi base di ottica non lineare . . . . .	14
2.1.2 Generazione di seconda armonica . . . . .	17
2.1.3 Condizione di <i>quasi-phase-matching</i> . . . . .	20
2.1.4 Generazione di seconda armonica in cavità . . . . .	23
2.2 Teoria dei controlli automatici . . . . .	27
2.2.1 Concetti fondamentali . . . . .	27
2.2.2 Controlli ad azione diretta e in retroazione . . . . .	28
2.2.3 Funzione di trasferimento e funzione di risposta armonica	30
2.2.4 Sistemi del primo e del secondo ordine . . . . .	32
2.2.5 Caratteristiche dei sistemi in retroazione . . . . .	37
2.2.6 Progetto dei regolatori . . . . .	42
<b>3 Generazione di luce laser a 578 nm</b>	<b>49</b>
3.1 Diodo laser in cavità estesa . . . . .	49
3.1.1 Laser a quantum dot . . . . .	49
3.1.2 Realizzazione e caratterizzazione dell'ECDL . . . . .	51
3.2 Cavità di duplicazione . . . . .	57
3.3 Sistema da vuoto . . . . .	65
<b>4 Riduzione della larghezza di riga</b>	<b>71</b>
4.1 Configurazione generale . . . . .	71

4.2	Modulazione tramite corrente di alimentazione . . . . .	73
4.3	Modulazione con AOM . . . . .	76
4.4	ECDL con EOM intra-cavità . . . . .	78
4.4.1	Stima della larghezza di riga . . . . .	80
4.4.2	EOM con coating antiriflesso . . . . .	82
4.4.3	EOM all'angolo di Brewster . . . . .	91
4.4.4	Larghezza di riga con rumore elettrico ed acustico ridotto	97
4.5	Cavità di prestabilizzazione . . . . .	99
4.6	Miglioramenti e sviluppi futuri . . . . .	103
<b>Conclusioni</b>		<b>107</b>
<b>A Metodo Hänsch-Couillaud</b>		<b>109</b>
<b>Bibliografia</b>		<b>111</b>

# Introduzione

In questi anni, i rapidi sviluppi nel campo della fisica degli atomi ultrafreddi sono andati di pari passo con lo sviluppo di sorgenti e sistemi laser sempre più raffinati. I primi lavori che hanno portato al raggiungimento del limite di degenerazione quantistica in sistemi bosonici [1] e fermionici [2] sono basati su atomi alcalini caratterizzati da transizioni facilmente accessibili con i dispositivi laser a disposizione. Lo sviluppo di nuove sorgenti laser e l'affermazione delle tecniche di ottica non lineare hanno poi permesso di raggiungere questi stessi risultati anche con atomi a due elettroni come lo Stronzio e l'Itterbio [3]. Quasi contemporaneamente, questo tipo di atomi e in particolare l'Itterbio è stato oggetto di un intenso studio anche da punto di vista teorico, che lo ha classificato come uno dei sistemi più promettenti per l'implementazione di nuove tecniche di informazione quantistica [4–7].

Rispetto agli atomi alcalini, gli atomi a due elettroni hanno una struttura dei livelli più ricca, con livelli di singoletto e tripletto, e sono inoltre caratterizzati da transizioni doppiamente vietate dalle regole di selezione di spin e di momento angolare totale che connettono lo stato fondamentale a stati metastabili caratterizzati da una vita media minima dell'ordine dei secondi fino a un massimo teoricamente infinito. Per questo motivo, questa famiglia di atomi è particolarmente interessante, oltre che per l'informazione quantistica, anche nel campo della metrologia di precisione [8, 9].

Questo lavoro di tesi si colloca all'interno di un esperimento presso il Dipartimento di Fisica dell'Università di Firenze in collaborazione con l'istituto LENS il cui obiettivo è lo studio di tecniche di computazione quantistica su atomi degeneri di Itterbio. Durante questo lavoro di tesi, è stato progettato e realizzato un sistema laser che, a partire da un diodo laser in cavità estesa con lunghezza d'onda di 1156 nm e circa 700 kHz di larghezza di riga, ricava radiazione laser visibile a 578 nm con una potenza di 50 mW e una larghezza di riga di qualche kHz relativa alla cavità di riferimento. Questo sistema laser rappresenta un punto di partenza ottimale per realizzare una sorgente laser dalle elevate prestazioni spettrali in grado di eccitare la transizione doppiamente vietata  $^1S_0 \rightarrow ^3P_0$  dell'atomo di Itterbio e codificare in maniera

controllata con luce visibile un *qubit* sfruttando lo stato fondamentale  $^1S_0$  e lo stato metastabile  $^3P_0$ .

Questo lavoro di tesi è strutturato come segue:

- nel capitolo 1 sarà brevemente descritto il setup sperimentale attuale per la creazione di gas degeneri di Itterbio nei laboratori del Dipartimento di Fisica. Saranno poi discussi i requisiti che il dispositivo laser dovrà avere in funzione degli obiettivi dell'esperimento e saranno esposte alcune sue modalità di impiego. Vedremo come un tale laser in combinazione con un gas ultrafreddo di Itterbio in un reticolo ottico possa consentire la creazione di un registro quantistico controllato di *qubit*.
- Nel capitolo 2 saranno affrontate le basi teoriche dei due elementi fondamentali per la realizzazione del sistema laser, cioè il fenomeno della duplicazione in frequenza legato alla non linearità di alcuni sistemi ottici, grazie al quale è possibile ricavare radiazione laser a 578 nm a partire da radiazione infrarossa a 1156 nm, e la teoria dei controlli automatici alla base dei regolatori PID impiegati per stabilizzare il dispositivo ed affinare le sue prestazioni spettrali.
- Nel capitolo 3 saranno descritti lo sviluppo e la realizzazione della sorgente laser, consistente in un diodo laser in cavità estesa, e della cavità di duplicazione grazie alla quale è stata ottenuta la luce a 578 nm.
- Nel capitolo 4 sarà illustrato il processo seguito per la riduzione della larghezza di riga del laser. In particolare vedremo che per raggiungere questo fine è stato necessario adottare una configurazione particolare di diodo laser in cavità estesa che prevede una cavità lunga all'interno della quale è posto un modulatore elettro-ottico in grado di variare molto rapidamente la lunghezza della cavità stessa. Proprio grazie a questa configurazione è stato possibile raggiungere una larghezza di riga di emissione relativa alla cavità di riferimento di qualche kHz. Sempre in questo capitolo saranno infine esposti gli interventi futuri pianificati per una ulteriore riduzione della larghezza di riga del dispositivo fino a raggiungere il livello della decina di Hz necessario alla codifica di *qubit* in atomi di Itterbio nel presente esperimento.

# Capitolo 1

## Atomi di Itterbio ultrafreddi e qubit

In questo primo capitolo sarà descritto l'esperimento all'interno del quale si colloca la realizzazione del dispositivo laser oggetto di questa tesi. Il progetto sperimentale si basa sulle numerose proprietà che rendono l'atomo di Itterbio un candidato ideale per l'implementazione di tecniche di informazione quantistica. I requisiti che un calcolatore quantistico universale deve possedere sono riassunti dai cosiddetti "criteri di DiVincenzo" [10]:

1. il sistema fisico deve essere scalabile con dei qubit ben caratterizzati.
2. Il sistema deve offrire la possibilità di inizializzare lo stato dei qubit.
3. I tempi di coerenza devono essere molto maggiori di quelli richiesti dalle operazioni di gate.
4. Il sistema deve rendere possibile la realizzazione di un set universale di porte (gate) quantistici.
5. Il sistema deve consentire la lettura selettiva dei qubit.

Vedremo come, manipolando in modo opportuno degli atomi di Itterbio, possa essere possibile soddisfare questi requisiti. L'Itterbio è infatti caratterizzato dal possedere un livello energetico metastabile, raggiungibile con una transizione doppiamente vietata, caratterizzato da una vita media dell'ordine delle decine di secondi, ed è sostanzialmente amagnetico e quindi insensibile alle fluttuazioni di campo magnetico. Queste proprietà, unite alla possibilità di collocare gli atomi di Itterbio in un reticolo ottico, consentono di avere un insieme scalabile di sistemi a due livelli con un lungo tempo di coerenza,

chiamato registro quantistico. Inoltre la presenza di una transizione tra il livello fondamentale e il livello metastabile apre la possibilità di inizializzare lo stato del sistema. Per eccitare questa transizione è necessario disporre di un dispositivo laser “ultrastretto” le cui prestazioni spettrali saranno specificate nella sezione 1.3. Infine è possibile implementare un sistema che consente la lettura dei singoli qubit.

Per creare il registro quantistico e per poter sfruttare efficacemente la transizione verso lo stato metastabile è necessario disporre di un campione atomico degenere, ed è quindi necessario allestire un apparato sperimentale in grado di produrre campioni gassosi ultrafreddi manipolabili in modo agevole. Il funzionamento di tale apparato sarà esposto sommariamente in questo capitolo, mentre una descrizione più approfondita si trova in [11, 12].

## 1.1 L’atomo di Itterbio

L’Itterbio è un metallo raro, fortemente diamagnetico, collocato nella serie dei Lantanidi della tavola periodica. Questo elemento, con numero atomico  $Z = 70$ , ha molti isotopi naturali stabili sia bosonici, con numero di massa  $A$  pari, che fermionici, con numero di massa dispari, la cui abbondanza naturale è riportata nella seguente tabella:

Isotopo	Abbondanza relativa (%)	Spin Nucleare
$^{168}\text{Yb}$	0.13	0
$^{170}\text{Yb}$	3.05	0
$^{171}\text{Yb}$	14.3	1/2
$^{172}\text{Yb}$	21.9	0
$^{173}\text{Yb}$	16.12	5/2
$^{174}\text{Yb}$	31.8	0
$^{176}\text{Yb}$	12.7	0

L’atomo di Itterbio ha una configurazione elettronica del tipo  $[\text{Xe}]4f^{14}6s^2$  e presenta una struttura dei livelli molto simile a quella degli atomi alcalino terrosi, come ad esempio il Calcio. Dato che possiede due elettroni nell’orbitale più esterno, i suoi livelli energetici possono essere divisi in stati di singoletto, con spin  $S = 0$ , e stati di tripletto, con spin  $S = 1$ , come illustrato in Fig. 1.1. Sempre in Fig. 1.1 sono rappresentate le tre transizioni impiegate per rallentare e manipolare l’atomo di Itterbio. La transizione  $^1S_0 \rightarrow ^1P_1$  a 398.9 nm è una transizione permessa per dipolo elettrico, caratterizzata da una breve vita media di 5.5 ns a cui corrisponde una larghezza di riga pari a

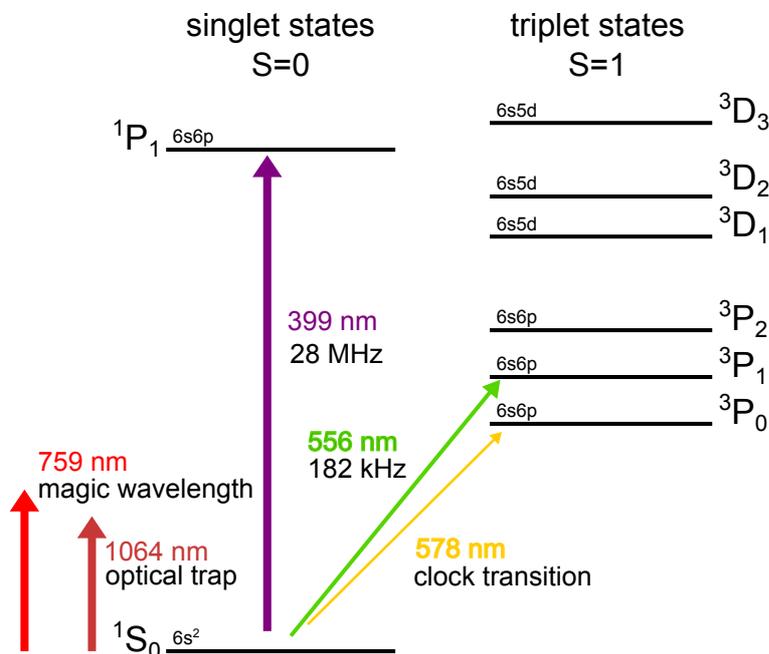


Figura 1.1: Schema dei livelli energetici dell'Itterbio e delle transizioni atomiche sfruttate nell'esperimento.

28.9 MHz. Nell'esperimento questa transizione viene impiegata per un primo raffreddamento degli atomi in uno Zeeman Slower.

La transizione  $^1S_0 \rightarrow ^3P_1$  è invece una transizione detta di intercombinazione, che viola la regola di selezione di conservazione dello spin  $\Delta S = 0$ . Questa regola di selezione è rigorosa nell'approssimazione di accoppiamento LS, cioè nell'ipotesi che il termine di spin orbita dell'hamiltoniana atomica sia trascurabile rispetto al termine di repulsione elettronica. Per numeri atomici  $Z > 30$  il termine di spin orbita risulta però confrontabile con il termine di repulsione elettronica e in questo caso lo spin  $S$  non può più essere considerato un buon numero quantico. La condizione  $\Delta S = 0$  non è più rigorosa e la transizione diventa quindi debolmente permessa. Per l'atomo di Itterbio la vita media dello stato  $^3P_1$  è di 850 ns [13], a cui corrisponde una larghezza di riga pari a 182 kHz. Questa transizione viene impiegata per l'intrappolamento degli atomi in una trappola magneto-ottica (MOT).

Infine la transizione  $^1S_0 \rightarrow ^3P_0$  è una transizione doppiamente vietata in quanto viola sia la conservazione dello spin  $\Delta S = 0$  che la conservazione del momento angolare totale  $J$ , la quale vieta transizioni del tipo  $J = 0 \rightarrow J = 0$ . Tuttavia negli isotopi fermionici dell'Itterbio questa transizione risulta debolmente permessa e la vita media dello stato  $^3P_0$  è stata misurata [14] dell'ordine di 20 s. Questo è possibile perché gli isotopi fermionici possiedono una

struttura iperfine: in questo caso infatti anche il momento angolare  $J$  non è più un buon numero quantico, di conseguenza la conservazione del momento angolare totale  $J$  non è più una regola rigorosa. Gli atomi bosonici hanno invece spin nucleare nullo, di conseguenza sono privi di struttura iperfine e la transizione  $J = 0 \rightarrow J = 0$  è strettamente vietata. Tuttavia è possibile accedere al livello  ${}^3P_0$  inducendo, con l'applicazione di un campo magnetico costante, un mescolamento di questo livello con lo stato  ${}^3P_1$  [15]. Anche in questo caso la transizione verso lo stato  ${}^3P_0$  diventa debolmente permessa con una larghezza di riga che dipende dal campo magnetico applicato e dall'intensità del radiazione impiegata per eccitare tale transizione.

## 1.2 Raffreddamento e intrappolamento di atomi di Itterbio

Per poter sfruttare la transizione  ${}^1S_0 \rightarrow {}^3P_0$  è necessario disporre di un campione di atomi ultrafreddi in regime di degenerazione quantistica. Il raffreddamento e l'intrappolamento degli atomi di Itterbio risulta difficoltoso per diversi motivi: le transizioni utilizzabili per il raffreddamento laser sono in una zona dello spettro di difficile accesso per la quale non esistono dispositivi commerciali adeguati. Inoltre l'Itterbio è un metallo refrattario la cui pressione di vapore a temperatura ambiente non è sufficiente per ottenere un fascio atomico con un alto numero di atomi. È quindi necessario scaldare l'Itterbio in un forno ad una temperatura dell'ordine di  $500^\circ\text{C}$ , il che implica che gli atomi del fascio abbiano una velocità media di  $\sim 300\text{ m/s}$ .

Nell'esperimento, il fascio atomico uscente dal forno subisce un rallentamento preliminare grazie ad uno Zeeman Slower basato sulla transizione permessa  ${}^1S_0 \rightarrow {}^1P_1$  a  $399\text{ nm}$ . Lo Zeeman Slower è un dispositivo che consente di rallentare gli atomi grazie ad un campo magnetico variabile spazialmente che corregge la variazione dello shift Doppler degli atomi che lo attraversano data dal rallentamento degli atomi in conseguenza dell'assorbimento di fotoni. Dettagli sul funzionamento e sulla calibrazione del dispositivo utilizzato nell'esperimento sono riportati in [16]. Gli atomi hanno una velocità di uscita dallo Zeeman Slower dell'ordine di  $15\text{ m/s}$ , e questo permette di intrappolarli efficacemente in una MOT basata sulla transizione di intercombinazione  ${}^1S_0 \rightarrow {}^3P_1$  a  $556\text{ nm}$ .

Nella trappola magneto-ottica l'energia cinetica degli atomi è dissipata grazie all'interazione con tre coppie di fasci laser contropropaganti che li rallentano nelle tre direzioni spaziali andando a formare una cosiddetta melassa ottica. L'impiego di un campo magnetico consente poi di intrappolare gli

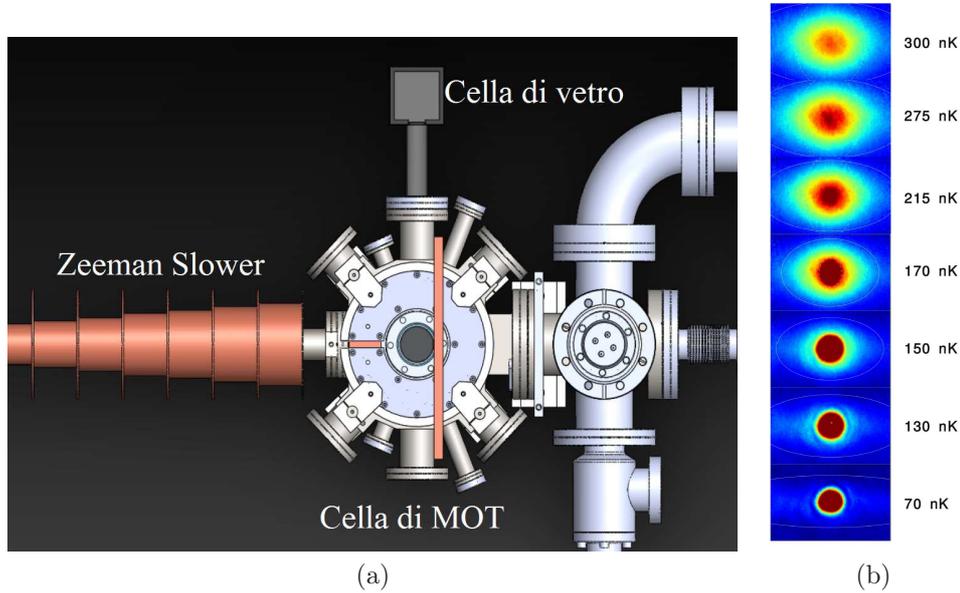


Figura 1.2: (a) Schema dell'apparato sperimentale costituito da Zeeman Slower, cella di MOT e cella ad alto accesso ottico. (b) Immagini in assorbimento della transizione di fase verso lo stato condensato.

atomi nella zona di incrocio dei fasci. La velocità di cattura della MOT, cioè la velocità massima che un atomo deve avere perché venga intrappolato, è proporzionale al fattore  $\Gamma/2$ , dove  $\Gamma$  è la larghezza di riga della transizione impiegata nella MOT, ed è di circa 8 m/s, comunque troppo bassa per intrappolare efficacemente gli atomi, di conseguenza per incrementare in numero di atomi intrappolato è necessario allargare artificialmente la transizione modulando i fasci di MOT. Dettagli su questa procedura e sulla realizzazione della MOT sono contenuti in [11]. Il campione atomico che si ottiene dopo il raffreddamento nella MOT contiene un numero di atomi di circa  $N \sim 2 \times 10^9$  alla temperatura di  $T = (97 \pm 1) \mu\text{K}$  nel caso bosonico mentre si hanno  $N \sim 4 \times 10^8$  atomi a temperatura  $T = (30 \pm 1) \mu\text{K}$  nel caso di fermioni [12].

Per abbassare ulteriormente la temperatura del campione atomico, lo stadio successivo consiste nel raffreddamento evaporativo in una trappola dipolare FORT (Far Off Resonance Trap). Tuttavia il campione atomico ottenuto nella MOT ha una dimensione dell'ordine del mm, molto maggiore del waist del fascio di dipolo che è dell'ordine di  $30 \mu\text{m}$ . Per ottimizzare il caricamento nella trappola dipolare si ricorre quindi ad un risonatore ottico ottenuto ponendo due specchi ad elevata riflettività all'interno della cella di MOT in modo da formare una cavità ottica risonante con finesse  $\sim 1000$ . Un fascio laser a 1064 nm viene iniettato nella cavità andando a formare un reticolo

ottico molto profondo in grado di localizzare gli atomi nei massimi stazionari di intensità a causa del light shift dei livelli dato dall'interazione con il fascio laser fuori risonanza. Questo consente una riduzione delle dimensioni del campione atomico che può così essere caricato nella trappola ottica di dipolo abbassando l'intensità del reticolo perdendo un numero di atomi minore di quello che si perderebbe caricando direttamente gli atomi dalla MOT.

Nella trappola di dipolo, costituita da due fasci laser incrociati a 1064 nm, gli atomi subiscono un processo di raffreddamento evaporativo, ottenuto mediante una diminuzione progressiva della profondità della trappola ottica in modo da perdere gli atomi dotati di maggiore energia cinetica ed abbassare la temperatura del campione con una termalizzazione degli atomi rimanenti. In questo modo è stato possibile ottenere un condensato di Bose Einstein di atomi di  $^{174}\text{Yb}$  contenente  $N \simeq 4.5 \times 10^5$  atomi ad una temperatura di 175 nK [12] (Fig. 1.2 (b)).

### 1.3 Codifica, manipolazione e lettura dei qubit

Una volta in possesso del campione di atomi degeneri di Itterbio, per costruire un registro quantistico è necessario posizionare gli atomi in un reticolo ottico. Per fare ciò, il progetto prevede che il campione atomico venga trasportato in una cella di vetro ad alto accesso ottico. Questo processo avviene trasportando otticamente gli atomi dal centro della cella di MOT fino alla cella di vetro lungo un tratto di circa 20 cm. Un fascio laser a 1064 nm viene focalizzato al centro della cella di MOT con una lente montata su un traslatore a cuscinio d'aria Aerotech ABL1500 che garantisce ripetibilità di posizionamento e un movimento privo di vibrazioni. Muovendo la lente è possibile spostare la posizione del fuoco del fascio laser e gli atomi, attratti nel massimo di intensità a causa del light shift, seguono tale spostamento. Una volta nella cella di vetro gli atomi subiscono il processo di raffreddamento evaporativo fino alla degenerazione quantistica in una trappola ottica di dipolo costituita dal fascio di trasporto e da un secondo fascio a 1064 ad esso perpendicolare. Attualmente la cella di vetro ad alto accesso ottico è stata montata e l'operazione di trasporto degli atomi è in fase di ottimizzazione. Quanto descritto in seguito è attualmente in fase di studio e progettazione.

Il campione atomico degenerato così ottenuto può essere caricato in un reticolo ottico. Regolando in maniera opportuna la profondità del reticolo, è possibile portare il sistema nello stato di isolante di Mott [17] dove per particolari valori del numero di atomi si ha esattamente un atomo per sito reticolare. Il reticolo ottico che viene a costituire un supporto "perfettamente ordinati" per quelli che saranno i qubit atomici sarà generato da luce laser

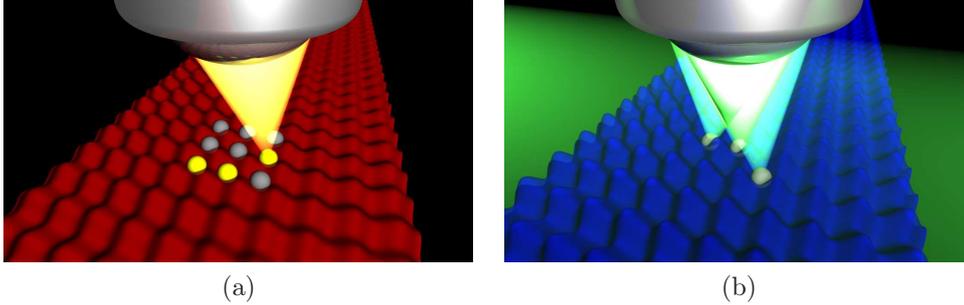


Figura 1.3: (a) Sui singoli atomi localizzati nei siti reticolari viene codificato il qubit illuminandoli con il laser ultra-stretto. (b) Gli atomi nello stato  $^1S_0$  vengono osservati singolarmente grazie ad un obiettivo ad altissima risoluzione.

alla cosiddetta lunghezza d'onda magica, che per l'Itterbio è 759.35 nm [18]. Il vantaggio di operare in un reticolo di questa lunghezza d'onda è che il light shift dato dall'interazione tra gli atomi e il reticolo è uguale per i livelli  $^1S_0$  e  $^3P_0$ , e questo fa sì che gli atomi evolvano allo stesso modo indipendentemente dallo stato in cui si trovano. A questo punto è possibile inizializzare i qubit trasferendo popolazione dallo stato fondamentale a quello metastabile mediante il laser ultra-stretto (Fig. 1.3 (a)). Gli accorgimenti di cui tenere conto e le possibili procedure di manipolazione dipendono dal fatto di lavorare con fermioni o bosoni e saranno esposte poco più avanti.

Supponendo quindi di aver codificato l'informazione e eseguito un algoritmo, si presenta la necessità di leggere lo stato finale del sistema. Per farlo, sfruttando la separazione ottica degli stati qubit, gli atomi possono essere caricati in un reticolo ottico quasirisonante molto profondo che “congela” gli atomi nello stato in cui si trovano e fatti interagire con la luce laser di MOT a 556 nm. Questo consente di osservare la fluorescenza degli atomi e allo stesso tempo di raffreddarli grazie all'effetto di melassa ottica, compensando l'effetto di riscaldamento dato dal reticolo quasirisonante. Per osservare la fluorescenza del singolo atomo localizzato in un sito reticolare l'esperimento impiegherà un obiettivo ad altissima risoluzione corretto cromaticamente tra 399 nm e 759 nm con apertura numerica  $NA = 0.7$  attualmente in fase di studio (Fig. 1.3 (b)): se il sito è occupato allora l'atomo sarà nello stato  $^1S_0$ , mentre se il sito non risulta occupato l'atomo che lo occupa si trova nello stato  $^3P_0$ . In questo modo è possibile ricostruire lo stato finale del sistema.

L'impiego di un obiettivo ad altissima risoluzione, oltre ad essere fondamentale per la lettura dello stato finale dell'esperimento, sarà fondamentale perché consentirà da una parte di generare i reticoli ottici proiettandoli olograficamente [19] anziché con coppie di fasci contropropaganti e consentirà inoltre di indirizzare il fascio laser per la codifica dell'informazione sul singolo

sito reticolare.

Andiamo ora ad esaminare le peculiarità degli isotopi fermionici e bosonici.

### Fermioni

Come si è detto, gli isotopi fermionici dell'Itterbio sono caratterizzati dall'aver spin nucleare diverso da zero ed hanno quindi una struttura iperfine. Questo da una parte rende possibile la transizione  $^1S_0 \rightarrow ^3P_0$  e rappresenta un ulteriore grado di libertà che arricchisce le possibilità di manipolazione dell'atomo, dato che è possibile codificare un qubit sia utilizzando i gradi di libertà elettronici sia utilizzando i gradi di libertà di spin. Codificando l'informazione nello spin nucleare è possibile spostare gli atomi con reticoli che intrappolano selettivamente gli stati  $^1S_0$  e  $^3P_0$  [20] e proprio su questa possibilità si basano numerose proposte teoriche [7]. Tuttavia la struttura iperfine rappresenta un problema per l'evoluzione coerente dei due stati stabili a meno di non riuscire a disaccoppiare i gradi di libertà elettronici dai gradi di libertà di spin nucleare. Dato che i sottolivelli iperfini del livello  $^1S_0$  e del livello  $^3P_0$  rispondono in modo diverso all'applicazione di un campo magnetico, è possibile raggiungere questo obiettivo applicando un campo magnetico sufficientemente forte da indurre una separazione tale che una sola delle transizioni tra i sottolivelli sia risonante con la radiazione laser incidente. In questo caso gli spin dei due stati  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  sono fissati dalla polarizzazione della luce incidente e i gradi di libertà elettronici risultano effettivamente disaccoppiati dallo spin nucleare. Questa condizione nell'Itterbio si raggiunge per valori molto alti di campo magnetico ( $\sim 1$  T per il  $^{171}\text{Yb}$  [7]) e questo fatto rappresenta il maggiore inconveniente nel caso in cui si decida di lavorare con isotopi fermionici.

### Bosoni

Nel caso dei bosoni, che hanno il netto vantaggio di avere spin totale nullo e quindi sono insensibili alle fluttuazioni di campo magnetico, il problema principale è rappresentato dal fatto che la transizione  $^1S_0 \rightarrow ^3P_0$  è, come si è detto, strettamente vietata. Come anticipato, tale problema può essere affrontato inducendo artificialmente la transizione e questo può essere ottenuto con l'applicazione di un campo magnetico costante [15]. Indicando con  $|0\rangle$ ,  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$  rispettivamente gli stati  $^1S_0$ ,  $^3P_0$  e  $^3P_1$ , si ha che applicando un campo magnetico costante  $\mathbf{B}$  si induce un accoppiamento tra gli stati  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$  dato dall'elemento di matrice  $\Omega_B = \langle 1 | \hat{\mu} \cdot \mathbf{B} | 2 \rangle / \hbar$  dove  $\hat{\mu}$  è l'operatore di dipolo magnetico. Se vale la condizione  $|\Omega_B / \Delta_{21}| \ll 1$ , cioè se questo accop-

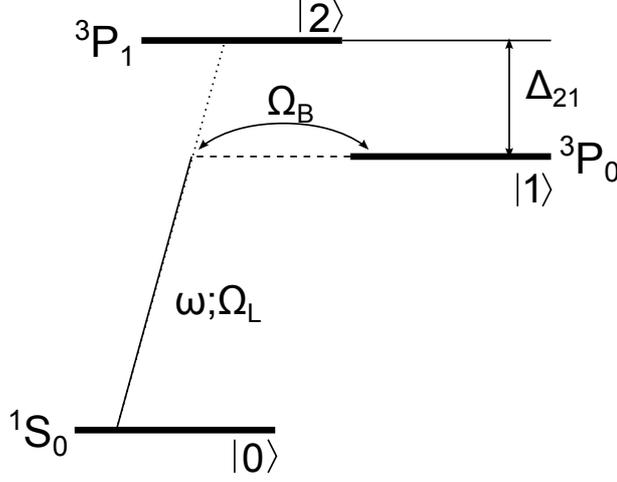


Figura 1.4: Induzione della transizione fortemente vietata con l'applicazione di un campo magnetico in un sistema atomico generico a tre livelli.

piamento è molto minore della separazione in frequenza  $\Delta_{21}$  tra i livelli  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$ , allora è possibile applicare la teoria delle perturbazioni al primo ordine da cui si ricava che lo stato  $|1\rangle$  acquisisce una piccola componente dello stato  $|2\rangle$ , cioè si ha uno stato del tipo

$$|1'\rangle = |1\rangle + \frac{\Omega_B}{\Delta_{21}} |2\rangle \quad (1.1)$$

Se la transizione  $|0\rangle \rightarrow |2\rangle$  è almeno debolmente permessa con elemento di matrice dato da  $\Omega_L = \langle 2 | \hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E} | 0 \rangle / \hbar$ , dove  $\hat{\mathbf{d}}$  è l'operatore di dipolo elettrico e  $\mathbf{E}$  è il campo elettrico della radiazione incidente, allora diviene possibile una transizione tra i livelli  $|0\rangle$  e  $|1'\rangle$ . La frequenza di Rabi associata a questa transizione può essere determinata usando la (1.1) ed è data da:

$$\Omega_{01} = \langle 1' | \hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E} | 0 \rangle / \hbar = \frac{\Omega_L \Omega_B}{\Delta_{21}} \quad (1.2)$$

Si può inoltre mostrare [15] che la frequenza di Rabi (1.2) può essere riscritta, nel caso di radiazione incidente con polarizzazione lineare parallela al campo magnetico  $\mathbf{B}$ , nel modo seguente:

$$\Omega_{01} = \alpha \sqrt{I} |\mathbf{B}| \quad (1.3)$$

dove  $I$  è l'intensità della radiazione incidente e  $\alpha$  una costante che contiene tutte le variabili atomiche e che per l'itterbio vale  $186 \text{ Hz}/(\text{T}\sqrt{\text{mW}/\text{cm}^2})$ . Inoltre a causa del mixing con lo stato  $|2\rangle$ , lo stato  $|1'\rangle$  ha una vita media

finita, la cui larghezza di riga radiativa, che tiene conto dell'allargamento per potenza della transizione  $|0\rangle \rightarrow |2\rangle$ , è stimabile dell'ordine del  $\mu\text{Hz}$  [15], che farebbe decadere la popolazione nello stato  $|0\rangle$ , ma su una scala di tempi  $1/\Gamma$  molto minore dei tempi del ciclo sperimentale.

Focalizzando un fascio di potenza 20 mW su un waist di  $100\ \mu\text{m}$  e utilizzando un campo magnetico di 20 Gauss si ottiene  $\Omega_{10}/2\pi \simeq 15\ \text{Hz}$ . Per indurre le oscillazioni di Rabi è quindi necessaria una sorgente laser coerente su una scala di tempi analoga a quella delle oscillazioni di Rabi, a cui corrisponde una larghezza di riga dell'ordine di 10 Hz. In questo caso dunque i requisiti di campo magnetico sono molto più accessibili rispetto a quelli necessari per poter impiegare isotopi fermionici.

Un sorgente laser con le caratteristiche sopra indicate può essere a questo punto impiegata per codificare un qubit: un atomo inizialmente nello stato  $|0\rangle$  che interagisce con il laser ultrastretto passa in uno stato definito dalla sovrapposizione  $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ , dove in generale i coefficienti  $\alpha$  e  $\beta$  dipendono dal tempo di interazione tra il laser e l'atomo. Illuminando selettivamente gli atomi localizzati nei singoli siti reticolari, si può creare un registro quantistico di qubit inizializzati ai valori desiderati (Fig. 1.3 (a)).

Questo dispositivo laser può essere impiegato non solo per la codifica ma anche per realizzare una porta Hadamard per singolo qubit. Questo tipo di porta, alla base di qualunque algoritmo quantistico deterministico, agisce sulla combinazione generica  $(\alpha, \beta) = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$  nel modo seguente:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha - \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\alpha + \beta)|0\rangle + (\alpha - \beta)|1\rangle] \quad (1.4)$$

Per capire meglio come possa essere realizzata consideriamo di applicare questa operazione allo stato  $|0\rangle$ . Il risultato dell'operazione è lo stato  $\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$ , cioè una sovrapposizione degli stati  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  con uguale probabilità. Utilizzando un impulso  $\pi/2$ , cioè un impulso di durata  $t = 2\pi/\Omega_{01}$ , sugli atomi si ottiene un risultato analogo, a meno di un fattore di fase relativo costante.

Una volta inizializzati i qubit, questi possono essere manipolati con diverse tecniche con possono essere implementate ad esempio impiegando le *cold controlled collisions*. In un sistema atomico in un reticolo ottico, queste collisioni possono essere controllate semplicemente variando i parametri dei laser. Le cold controlled collisions consentono in linea di principio di implementare porte quantistiche a due qubit e l'efficiente creazione di stati entangled tra molti atomi [4].

## Capitolo 2

# Basi teoriche sulla duplicazione di frequenza e sui controlli automatici

In questo capitolo saranno introdotti alcuni elementi riguardanti la teoria dell'ottica non lineare e la teoria dei controlli automatici, utili per comprendere i passaggi sperimentali illustrati nel capitolo successivo. Come esposto nel capitolo precedente infatti, l'obiettivo è quello di realizzare un sistema laser ad una lunghezza d'onda di 578 nm che abbia delle prestazioni spettrali particolarmente elevate e questo è possibile combinando insieme questi due elementi. Dispositivi commerciali che emettono alla lunghezza d'onda desiderata sono i laser a colorante (dye laser) che però, oltre ad essere molto costosi, presentano problemi di gestione sia per quanto riguarda il controllo delle variabili da cui dipende la frequenza di emissione sia per quanto riguarda la manutenzione del dispositivo stesso, il cui mezzo attivo è costituito da una soluzione molto tossica.

I laser a stato solido sono invece dispositivi dai costi più contenuti e più facilmente gestibili per il miglioramento delle prestazioni spettrali, tuttavia hanno lunghezze d'onda di emissione tipiche maggiori di quelle richieste dall'esperimento. Grazie all'ottica non lineare, ed in particolare al fenomeno della duplicazione di frequenza, è però possibile impiegare questo tipo di dispositivi e in particolare i laser a diodo come alternativa ai laser a colorante. La luce gialla a 578 nm da impiegare per eccitare la transizione di orologio viene infatti generata a partire dalla radiazione infrarossa a 1156 nm emessa da un diodo laser a stato solido commerciale che viene duplicata in frequenza grazie alle proprietà di un cristallo non lineare inserito in una cavità ottica.

La teoria dei controlli automatici entra invece in gioco per migliorare le prestazioni spettrali del sistema laser. Un diodo laser infatti ha una larghezza

di riga tipica dell'ordine del MHz, quindi per ridurre la larghezza di emissione fino ai livelli richiesti è necessario impiegare dei sistemi di controllo che consentano di pilotare alcune variabili in modo che queste seguano un certo segnale di riferimento. Tanto migliore è la qualità e la stabilità di tali sistemi di controllo tanto più è possibile restringere la larghezza di emissione della radiazione laser, fino al limite di larghezza naturale di emissione, il cosiddetto limite di Schawlow-Townes, determinato dalle fluttuazioni quantistiche della fase del campo circolante nella cavità ottica del dispositivo laser [21].

## 2.1 Ottica non lineare

In questa sezione sarà fatta una breve introduzione ai fenomeni di ottica non lineare con particolare attenzione alla duplicazione di frequenza. Proprio grazie a questo fenomeno infatti è possibile generare radiazione laser gialla a 578 nm a partire dalla radiazione infrarossa a 1156 nm emessa da un *chip* laser a *quantum dot*.

### 2.1.1 Principi base di ottica non lineare

L'ottica non lineare studia i fenomeni dovuti alle variazioni delle proprietà ottiche di un mezzo in funzione di potenze superiori alla prima del campo elettrico che si propaga all'interno di esso. Formalmente, la polarizzazione  $P$  del mezzo si può scrivere, a partire dal campo elettrico scalare che vi si propaga:

$$\begin{aligned} P(t) &= P^{(1)}(t) + P^{(2)}(t) + P^{(3)}(t) + \dots = \\ &= \chi^{(1)}E(t) + \chi^{(2)}E^2(t) + \chi^{(3)}E^3(t) + \dots \end{aligned} \quad (2.1)$$

dove  $\chi^{(1)}$  è detta suscettività lineare e le  $\chi^{(i)}$  con  $i \neq 1$  sono le suscettività di ordine  $i$ -esimo. Vedremo come sono proprio le componenti di polarizzazione variabile nel tempo di ordine superiore al primo che danno origine a componenti aggiuntive del campo elettrico che oscillano a frequenza in generale diversa da quella del campo incidente. Per capire qualitativamente il fenomeno, consideriamo un campo incidente del tipo  $E(t) = E_1 \exp(-i\omega_1 t) + E_2 \exp(-i\omega_2 t) + c.c.$ . La polarizzazione al secondo ordine sarà quindi data da:

$$\begin{aligned}
 P^{(2)}(t) &= \chi^{(2)} E^2(t) = \\
 &= \chi^{(2)} (|E_1|^2 e^{-i2\omega_1 t} + |E_2|^2 e^{-i2\omega_2 t} + 2E_1^* E_2 e^{i(\omega_1 + \omega_2)t} + \\
 &\quad + E_1 E_2^* e^{i(\omega_1 - \omega_2)t} + c.c.) + 2\chi^{(2)} (|E_1|^2 + |E_2|^2)
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

In questa equazione si possono individuare tre tipi di termini:

- termini oscillanti ad una frequenza doppia rispetto alla radiazione incidente: è il fenomeno di generazione di seconda armonica (SHG).
- Termini oscillanti a frequenza data dalla somma e differenza delle frequenze del campo incidente: sono i fenomeni di generazione di frequenza somma e differenza (rispettivamente SFG e DFG).
- Un termine costante non oscillante: è il fenomeno della rettificazione ottica.

Passiamo adesso ad una introduzione più formale dell'argomento [22]. Supponiamo di poter scrivere il vettore campo elettrico totale come somma di varie componenti in frequenza:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \sum_n \mathbf{A}(\omega_n) e^{i(\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r} - \omega_n t)} \\
 &= \sum_n \mathbf{E}(\omega_n) e^{-i\omega_n t}
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

dove  $A(\omega_n)$  è l'ampiezza della componente del campo a frequenza  $\omega_n$ . Introducendo poi una notazione analoga per la polarizzazione:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \sum_n \mathbf{P}(\omega_n) e^{-i(\omega_n t)} \tag{2.4}$$

possiamo allora definire le componenti del tensore suscettività del secondo ordine  $\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_n + \omega_m, \omega_n, \omega_m)$  come le costanti di proporzionalità tra l'ampiezza della polarizzazione non lineare e il prodotto delle ampiezze del campo secondo la relazione:

$$P_i(\omega_n + \omega_m) = \sum_{jk} \sum_{(mn)} \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_n + \omega_m, \omega_n, \omega_m) E_j(\omega_n) E_k(\omega_m) \tag{2.5}$$

dove gli indici  $ijk$  si riferiscono agli assi cartesiani e la somma  $(mn)$  è tale che il valore  $\omega_n + \omega_m$  è fisso mentre le singole componenti  $\omega_n$  e  $\omega_m$  sono libere di

variare. Se andiamo ora a considerare l'interazione di tre onde di frequenza  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  e  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ , per determinare le polarizzazioni  $\mathbf{P}(\omega_i)$  con  $i = 1, 2, 3$  dobbiamo determinare i sei tensori:

$$\begin{array}{ccc} \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_1, \omega_3, -\omega_2) & \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_1, -\omega_2, -\omega_3) & \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_2, \omega_3, -\omega_1) \\ \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_2, -\omega_1, \omega_3) & \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_3, \omega_1, \omega_2) & \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_3, \omega_2, \omega_1) \end{array}$$

e altri sei tensori in cui  $\omega_i \rightarrow -\omega_i$  e  $-\omega_i \rightarrow \omega_i$ . Sono quindi dodici tensori con 27 componenti per un totale di 326 numeri complessi da determinare. Per ridurre il numero di incognite è possibile sfruttare le numerose simmetrie di questi tensori (realtà di campi e polarizzazione, simmetria di permutazione intrinseca, simmetria di permutazione totale e simmetria di Kleinmann [22]). Introducendo una nuova notazione in cui:

$$d_{ijk} = \frac{1}{2} \chi_{ijk}^{(2)} \quad (2.6)$$

la (2.5) può essere riscritta come:

$$P_i(\omega_n + \omega_m) = \sum_{jk} \sum_{(nm)} 2d_{ijk} E_j(\omega_n) E_k(\omega_m) \quad (2.7)$$

Tenendo conto delle simmetrie precedentemente espote, possiamo introdurre la notazione contratta  $d_{il}$ , con le seguenti corrispondenze:

$$\begin{array}{cccccc} jk : & 11 & 22 & 33 & 23, 32 & 31, 13 & 12, 21 \\ l : & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}$$

La matrice  $d_{il}$  è una matrice  $3 \times 6$ . Applicando sistematicamente la simmetria di Kleinmann si trova che può essere scritta come:

$$d_{il} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{16} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{12} \\ d_{15} & d_{24} & d_{33} & d_{23} & d_{13} & d_{14} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

con solamente dieci incognite indipendenti, che possono essere ulteriormente ridotte con considerazioni sulla simmetria spaziale del cristallo.

Vediamo ora di capire come la polarizzazione possa essere fonte di componenti del campo elettrico aggiuntive. Il punto di partenza sono le equazioni di Maxwell. Supponiamo ora di porci in una regione di spazio in cui non ci siano cariche libere né correnti ( $\rho = 0$ ,  $\mathbf{J} = 0$ ) e che il mezzo sia amagnetico ( $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ ) e ricordiamo inoltre che  $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ , dove il vettore polarizzazione  $\mathbf{P}$  è dato dalla (2.1). Si può mostrare [22] che, manipolando le equazioni di Maxwell e separando  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{P}$  nelle loro componenti lineare e non lineare

è possibile scrivere una nuova equazione delle onde per ogni componente del campo a frequenza  $\omega_n$ :

$$\nabla^2 \mathbf{E}_n - \frac{\epsilon^{(1)}(\omega_n)}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}_n}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}_n^{(NL)}}{\partial t^2} \quad (2.9)$$

dove  $\epsilon^{(1)}(\omega_n)$  è la costante di proporzionalità che lega la componente lineare a frequenza  $\omega_n$  di  $\mathbf{D}$  alla componente lineare a frequenza  $\omega_n$  di  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{P}_n^{(NL)}$  è la componente non lineare della polarizzazione. Da questa equazione si vede che la risposta non lineare del mezzo agisce come un termine di sorgente di campo elettromagnetico. In particolare una polarizzazione del tipo (2.11) generata dalla risposta non lineare del mezzo alla radiazione incidente dà luogo al fenomeno di generazione di seconda armonica grazie all'equazione delle onde (2.9).

### 2.1.2 Generazione di seconda armonica

Andremo ora a vedere come sia possibile descrivere quantitativamente il processo non lineare di generazione di seconda armonica. In questo caso l'equazione (2.7) può essere riscritta, in forma matriciale esplicitando la costante dielettrica del vuoto  $\epsilon_0$ , come:

$$\mathbf{P}(2\omega) = 2\epsilon_0 \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x^2(\omega) \\ E_y^2(\omega) \\ E_z^2(\omega) \\ 2E_y(\omega)E_z(\omega) \\ 2E_x(\omega)E_z(\omega) \\ 2E_x(\omega)E_y(\omega) \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Fissata la geometria (cioè per direzione di propagazione e polarizzazione del campo elettrico fissate), si può mostrare [22] che la relazione che lega la polarizzazione oscillante a frequenza  $2\omega$  al campo oscillante a frequenza  $\omega$  può essere scritta come una relazione di tipo scalare:

$$P(2\omega) = 2d_{eff}E^2(\omega) \quad (2.11)$$

dove  $d_{eff}$  è un coefficiente non-lineare scalare. Ad esempio per il Niobato di Litio si ha che gli unici elementi  $d_{il}$  non nulli sono  $d_{15} = d_{24} = d_{31} = d_{32} = -5.9 \text{ pm/V}$  e  $d_{33} = -34 \text{ pm/V}$  [23]. Considerando un campo incidente polarizzato linearmente lungo la direzione  $z$  si avrebbe una relazione del tipo (2.11) con  $E(\omega) = E_z(\omega)$  e  $d_{eff} = d_{33}/\epsilon_0$  (maggiore di un fattore 5 rispetto

a quello che si avrebbe con un campo polarizzato lungo le altre direzioni spaziali).

Supponiamo ora che un cristallo di lunghezza  $L$  dotato di un coefficiente non lineare efficace  $d_{eff}$  non nullo e supposto senza perdite affinché sia valida la simmetria di permutazione totale sia investito da un'onda di frequenza  $\omega_1 = \omega$  viaggiante lungo la direzione  $z$ . Per quanto visto nella sezione precedente all'interno del mezzo si genera una seconda componente del campo elettrico oscillante ad una frequenza  $\omega_2 = 2\omega$ . Il campo totale nel mezzo è quindi dato da:

$$\tilde{E}(z, t) = \tilde{E}_1(z, t) + \tilde{E}_2(z, t) \quad (2.12)$$

dove ciascun termine è della forma:

$$\tilde{E}_j(z, t) = A_j(z)e^{i(k_j z - \omega_j t)} + c.c. \quad j = 1, 2 \quad (2.13)$$

in cui  $k_j = n_j \omega_j / c$ ,  $n_j = [\epsilon^{(1)}(\omega_j)]^{1/2}$  e  $A_j(z)$  è l'ampiezza. Supponiamo inoltre che ciascuna componente del campo totale obbedisca all'equazione delle onde (2.9) in forma scalare. Consideriamo ora anche la polarizzazione non lineare come somma di componenti a frequenze diverse:

$$\tilde{P}^{(NL)}(z, t) = \tilde{P}_1(z, t) + \tilde{P}_2(z, t) \quad (2.14)$$

dove:

$$\tilde{P}_j(z, t) = P_j(z)e^{-i\omega_j t} + c.c. \quad j = 1, 2 \quad (2.15)$$

Si può mostrare [22] che nell'approssimazione di ampiezza lentamente variabile ( $|d^2 A_j / dz^2| \ll |k_j dA_j / dz|$ ), dall'equazione delle onde (2.9) si possono ricavare le seguenti equazioni per le ampiezze dei campi:

$$\frac{dA_1}{dz} = \frac{8\pi i \omega_1^2 d_{eff}}{k_1 c^2} A_2 A_1^* e^{-i\Delta k z} \quad (2.16)$$

$$\frac{dA_2}{dz} = \frac{4\pi i \omega_2^2 d_{eff}}{k_2 c^2} A_1^2 e^{i\Delta k z} \quad (2.17)$$

dove  $\Delta k = 2k_1 - k_2$  è detto *mismatch* del vettore d'onda. Notiamo che questa quantità può essere diversa da zero in quanto il modulo dei due vettori d'onda dipende anche dall'indice di rifrazione che in generale sarà diverso per le frequenze  $\omega$  e  $2\omega$ . Tenendo conto del fatto che le ampiezze sono legate alle rispettive intensità dalla relazione  $I_j = \frac{n_j c}{2\pi} |A_j|^2$  e della conservazione dell'energia, per cui si ha che  $I_{tot} = I_1 + I_2$ , possiamo introdurre delle nuove

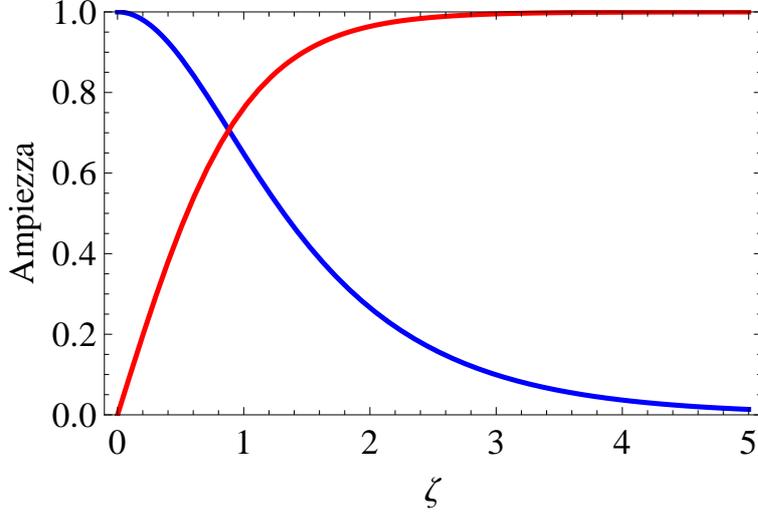


Figura 2.1: Andamento delle ampiezze adimensionalizzate  $u_1$  (in blu) e  $u_2$  (in rosso) in funzione di  $\zeta$ .

variabili  $u_1(x)$  e  $u_2(x)$ , tali che  $u_1(x)^2 + u_2(x)^2 = 1$ , legate alle ampiezze dalla relazione:

$$A_j = \left( \frac{2\pi I_{tot}}{n_j c} \right)^{1/2} u_j e^{i\phi_j} \quad (2.18)$$

A partire dalle equazioni (2.16) e (2.17) è possibile ricavare [22] delle equazioni per le ampiezze adimensionalizzate  $u_1$  e  $u_2$ , che, nelle ipotesi di mismatch nullo e di campo incidente dato dalla sola radiazione a frequenza  $\omega$ , assumono la forma:

$$\frac{du_1}{d\zeta} = -u_1 u_2 \quad (2.19)$$

$$\frac{du_2}{d\zeta} = u_1^2 \quad (2.20)$$

dove  $\zeta = z/l$  in cui  $l = \left( \frac{n_1^2 n_2 c^3}{2\pi I_{tot}} \right)^{1/2} \frac{1}{8\pi\omega_1 d}$  è la distanza caratteristica su cui i campi cambiano energia. Le soluzioni a queste equazioni possono essere trovate sfruttando nuovamente la proprietà  $u_1^2 + u_2^2 = 1$  e sono della forma:

$$u_2(\zeta) = \tanh \zeta \quad (2.21)$$

e

$$u_1(\zeta) = \operatorname{sech} \zeta \quad (2.22)$$

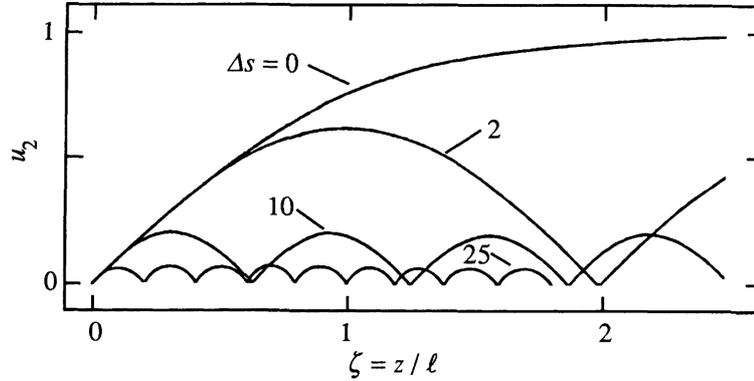


Figura 2.2: Andamento dell'ampiezza del campo di seconda armonica in funzione della posizione spaziale per diversi valori del mismatch  $\Delta s = \Delta kl$ . Figura tratta da [22].

In Fig. 2.1 sono mostrate graficamente le soluzioni precedenti: è chiaro come in caso di assenza di perdite tutta la radiazione incidente, la cui ampiezza ha un andamento descritto dalla curva in blu, venga convertita in radiazione di seconda armonica, rappresentata dalla curva rossa, nel limite  $\zeta \rightarrow \infty$ . Ricordiamo che tali soluzioni sono state derivate per il caso  $\Delta k = 0$ . Le soluzioni per un  $\Delta k$  generico possono essere espresse in termini di integrali ellittici [25]. L'andamento di tali soluzioni è rappresentato in Fig. 2.2. Come si può vedere per valori diversi da zero del mismatch l'ampiezza del campo di seconda armonica presenta un andamento oscillatorio con frequenza crescente e ampiezza decrescente al crescere del valore del mismatch.

### 2.1.3 Condizione di *quasi-phase-matching*

Come si è detto, il processo di SHG è tanto più efficiente tanto più piccolo è il valore del mismatch  $\Delta k = 2k_1 - k_2$ . Al fine di massimizzare l'efficienza è quindi opportuno cercare di raggiungere la condizione di phase matching, il che equivale alla condizione:

$$n(\omega) = n(2\omega) \quad (2.23)$$

requisito che non può essere soddisfatto nel caso tipico dei cristalli che presentano un indice di rifrazione monotono crescente in  $\omega$ . Per risolvere il problema ed ottenere la condizione di phase matching si può pensare di utilizzare cristalli birifrangenti, ovvero cristalli che presentano indici di rifrazione, detti ordinario e straordinario, differenti per direzioni ortogonali di polarizzazione della radiazione. Luce polarizzata parallelamente al piano contenente l'asse

ottico del sistema e il vettore d'onda incidente vede l'indice di rifrazione ordinario, mentre luce con polarizzazione ortogonale vede l'indice di rifrazione straordinario. La condizione di phase matching può essere in questo caso raggiunta facendo in modo che la radiazione incidente e di seconda armonica si propaghino nel mezzo con direzioni di polarizzazione ortogonali fra loro. La birifrangenza, cioè la differenza tra l'indice di rifrazione ordinario e quello straordinario, può essere controllata ad esempio variando l'angolo di incidenza, dato che l'indice di rifrazione straordinario dipende dall'angolo di incidenza mentre l'indice ordinario rimane costante. Angoli diversi da  $0$  e  $90^\circ$  portano tuttavia le direzioni ordinaria e straordinaria a divergere, quindi è preferibile fissare l'angolo di incidenza e variare la temperatura, fattore che influenza fortemente la birifrangenza. Lo sfruttamento della birifrangenza presenta tuttavia due importanti aspetti negativi:

- In molti casi i cristalli birifrangenti impiegati per la duplicazione di frequenza non presentano una birifrangenza tale da soddisfare la condizione (2.23), perciò ci sono intervalli di frequenze per cui il phase matching è impossibile da raggiungere.
- Imporre che la radiazione a frequenza doppia abbia polarizzazione ortogonale a quella della fondamentale diminuisce l'efficienza del processo di SHG rispetto al caso in cui le due radiazioni abbiano stessa direzione di polarizzazione.

Nel caso in cui non sia possibile raggiungere la condizione di phase matching, si impiega la tecnica del *quasi-phase-matching*, si impiega cioè un cristallo non lineare (detto *periodically poled*) dotato di struttura periodica in cui il coefficiente non-lineare responsabile della SHG  $d_{eff}$  cambia di segno con periodicità spaziale (chiamata periodo di *poling*)  $\Lambda$ . Questa alternanza periodica del segno di  $d_{eff}$  riesce a compensare, in media, un mismatch dei vettori d'onda diverso da zero.

La natura di questo effetto è illustrata in Fig. 2.3. La curva (a) della figura mostra che nel caso di perfetto phase matching l'ampiezza del campo di seconda armonica generato cresce linearmente con la distanza. La curva (c) illustra invece il caso di mismatch diverso da zero: l'ampiezza del campo di seconda armonica oscilla periodicamente passando da un massimo ad un minimo su una distanza pari a due lunghezze di coerenza ( $L_{coh}$ ), cioè la distanza dopo la quale il campo di seconda armonica viene generato in opposizione di fase rispetto a quello generato inizialmente, per cui si ha una condizione di interferenza distruttiva e una riduzione dell'intensità. Infine la curva (b) è relativa al caso di quasi-phase-matching assumendo come periodo di poling

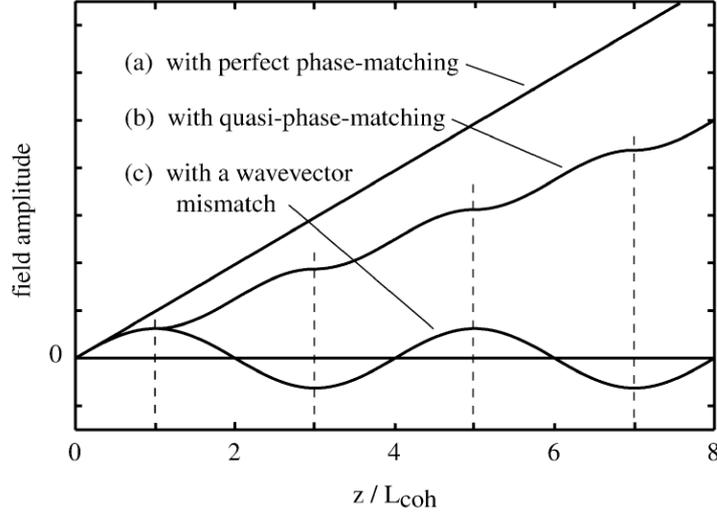


Figura 2.3: Ampiezza del campo di seconda armonica in funzione della posizione spaziale per diversi tipi di phase-matching. Figura tratta da [22].

$\Lambda = 2L_{coh}$ : ogni volta che l'ampiezza del campo di seconda armonica tende a decrescere per effetto del mismatch, l'inversione del segno di  $d_{eff}$  fa sì che questa invece continui a crescere in maniera monotona. Si può pensare infatti che quando  $d_{eff}$  cambia di segno, il campo a frequenza  $2\omega$  venga emesso in controfase rispetto a quello alla frequenza fondamentale e in questo modo si recupera il mismatch con le onde generate dai dipoli precedenti.

Diamo ora una breve descrizione matematica del quasi-phase-matching. Indichiamo con  $d(z)$  la dipendenza spaziale del coefficiente non lineare che può essere rappresentata con una funzione ad onda quadra:

$$d(z) = d_{eff} \text{sign}(\cos 2\pi z / \Lambda) \quad (2.24)$$

Questa può essere scritta in termini di una serie di Fourier come:

$$d(z) = d_{eff} \sum_{m=-\infty}^{\infty} G_m e^{ik_m z} \quad (2.25)$$

dove  $k_m = 2\pi m / \Lambda$  è il vettore legato alla periodicità di modulazione del poling dell' $m$ -esima componente di Fourier di  $d(z)$ , e si può mostrare che  $G_m = (2/m\pi) \sin(m\pi/2)$ . Data la dipendenza spaziale (2.24) del coefficiente non lineare le equazioni (2.16) e (2.17) assumono la forma:

$$\frac{dA_1}{dz} = \frac{2i\omega_1 d_Q}{n_1 c} A_2 A_1^* e^{-i(\Delta k_Q - 2k_m)z} \quad (2.26)$$

$$\frac{dA_2}{dz} = \frac{2i\omega_2 d_Q}{n_2 c} A_1^2 e^{i\Delta k_Q z} \quad (2.27)$$

dove  $d_Q = d_{eff} G_m$  e  $\Delta k_Q = 2k_1 - k_2 + k_m$  è il mismatch del vettore d'onda per l'ordine  $m$ . A causa del fatto che  $d_Q$  decresce al crescere del valore di  $m$ , è preferibile ottenere il quasi-phase-matching con un'interazione al primo ordine ( $m = 1$ )<sup>1</sup>, per cui si ha:

$$\Delta k_Q = 2k_1 - k_2 + 2\pi/\Lambda, \quad \text{e} \quad d_Q = d_{eff} \frac{2}{\pi} \quad (2.28)$$

Uguagliando a zero la prima di queste relazioni si ha che:

$$\Lambda = 2L_c = \frac{2\pi}{(2k_1 - k_2)} \quad (2.29)$$

A partire dagli indici di rifrazione per le frequenze  $\omega$  e  $2\omega$  si possono calcolare i vettori d'onda  $k_1$  e  $k_2$  e grazie alla (2.29) è quindi possibile determinare il periodo di poling ideale.

#### 2.1.4 Generazione di seconda armonica in cavità

Anche nelle condizioni di phase matching o di quasi-phase-matching, l'efficienza del processo di duplicazione di frequenza può risultare comunque bassa, quindi spesso si inserisce il cristallo non lineare in una cavità risonante in modo da aumentare la potenza incidente istantaneamente su di esso. In questo modo si può raggiungere una buona efficienza nel processo di duplicazione. A seconda della finesse (vedi sezione 3.2) della cavità il fattore di incremento di potenza può raggiungere valori vicini a 100. Andremo ora a calcolare i modi propri di una cavità ad anello in configurazione detta *symmetrical bow-tie* (Fig. 2.4), composta da quattro specchi, due piani e due curvi. Gli specchi curvi hanno stesso raggio di curvatura perciò il sistema è simmetrico rispetto ad un piano verticale passante a metà fra questi. Consideriamo ora un fascio gaussiano che si propaga lungo la direzione  $z$  di intensità:

$$I(r, z) = I_0 \left( \frac{w_0}{w(z)} \right)^2 \exp \left( \frac{-2r^2}{w^2(z)} \right) \quad (2.30)$$

dove  $r$  è la coordinata radiale,  $I_0$  è l'intensità nel punto  $(0, 0)$  e  $w(z) = w_0 \sqrt{1 + (z/z_R)^2}$  è il raggio del fascio nel punto  $z$ . Il parametro  $w_0$  è detto waist del fascio e corrisponde al raggio minimo del fascio che si ha per  $z = 0$ ,

<sup>1</sup>Questo è possibile fino a lunghezze d'onda minime dell'ordine di 400-500 nm, non inferiori.

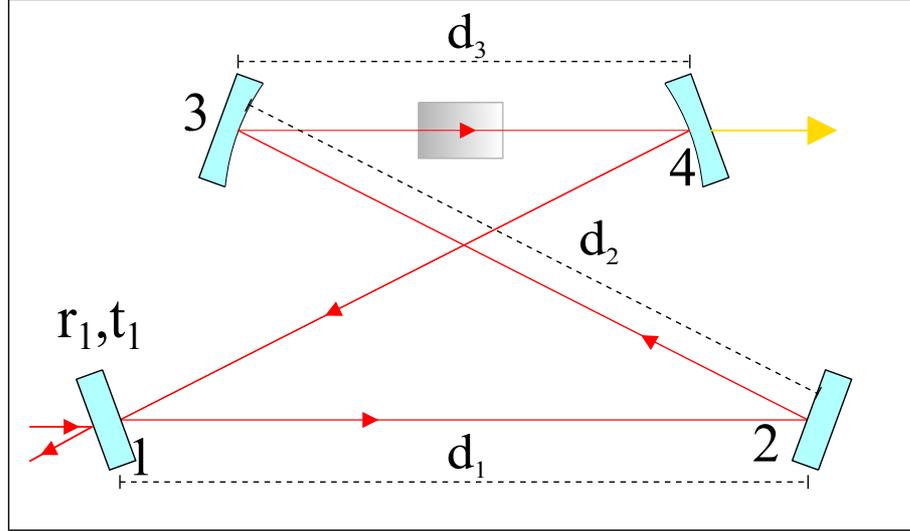


Figura 2.4: Schema di una cavità ad anello *symmetrical bow-tie*: gli specchi 3 e 4 hanno stesso raggio di curvatura, mentre gli specchi 1 e 2 sono piani. Il rettangolo in grigio tra i due specchi curvi rappresenta un elemento dispersivo che tiene conto di tutte le perdite della cavità tranne quelle sullo specchio 1. In figura sono mostrati anche i coefficienti di riflessione e trasmissione dello specchio di ingresso.

mentre il parametro  $z_R$  è detto lunghezza di Rayleigh, ed è la distanza da  $z = 0$  per cui il raggio del fascio assume il valore  $\sqrt{2}w_0$ . Si può dimostrare [24] che la lunghezza di Rayleigh e il waist del fascio tra i due specchi piani sono dati da:

$$z_R^{(up)} = -\frac{Im[q_1]}{|q_1|^2} = R \frac{\sqrt{g_1 g_2 (1 - g_1 g_2)}}{2g_1} \quad (2.31)$$

$$w_0^{2(up)} = \frac{\lambda}{n\pi} z_R^{(up)} = \frac{\lambda R \sqrt{g_1 g_2 (1 - g_1 g_2)}}{2\pi n g_1} \quad (2.32)$$

dove  $R$  è il raggio di curvatura degli specchi e  $g_1 = 1 - \frac{d_1 + 2d_2}{R}$ ,  $g_2 = 1 - \frac{d_3}{R}$  sono variabili adimensionali in cui  $d_1, d_2, d_3$  sono i cammini ottici rispettivamente tra i due specchi piani, diagonale tra uno specchio piano e uno curvo e tra i due specchi curvi (Fig. 2.4). Le stesse quantità fra gli specchi 3 e 4 sono invece date da:

$$z_R^{(down)} = R \frac{\sqrt{g_1 g_2 (1 - g_1 g_2)}}{2g_2} \quad (2.33)$$

$$w_0^{2(down)} = \frac{\lambda R \sqrt{g_1 g_2 (1 - g_1 g_2)}}{2\pi n g_2} \quad (2.34)$$

Notiamo dalle relazioni precedenti che esiste una semplice relazione fra i due waist:

$$\frac{\omega_0^{2(up)}}{\omega_0^{2(down)}} = \sqrt{\frac{g_2}{g_1}} \quad (2.35)$$

Inoltre è possibile dimostrare [24] che le frequenze di risonanza della cavità sono date dalla relazione:

$$\nu_{nmq} = \frac{c}{L} \left( q + (n + m + 1) \frac{\cos^{-1}(\pm \sqrt{g_1 g_2})}{\pi} \right) \quad (2.36)$$

dove  $n, m, q$  sono numeri naturali ed in particolare  $q$  è legato ai modi longitudinali (modi  $TEM_{00}$ ) mentre  $m$  e  $n$  ai modi trasversi della cavità (modi  $TEM_{nm}$ ). Si definisce *free spectral range* (FSR) la spaziatura fra due valori di  $q$ , cioè tra due modi longitudinali, ed è quindi dato da:

$$FSR = \frac{c}{L} \quad (2.37)$$

Facciamo ora qualche considerazione energetica sul risonatore ottico. Per semplicità supponiamo che tutti gli specchi della cavità, ad eccezione dell'accoppiatore in ingresso (specchio 1), abbiano una riflettività del 100%. Assumiamo inoltre che riflessione e trasmissione dagli specchi non siano affetti da perdite e consideriamo la presenza di un mezzo dissipativo, caratterizzato da un coefficiente di trasmissione  $t$ , posto nella cavità fra i due specchi curvi. Indicando con  $r_1$  e  $t_1$ , con  $r_1^2 + t_1^2 = 1$ , i coefficienti di riflessione e trasmissione dell'accoppiatore in ingresso e con  $E_0$  il campo in ingresso si ha che il campo riflesso dalla cavità è dato dall'espressione:

$$\begin{aligned} E_r &= -E_0 r + E_0 t t_1^2 e^{-i\delta} + E_0 t^2 t_1^2 r_1 e^{2i\delta} + \dots = \\ &= -E_0 r + E_0 t t_1^2 e^{-i\delta} (1 + t r_1 e^{-i\delta} + \dots) = E_0 \frac{t e^{-i\delta} - r_1}{1 - r_1 t e^{-i\delta}} \end{aligned} \quad (2.38)$$

dove  $\delta$  rappresenta lo sfasamento corrispondente a un giro in cavità, mentre il campo circolante in cavità è dato da:

$$\begin{aligned} E_c &= E_0 t_1 + E_0 t r_1 t_1 e^{-i\delta} + E_0 r_1^2 t^2 t_1 e^{-2i\delta} + \dots = \\ &= E_0 t_1 + E_0 t r_1 t_1 e^{-i\delta} (1 + r_1 t e^{-i\delta}) = E_0 \frac{t_1}{1 - r_1 t e^{-i\delta}} \end{aligned} \quad (2.39)$$

Utilizzando poi la relazione che lega l'intensità al campo  $\frac{I_{r,c}}{I_0} = \left| \frac{E_{r,c}}{E_0} \right|^2$  si ottengono le equazioni per le intensità riflessa e circolante:

$$I_r = I_0 \frac{(r_1 - t)^2 + 4r_1 t \sin^2 \delta/2}{(1 - r_1 t)^2 + 4r_1 t \sin^2 \delta/2} \quad (2.40)$$

$$I_c = I_0 \frac{t_1^2}{(1 - r_1 t)^2 + 4r_1 t \sin^2 \delta/2} \quad (2.41)$$

Se consideriamo la fase  $\delta$  come una variabile indipendente legata alla lunghezza della cavità e analizziamo il comportamento dell'intensità al variare di  $\delta$  si osserva che le intensità sono funzioni periodiche di  $\delta$  con periodo  $2\pi$ . Inoltre dall'equazione (2.41) si vede che l'intensità del campo circolante in cavità è massima alla risonanza, ovvero per  $\delta = 0$ . Inoltre in analogia ad una rete elettrica, si definisce la condizione di *impedance matching* come quella per cui si ha potenza circolante massima in cavità. Per determinare quantitativamente le condizioni di impedance matching consideriamo che la frazione di campo elettrico che resta dopo un giro in cavità, escludendo la trasmissione dell'accoppiatore d'ingresso, è  $t^2$  e definiamo con  $L$  la potenza persa in un giro sempre trascurando la trasmissione attraverso lo specchio d'ingresso. Si avrà che:

$$L + t^2 = 1 \quad (2.42)$$

Differenziando l'espressione di  $I_c$  alla risonanza rispetto ad  $r_1$  ed uguagliando a zero si trova che il massimo della potenza circolante si ha per  $r_1 = t$ , condizione che implica anche  $I_r = 0$ . Sfruttando la proprietà  $r_1^2 + t_1^2 = 1$  e invertendo la (2.42), si ha che  $r_1 = t$  implica che la condizione di impedance matching è:

$$L = t_1^2 \quad (2.43)$$

che significa che una cavità è impedance matched quando il coefficiente di trasmissione dello specchio di accoppiamento in ingresso è uguale alla somma di tutte le altre perdite, escluse quelle su di esso. Questa relazione vale anche nel caso generico in cui vi siano altri tipi di perdite, per esempio uno specchio di uscita con riflettività  $< 100\%$ .

Per avere quindi la massima efficienza di conversione sarà necessario scegliere lo specchio di accoppiamento in ingresso in modo tale da soddisfare le condizione di impedance matching ed avere la massima intensità circolante in cavità e sarà necessario posizionare gli specchi in modo tale che la focalizzazione all'interno del cristallo sia ottimale (vedi sezione 3.2).

## 2.2 Teoria dei controlli automatici

In questa sezione sarà introdotta la teoria dei controlli automatici alla base dei dispositivi che consentono di agganciare il laser ad un discriminatore di frequenza (nel nostro caso una cavità ottica) grazie ad un opportuno segnale d'errore. L'impiego di tali dispositivi è fondamentale infatti per stringere la larghezza di riga di un laser: questi consentono infatti di correggere le fluttuazioni in frequenza del laser agendo su degli attuatori che forniscono una retroazione, in modo da riportare il segnale in ingresso al livello di riferimento.

### 2.2.1 Concetti fondamentali

Si definiscono controlli automatici quei dispositivi (detti *regolatori*, *controllori* o *dispositivi di controllo*) mediante i quali si fanno variare le grandezze liberamente manipolabili di un sistema (detto *sistema controllato*) in modo che subisca l'evoluzione nel tempo più vicina a quella desiderata.

Un sistema è un complesso in cui si possono individuare grandezze soggette a variare nel tempo e le funzioni che descrivono l'andamento temporale di tali variabili sono dette *segnali*. Di regola nei sistemi l'evoluzione di alcune variabili dipende dall'evoluzione di altre variabili: di conseguenza le variabili possono essere suddivise in variabili d'ingresso (o indipendenti) e variabili di uscita (o dipendenti). Nei sistemi soggetti a controllo, le variabili di ingresso si suddividono a loro volta in variabili manipolabili se possono essere controllate con un opportuno attuatore e variabili non manipolabili (o disturbi) che sono variabili sul cui andamento temporale non è possibile influire in alcun modo.

Tipicamente per il progetto di un dispositivo di controllo è necessario sviluppare un modello matematico del sistema, cioè un insieme di equazioni e di parametri che permettono di calcolare l'andamento delle uscite in funzione dell'andamento degli ingressi. Nel progetto è spesso importante tenere conto del comportamento dinamico del sistema, quindi i modelli matematici adottati sono tipicamente dei modelli dinamici.

Nel seguito saranno considerati modelli matematici lineari, cioè modelli per cui a un segnale in ingresso del tipo  $k_1x_1(t) + \dots + k_nx_n(t)$  corrisponde un segnale in uscita del tipo  $k_1y_1(t) + \dots + k_ny_n(t)$ , dove  $y_i(t)$  sono i segnali in uscita corrispondenti ai segnali in ingresso  $x_i(t)$  e le  $k_i$  sono costanti reali. Questa proprietà è anche chiamata *principio di sovrapposizione dei segnali*. Un sistema che non soddisfa il principio di sovrapposizione dei segnali si dice non lineare, anche se è importante notare che in molti casi si possono utilizzare modelli matematici lineari per descrivere sistemi non perfettamente

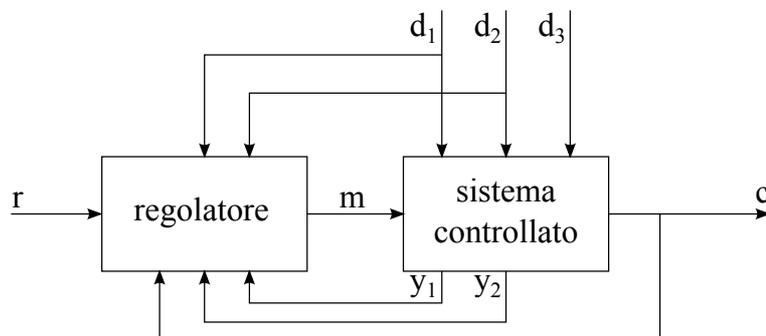


Figura 2.5: Connessione di un regolatore e di un sistema a una sola variabile controllata. Sul sistema e sul regolatore agiscono i disturbi  $d$ .

lineari eseguendo una linearizzazione locale e a patto che i valori delle variabili non escano da determinati campi.

Un'ulteriore distinzione tra modelli matematici riguarda la stazionarietà. In particolare un sistema si dice *stazionario* se soddisfa la *proprietà di traslazione nel tempo di cause e effetti*, cioè se dato un insieme di variabili in ingresso  $x_1(t - \tau), \dots, x_m(t - \tau)$  traslate nel tempo di una costante reale positiva  $\tau$  a queste corrispondono delle variabili in uscita  $y_1(t - \tau), \dots, y_m(t - \tau)$  traslate nel tempo della stessa quantità. Viceversa, un modello che non soddisfa la proprietà di traslazione nel tempo di cause e effetti si dice non stazionario.

### 2.2.2 Controlli ad azione diretta e in retroazione

Consideriamo ora un tipo particolare di sistemi caratterizzati dall'aver una sola variabile, detta variabile *controllata*, sul cui andamento temporale si vuole andare ad influire mediante un regolatore. Ciò si ottiene connettendo (Fig. 2.5) il regolatore in modo che agisca su una variabile manipolabile  $m$  che consente al regolatore di compiere la sua funzione attraverso un *attuatore*, cioè un dispositivo in grado di modificare la variabile  $m$  proporzionalmente ad un segnale fornito dal regolatore dato dalla variazione di una grandezza fisica adatta per la trasmissione a distanza di informazioni (ad esempio una tensione). Al regolatore giungono informazioni sulla variabile controllata  $c$  e sulle altre variabili del sistema attraverso dei *trasduttori*, cioè dispositivi che misurano una grandezza fisica e la convertono in un'altra adatta ad essere trasmessa a distanza. Un'altra informazione che giunge al regolatore è data dalla *variabile di riferimento* o *segnale di riferimento*  $r$  che ne condiziona l'influenza sulla variabile controllata  $c$ .

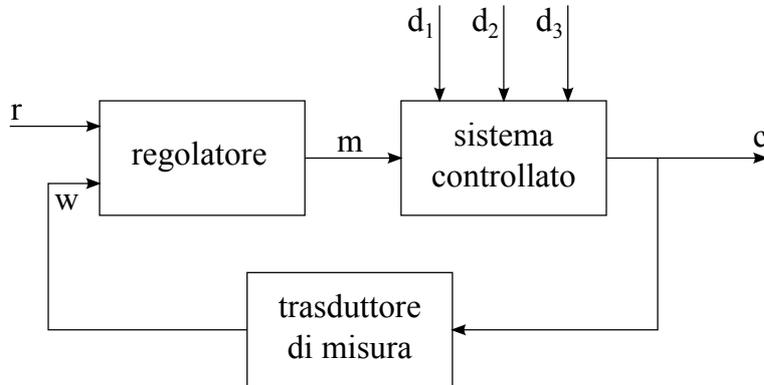


Figura 2.6: Schema a blocchi di un sistema in retroazione.

Negli apparati di controllo più semplici e diffusi, l'obiettivo della regolazione è l'inseguimento della variabile di riferimento, cioè l'ottenimento della proporzionalità istante per istante di  $c$  a  $r$ . Un apparato ideale soddisfa quindi la condizione:

$$c(t) = K_c r(t) \quad (2.44)$$

in cui  $K_c$  è una costante dell'apparato di regolazione detta *costante di controllo*. Nella pratica, per l'inerzia del sistema controllato che non può seguire un segnale di riferimento che presenti variazioni troppo rapide o addirittura discontinuità, la (2.44) è soddisfatta a meno di un errore che può essere riferito all'ingresso o all'uscita definito da:

$$e_i(t) = r(t) - \frac{1}{K_c} c(t) \quad \text{oppure} \quad e_u(t) = K_c r(t) - c(t) \quad (2.45)$$

Le specifiche che definiscono la qualità di un apparato di controllo si riferiscono spesso all'andamento nel tempo dell'errore e al suo valore in regime stazionario. Se il regolatore opera utilizzando oltre al segnale di riferimento  $r$  solo informazioni che riguardano ingressi del sistema controllato il controllo si dice ad *azione diretta* (o *feed forward*); se invece esso opera utilizzando oltre a  $r$  solo informazioni che riguardano la variabile controllata  $c$  e le altre uscite del sistema controllato, il controllo si dice in *retroazione* (o *feedback*).

Nei controlli ad azione diretta il valore della variabile manipolabile viene determinato all'interno del regolatore basandosi su un modello matematico del sistema controllato senza operare alcuna verifica sulla rispondenza del valore della variabile controllata.

Nei controlli in retroazione invece, il valore della variabile manipolabile dipende dal valore della variabile controllata e da quelli di altre variabi-

li dipendenti del sistema controllato, per cui è sempre presente almeno un percorso di segnale chiuso (*anello di retroazione*): il valore della variabile manipolabile viene determinato in seguito ad una misura della variabile controllata e alla verifica della sua rispondenza alla (2.44). La retroazione si dice *negativa* quando, immaginando di sezionare in un punto l'anello, una perturbazione del segnale a valle viene riportata a monte del sezionamento con segno opposto, *positiva* se con segno concorde. Tuttavia la reazione positiva non presenta interesse nell'ambito dei controlli perché di regola corrisponde ad un comportamento instabile.

Come vedremo nelle prossime sezioni, rispetto al controllo ad azione diretta, il controllo in retroazione presenta una maggiore robustezza dell'azione di regolazione in rapporto al fatto che il sistema sia incerto a causa della presenza di disturbi e variazioni dei parametri. In particolare la retroazione è tanto più efficace quanto più alto è il *guadagno di anello*, cioè la costante che caratterizza il trasferimento di segnale in condizioni di regime stazionario lungo l'anello di reazione supposto aperto in un qualunque suo punto. Tuttavia se il guadagno di anello è troppo elevato si rischia di avere un comportamento instabile in presenza di transitori e il sistema anziché avvicinarsi alla nuova condizione stazionaria si allontana da essa. Per migliorare il comportamento e la stabilità del sistema anche in regime dinamico mantenendo allo stesso tempo alto il guadagno di anello, è comunque possibile intervenire inserendo nel dispositivo di controllo opportuni sistemi di correzione passivi (*reti correttrici*) o attivi (*controller PID*, vedi sezione 2.2.6) che controllano il comportamento dinamico.

### 2.2.3 Funzione di trasferimento e funzione di risposta armonica

È possibile descrivere l'evoluzione della maggior parte dei sistemi fisici controllati con modelli matematici lineari stazionari che si basano su equazioni differenziali ordinarie lineari a coefficienti costanti [26] del tipo:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 x \quad (2.46)$$

che legano l'uscita  $y$  all'ingresso  $x$ . Integrare tali equazioni in modo ordinario può essere molto complesso, per cui si ricorre alla trasformata di Laplace che associa in modo biunivoco ad una generica funzione del tempo  $f(t)$  a valori reali o complessi una funzione  $F(s)$  a valori in genere complessi e definita per valori complessi di  $s$ , definita nel seguente modo:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (2.47)$$

La trasformata di Laplace è uno strumento molto utile per la risoluzione di equazioni differenziali, dato che consente di trasformare queste ultime in equazioni algebriche di risoluzione tipicamente molto più semplice, grazie alle seguenti proprietà:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{s}F(s), \quad \mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s) - f(0) \quad (2.48)$$

Usando le numerose proprietà della trasformata di Laplace, si può dimostrare [26] che è possibile scrivere la trasformata dell'equazione differenziale (2.46) nel seguente modo:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \left( \frac{\sum_{i=1}^m b_i s^i}{\sum_{i=1}^n a_i s^i} \right) X(s) = \\ &= G(s)X(s) \end{aligned} \quad (2.49)$$

dove  $X(s)$  e  $Y(s)$  sono le trasformate di Laplace rispettivamente dell'ingresso  $x$  e dell'uscita  $y$  e la funzione  $G(s)$  prende il nome di *funzione di trasferimento*. Questa può essere scritta nella sua forma fattorizzata:

$$G(s) = K \frac{(s - z_1) \dots (s - z_m)}{(s - p_1) \dots (s - p_n)} \quad (2.50)$$

dove  $K$  è un opportuno coefficiente reale, i punti  $z_i$  sono detti *zeri* e i punti  $p_i$  sono detti *poli*. La funzione di trasferimento risulta quindi nota una volta noti i suoi zeri e poli. Una volta che si conosce la funzione di trasferimento, per ottenere il segnale in uscita sarà sufficiente fare l'antitrasformata del prodotto della trasformata di Laplace del segnale in ingresso e della funzione di trasferimento.

La funzione di trasferimento (2.50) può anche essere scritta nella forma in fratti semplici:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{(s - p_1) \dots (s - p_n)} = \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{s - p_i} \quad (2.51)$$

dove le costanti  $K_i$ , dette residui relativi al polo  $p_i$ , sono definite come:

$$K_i = (s - p_i) \frac{P(s)}{Q(s)} \Big|_{s=p_i} \quad (2.52)$$

e sono reali in corrispondenza di poli reali, complesse coniugate in corrispondenza di poli complessi coniugati.

Una particolare funzione che trova impiego in svariati sistemi sperimentali è la cosiddetta *funzione di risposta armonica*. La definizione di tale funzione si fonda sulla proprietà dei sistemi lineari stazionari di rispondere ad un segnale in ingresso del tipo:

$$x(t) = X \sin \omega t \quad (2.53)$$

con un segnale in uscita del tipo:

$$y(t) = Y(\omega) \sin(\omega t + \varphi(\omega)) \quad (2.54)$$

in cui l'ampiezza e l'angolo di fase rispetto all'ingresso sono in generale funzione della pulsazione  $\omega$  del segnale in ingresso. Si definisce a questo punto la funzione di risposta armonica come:

$$F(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X} e^{i\varphi(\omega)} \quad (2.55)$$

Tale funzione descrive completamente il comportamento del sistema alle varie frequenze ed è definita sul dominio  $0 \leq \omega < +\infty$ . Si può inoltre dimostrare [26] che la funzione di risposta armonica è legata alla funzione di trasferimento  $G(s)$  dalla seguente relazione:

$$F(\omega) = G(i\omega) \quad (2.56)$$

In linea di principio, dalla funzione di risposta armonica, sperimentalmente accessibile con l'impiego di un analizzatore di spettro o tracciando i diagrammi di ampiezza e fase (o di Bode), è quindi possibile ricavare informazioni sulla funzione di trasferimento, e quindi sulla risposta temporale del sistema ad un qualsiasi segnale in ingresso.

## 2.2.4 Sistemi del primo e del secondo ordine

In questa sezione saranno descritti i cosiddetti sistemi del primo e del secondo ordine (in  $s$ ), sistemi descritti da forme particolarmente semplici della funzione di trasferimento. La maggior parte dei sistemi fisici ha un comportamento assimilabile a questi tipi di sistemi ed è inoltre possibile mostrare [26] che una funzione di trasferimento arbitrariamente complessa può essere ridotta ad una somma di termini di primo e di secondo ordine.

Un termine del primo ordine è caratterizzato da una funzione di trasferimento data a meno di una costante da:

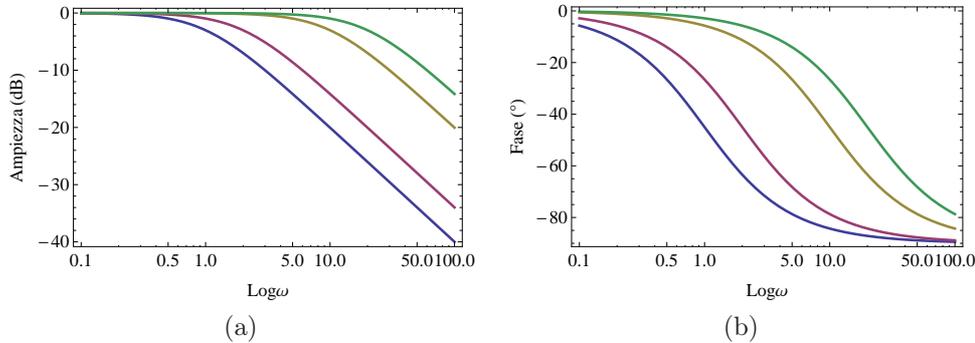


Figura 2.7: Diagrammi di ampiezza (a) e fase (b) per un sistema del primo ordine per  $\tau = 1$  in blu,  $\tau = 0.5$  in viola,  $\tau = 0.1$  in giallo scuro e  $\tau = 0.05$  in verde. Tanto più piccola è la costante di tempo tanto più alta è la pulsazione di taglio e più larga la banda passante.

$$G(s) = \frac{1}{s - p} = \frac{1}{s - \sigma} \quad (2.57)$$

dove  $p = \sigma$  è un polo reale. Introducendo la costante  $\tau = -1/\sigma$ , chiamata *costante di tempo*, la precedente può essere scritta come:

$$G(s) = \frac{1}{1 + \tau s} \quad (2.58)$$

Dalla relazione (2.56) si ha che questa funzione di trasferimento corrisponde ad una funzione di risposta armonica data da:

$$F(\omega) = \frac{1}{1 - i\tau\omega} \quad (2.59)$$

In Fig. 2.7 sono rappresentati i diagrammi di Bode di questa funzione. Come si può vedere, l'ampiezza (o *guadagno*) della funzione di trasferimento, misurata in dB, resta costante per bassi valori della pulsazione, mentre per valori alti scende linearmente con una pendenza di 20 dB/decade e la fase tende a  $-90^\circ$ . La pulsazione a cui si osserva una diminuzione di guadagno di 3 dB rispetto al valore iniziale e uno sfasamento di  $45^\circ$  è detta *pulsazione di taglio* ed è data da  $\omega = 1/\tau$ . Questa pulsazione definisce la banda passante del sistema.

Per capire meglio le caratteristiche di un sistema del primo ordine, consideriamo la risposta temporale di un sistema del primo ordine ad un gradino unitario (la cui trasformata di Laplace è  $1/s$ ). Si ha una risposta del tipo:

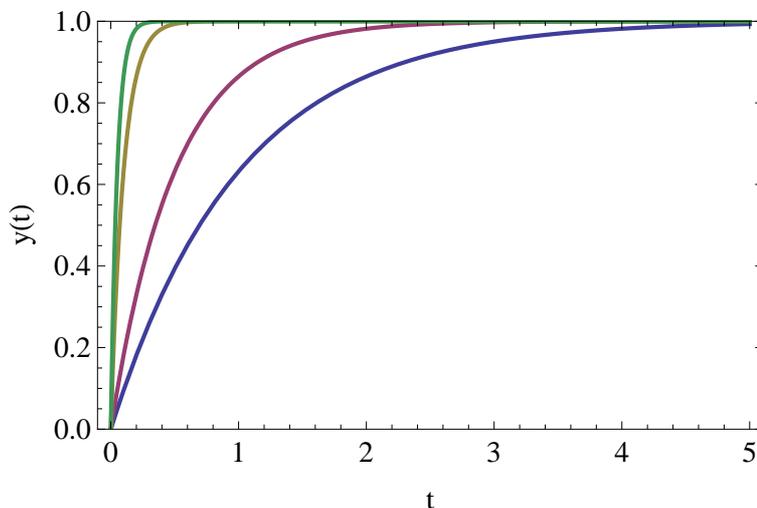


Figura 2.8: Risposta al gradino unitario per un sistema del primo ordine con le stesse costanti di tempo di Fig. 2.7. Tanto più piccola è la costante di tempo, tanto più pronta è la risposta del sistema.

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s(1 + \tau s)} \right] = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (2.60)$$

La risposta temporale al gradino ha un andamento del tipo in Fig. 2.8 con scala dei tempi normalizzata alla costante di tempo. Per  $t = \tau$  la risposta assume un valore pari al 63.2% del valore finale di regime mentre per  $t = 3\tau$  si raggiunge il 95% del valore di regime. Se si definisce il *tempo di assestamento* del sistema come il tempo necessario perchè l'uscita rimanga entro un 5% del valore del finale, questo è circa tre volte la costante di tempo. In generale quindi la risposta è tanto più rapida quanto più piccolo è il valore di  $\tau$ , cioè tanto più larga è la banda passante del sistema. Un sistema con una banda ristretta risponderà lentamente e non sarà in grado di seguire variazioni rapide. Dalla risposta temporale (2.60) si deduce inoltre che se  $\tau < 0$ , cioè se il polo reale è positivo, la risposta temporale al transitorio diverge, comportamento che chiaramente non può essere associato ad un sistema stabile. Un tipico sistema del primo ordine è il filtro RC, in cui la costante di tempo, e quindi il polo del sistema, è determinato dal valore del prodotto  $R \cdot C$  tra il valore della resistenza  $R$  e della capacità  $C$  da cui il filtro è costituito.

Passiamo ora al caso di un sistema elementare del secondo ordine. Un sistema del secondo ordine è caratterizzato da una funzione di trasferimento data a meno di una costante da:

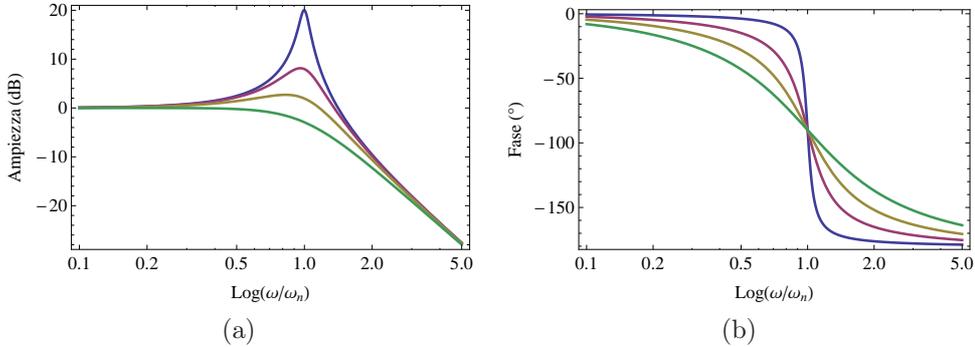


Figura 2.9: Diagrammi di ampiezza (a) e fase (b) per un sistema del secondo ordine per  $\delta = 0.05$  in blu,  $\delta = 0.2$  in viola,  $\delta = 0.4$  in giallo scuro e  $\delta = 0.7$  in verde. Il picco di risonanza è tanto più alto tanto più vicino a 0 è il parametro  $\delta$ .

$$G(s) = \frac{1}{s - p_1} \frac{1}{s - p_2} \quad (2.61)$$

dove  $p_1 = \sigma + i\rho$  e  $p_2 = \sigma - i\rho$  sono due poli complessi coniugati. È possibile mostrare [26] che questa funzione di trasferimento può essere scritta nella forma:

$$G(s) = \frac{1}{1 + s^2/\omega_n^2 + 2\delta s/\omega_n} \quad (2.62)$$

dove i parametri  $\delta = -\sigma/\sqrt{\sigma^2 + \rho^2}$  e  $\omega_n = \sqrt{\sigma^2 + \rho^2}$  rappresentano rispettivamente il *coefficiente di smorzamento* e la *pulsazione naturale*. Il parametro  $\delta$  è compreso tra i valori 0 e 1: per valori superiori ad 1 il sistema del secondo ordine può essere scomposto in due sistemi del primo ordine [26], mentre per valori negativi di  $\delta$  il sistema è instabile, come sarà chiaro alla fine della sezione.

Anche in questo caso è possibile determinare dalla (2.56) la funzione di risposta armonica corrispondente alla funzione di trasferimento (2.62), data da:

$$F(\omega) = \frac{1}{1 - \omega^2/\omega_n^2 + i2\delta\omega/\omega_n} \quad (2.63)$$

i cui grafici di ampiezza e fase sono riportati in Fig. 2.9 per diversi valori del parametro  $\delta$ . Per  $0 \leq \delta \leq 1/\sqrt{2}$  la funzione di risposta armonica presenta un massimo, detto *picco di risonanza*, per un valore di pulsazione detto *pulsazione di risonanza* per poi scendere con pendenza di 40 dB/decade e uno sfasamento tendente a  $-180^\circ$ , mentre per  $1/\sqrt{2} \leq \delta \leq 1$  la funzione ha

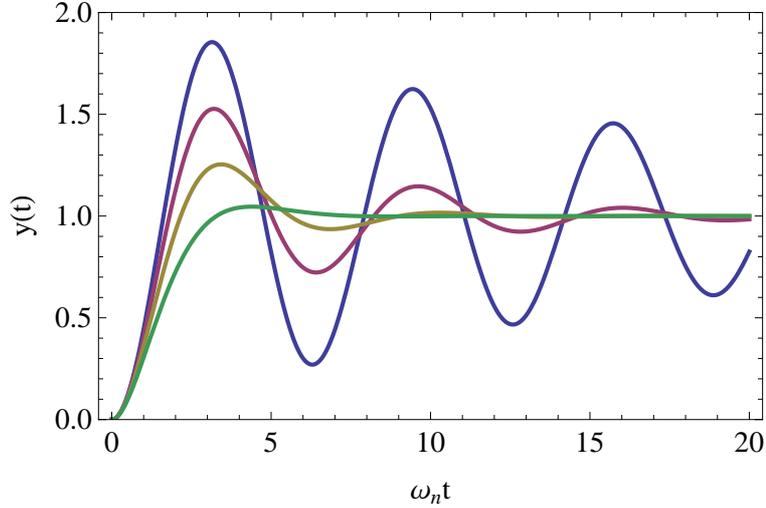


Figura 2.10: Risposta al gradino unitario del sistema elementare del secondo ordine valori di  $\delta$  analoghi a quelli di Fig. 2.9. Tanto più piccolo è il valore di  $\delta$  tanto più ampie sono le oscillazioni.

sempre guadagno  $< 0$  ed è sempre decrescente. Si può mostrare [26] che la pulsazione di risonanza e il picco di risonanza sono dati da:

$$\omega_R = \omega_n \sqrt{1 - 2\delta^2} \quad \text{e} \quad M_R = \frac{1}{5\delta\sqrt{1 - \delta^2}} \quad (2.64)$$

Questo implica che tanto più piccolo è il valore di  $\delta$  tanto più alto è il picco di risonanza, come appare chiaro anche osservando la Fig. 2.9. In particolare, nel caso di  $\delta = 0$  si ha un guadagno infinito in corrispondenza della pulsazione  $\omega = \omega_n$ .

Anche in questo è possibile correlare il comportamento di un sistema del secondo ordine in frequenza al comportamento dinamico andando ad osservare la risposta all'applicazione di un gradino. Questa è data dalla relazione [26]:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)} \right] = 1 - Ae^{-\delta\omega_n t} \sin(\Omega t + \varphi) \quad (2.65)$$

in cui si ha:

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 - \delta^2}}, \quad \Omega = \omega_n \sqrt{1 - \delta^2}, \quad \varphi = \arccos \delta$$

Dalla risposta temporale (2.65) appare innanzitutto chiaro che per  $\delta < 0$  si ha una una risposta divergente, di conseguenza, ricordando la definizione

di  $\delta$ , il sistema del secondo ordine sarà stabile solo per poli con parte reale negativa. In Fig. 2.10 è rappresentata la risposta al gradino unitario per diversi valori del parametro  $\delta$  con scala di tempi normalizzata all'inverso della pulsazione naturale  $\omega_n$ . I parametri più importanti di tali curve sono la *massima sovraelongazione*, cioè la differenza tra il valore massimo raggiunto dall'uscita e il valore finale, e il *tempo di assestamento*, cioè il tempo necessario perché l'uscita resti entro il 5% del valore finale. Questi parametri possono essere messi in relazione con i parametri  $\delta$  e  $\omega_n$  ottenendo [26]:

$$S = 100e^{\frac{-\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} \quad \text{e} \quad T_a = \frac{3}{\delta\omega_n} = -\frac{3}{\sigma} \quad (2.66)$$

dove  $S$  è la massima sovraelongazione (in %) e  $T_a$  il tempo di assestamento. Entrambi questi parametri sono tanto più piccoli tanto più vicino ad 1 è il valore di  $\delta$ . In generale quindi in presenza di risonanze, tanto più alto è il picco di risonanza tanto più il sistema sarà caratterizzato da un comportamento oscillatorio marcato e prolungato. Un esempio di sistema del secondo ordine è il piezoelettrico, la cui funzione di trasferimento è caratterizzata da una risonanza seguita da una forte diminuzione di guadagno. Dall'ampiezza e dalla posizione del picco di risonanza, è possibile ricavare informazioni sui parametri  $\delta$  e  $\omega_n$  e quindi sulla coppia di poli del sistema.

### 2.2.5 Caratteristiche dei sistemi in retroazione

Dopo aver fatto le precedenti considerazioni di carattere generale sulla funzione di trasferimento ed aver esaminato il comportamento di sistemi del primo e del secondo ordine, andiamo a considerare il caso specifico dei sistemi in retroazione. Lo schema a blocchi a cui si può ricondurre un tipico sistema in retroazione è rappresentato in Fig. 2.11 (a). Questo è caratterizzato dal possedere i seguenti elementi:

- $R(s)$ : trasformata di Laplace del segnale di riferimento (o *setpoint*)  $r(t)$ .
- $C(S)$ : trasformata di Laplace della variabile controllata  $c(t)$ .
- $E(s)$ : trasformata di Laplace segnale d'errore  $e(t)$ .
- $G(s)$ : funzione di trasferimento del percorso di segnale diretto.
- $H(s)$ : funzione di trasferimento del percorso di segnale in retroazione.
- $G(s)H(s)$ : guadagno di anello.

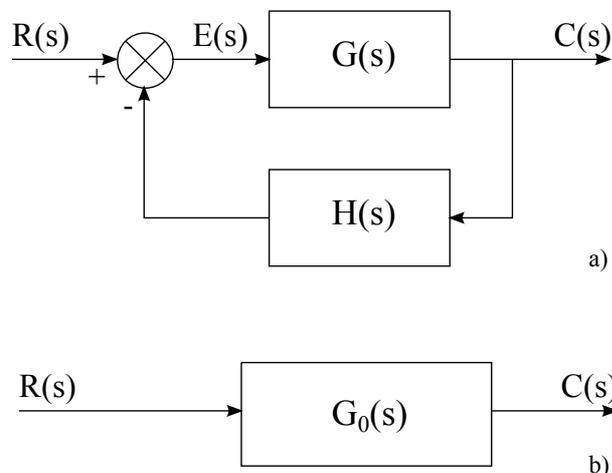


Figura 2.11: *Sistema in retroazione (a) e sua forma minima (b).*

Si può dimostrare [26] che il sistema può essere ridotto ad una forma minima illustrata in Fig. 2.11 (b) ed è caratterizzato da una funzione di trasferimento complessiva del tipo:

$$G_0(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (2.67)$$

Ricordiamo che la funzione di trasferimento  $G(s)$  descrive il comportamento dinamico del dispositivo di controllo, dell'attuatore e del sistema controllato mentre  $H(s)$  è relativa al solo trasduttore di misura per la retroazione.

Come abbiamo già accennato il guadagno ad anello è una grandezza fortemente legata con la sensibilità del sistema ai disturbi. Analizziamo ora questo aspetto con maggior dettaglio.

### Sensibilità alla variazione di parametri e dei disturbi

Supponiamo che un parametro  $\alpha$  del sistema subisca una variazione  $\Delta\alpha$  rispetto al suo valore nominale  $\alpha_0$ . La nuova funzione di trasferimento del sistema sarà ora:

$$G(s, \alpha) \simeq G(s, \alpha_0) + \left. \frac{\partial G}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\alpha_0} \Delta\alpha = G(s) + \Delta G(s) \quad (2.68)$$

Si può mostrare [26] che se la variazione  $\Delta\alpha$  influenza un parametro della funzione di trasferimento del percorso di segnale diretto il modulo delle variazioni relative di  $G$  e  $G_0$  nel formalismo della funzione di risposta armonica è dato da:

$$\frac{|\Delta G_0(i\omega)|}{|G_0(i\omega)|} = \frac{1}{|1 + G(i\omega)H(i\omega)|} \frac{|\Delta G(i\omega)|}{|G(i\omega)|} \quad (2.69)$$

che implica che se  $|G(i\omega)H(i\omega)| \gg 1$ , cioè per tutte quelle frequenze per cui il guadagno ad anello è elevato, l'errore relativo dovuto alla variazione di un parametro di  $G(s)$  è molto minore nel sistema a retroazione di quello che si avrebbe nel sistema ad anello aperto. Con un ragionamento analogo si ricava [26] che nel caso in cui la variazione  $\Delta\alpha$  interessi un parametro di  $H(s)$  gli errori relativi sono dello stesso ordine di grandezza.

Sia ora  $d(t)$  un disturbo che agisce in un punto della catena di amplificazione diretta di un sistema a retroazione. In riferimento alla Fig. 2.11, si può mostrare [26] che, in termini di risposta armonica, il rapporto segnale/disturbo in presenza di retroazione è moltiplicato per un fattore  $(1 + G(i\omega)H(i\omega))$  rispetto al caso senza retroazione e pertanto fortemente aumentato se nella banda di frequenza del disturbo si ha che  $|G(i\omega)H(i\omega)| \gg 1$ .

Da queste considerazioni appare chiaro quindi che l'insensibilità alla variazione dei parametri e ai disturbi è tanto più elevata in un sistema in retroazione tanto più è alto il guadagno ad anello del sistema purchè non si abbiano instabilità.

## Errori a regime

Nello studio dei sistemi di controllo in retroazione un dato di specifica di notevole importanza è l'errore a regime nella risposta a segnali tipici. Consideriamo un sistema con retroazione unitaria ( $H(s) = 1$ ) e sia  $e(t) = r(t) - c(t)$  il segnale d'errore inteso come scostamento della variabile controllata  $c(t)$  dal segnale di riferimento  $r(t)$  e supponiamo che il comportamento voluto consista nella ripetizione esatta del segnale di riferimento.

Definiamo inoltre un sistema *di tipo 0* se la funzione di trasferimento  $G(s)$  non presenta alcun polo nell'origine, *di tipo 1* se  $G(s)$  presenta un polo semplice nell'origine, *di tipo 2* se presenta un polo doppio nell'origine. Nel formalismo della funzione di risposta armonica sistemi di tipo 1 e 2 sono caratterizzati da un guadagno molto alto alle basse frequenze e tendente a infinito in DC. Tanto più alto è il tipo di sistema, tanto più rapidamente cresce il guadagno avvicinandosi alla pulsazione nulla.

L'andamento temporale del segnale d'errore si ottiene antitrasformando l'espressione:

$$E(s) = \frac{1}{1 + G(s)} R(s) \quad (2.70)$$

e il suo valore a regime, cioè per  $t \rightarrow \infty$ , è dato da<sup>2</sup>:

$$e_r = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)} \quad (2.71)$$

Si può facilmente mostrare che la risposta a regime del sistema ad un segnale a gradino (*errore di posizione*), la cui trasformata è del tipo  $R(s) = \frac{1}{s}R_0$ , è data da:

$$e_r = \frac{R_0}{1 + K_p} \quad (2.72)$$

dove  $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)$  è detta *costante di guadagno*. In questo caso, se il sistema è di tipo 0 la costante di guadagno è uguale alla costante di guadagno statico  $K$ , mentre se il sistema è di tipo 1 o 2 si ha  $K_p = \infty$  e l'errore di posizione è nullo.

Nel caso di un segnale di riferimento lineare nel tempo con trasformata  $R(s) = \frac{1}{s^2}R_0$  la risposta a regime del sistema (*errore di velocità*) è data da:

$$e_r = \frac{R_0}{K_v} \quad (2.73)$$

dove  $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)$  è detta *costante di velocità* che risulta essere nulla nel caso di sistemi di tipo 0, che sono quindi caratterizzati da un errore di velocità infinito, finita ed uguale a  $K$  nel caso di sistemi di tipo 1 ed è infinita per sistemi di tipo 2, che presentano quindi un errore di velocità nullo.

In base a quanto detto in precedenza è facile capire che la risposta a regime ad un'eccitazione di tipo parabolico con trasformata  $R(s) = 1/s^3 R_0$ , o *errore di accelerazione*, è infinita nel caso di sistemi di tipo 0 o 1, ed è finita ed uguale a  $R_0/K$  per sistemi di tipo 2.

Il comportamento a regime di un sistema a retroazione è quindi tanto migliore tanto maggiore è il tipo di sistema complessivo, cioè tanto più alto è il guadagno alle basse frequenze, e questo risultato può essere esteso con facilità anche al caso di retroazione non unitaria e riferendosi ad una definizione più generale dell'errore.

### Criterio di Nyquist per la stabilità

Un sistema di controllo deve essere caratterizzato da un buon comportamento dinamico oltre che da una buona precisione. Per stabilire se un sistema in

---

<sup>2</sup>Utilizzando il teorema del valore finale per cui si ha:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

retroazione è stabile è utile il *criterio di Nyquist* che consente di determinare la stabilità o meno di un sistema in retroazione una volta nota la risposta armonica del sistema ad anello aperto. In riferimento alla Fig. 2.11 sia  $F(i\omega)$  la funzione di risposta armonica ad anello:

$$F(i\omega) = G(i\omega)H(i\omega) = R(\omega) + iI(\omega) \quad (2.74)$$

di cui si suppone noto il diagramma polare (o diagramma di Nyquist), cioè la curva che rappresenta nel piano di Gauss, tramite modulo e fase della risposta armonica del sistema, il variare del numero complesso  $F(i\omega)$  in funzione della pulsazione  $\omega$ , tracciato per  $\omega$  da 0 a  $+\infty$ . Il criterio di Nyquist si riferisce in realtà a diagrammi polari tra  $-\infty$  e  $+\infty$ , tuttavia la curva per valori negativi della pulsazione può essere semplicemente tracciata ribaltando rispetto all'asse reale la curva per valori positivi della pulsazione dato che  $F(-i\omega) = F^*(i\omega)$ . In questo modo avremo sempre a che fare con curve chiuse.

Fatte queste premesse possiamo introdurre il criterio di Nyquist secondo cui nell'ipotesi che la funzione guadagno di anello  $F(s)$  abbia tutti i poli a parte reale negativa, eccezion fatta per un eventuale polo nullo semplice o doppio, condizione necessaria e sufficiente perché il sistema in retroazione di Fig. 2.11 sia asintoticamente stabile è che il diagramma polare completo della funzione  $F(i\omega)$  non circonda né tocchi il *punto critico*  $-1 + i0$ .

Perché un sistema in retroazione sia stabile è necessario quindi cercare di fare in modo che la curva non circonda il punto critico. Si può elaborare una regola di massima per la stabilità che prevede che per non circondare il punto critico il guadagno di anello deve scendere sotto l'unità per valori di pulsazione inferiori a quelli per cui si ha una fase di  $-180^\circ$ .

È inoltre immediato concludere che quanto più il diagramma di Nyquist di un sistema stabile ad anello aperto si svolge lontano dal punto critico, tanto più lontano dall'instabilità è il sistema, mentre la vicinanza del diagramma di Nyquist al punto critico è normalmente associata ad un comportamento dinamico non soddisfacente.

È pertanto utile associare la bontà del comportamento dinamico del sistema in retroazione alla prossimità del diagramma di Nyquist al punto critico. A tal fine si introducono due parametri, detti *margini di stabilità* che misurano la stabilità relativa dei sistemi in retroazione:

- *Margine di ampiezza*  $M_a$ : è l'inverso del modulo di guadagno di anello alla pulsazione corrispondente alla fase  $-\pi$ .

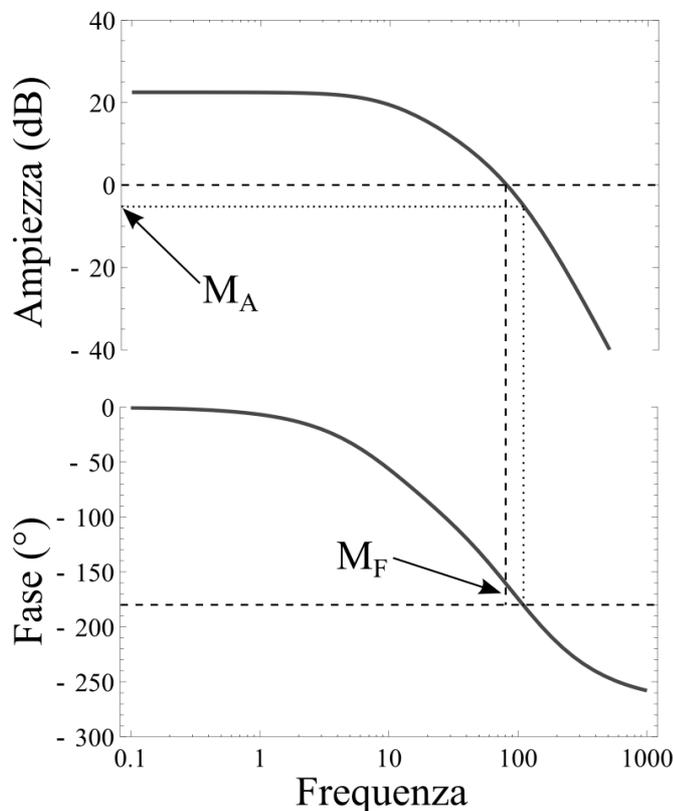


Figura 2.12: Margini di ampiezza e fase nei diagrammi di Bode di un sistema stabile.

- *Margine di fase  $M_f$* : è l'angolo che occorre sottrarre alla fase (normalmente negativa) del guadagno di anello alla pulsazione corrispondente al valore unitario del modulo per ottenere il valore  $-\pi$ .

Il significato di questi due parametri è illustrato in Fig. 2.12. Normalmente il margine di ampiezza viene dato in dB. Valori negativi del margine di ampiezza in dB e del margine di fase implicano che il diagramma di Nyquist del guadagno di anello circonda il punto critico e determinano quindi un comportamento instabile del sistema. Valori tipici per un buon comportamento di un sistema in retroazione sono invece  $M_a$  da 4 a 6 (cioè da 12 a 16 dB) e  $M_f$  da  $45^\circ$  a  $60^\circ$ .

### 2.2.6 Progetto dei regolatori

Nel progetto di un regolatore si deve tenere conto di numerose caratteristiche legate alla sua precisione, alla sua stabilità e alla sua velocità di risposta. I

dati che riguardano la precisione sono gli errori a regime in risposta a segnali tipici e il comportamento in presenza di disturbi e di variazioni dei parametri. I dati che riguardano la stabilità sono la massima sovraelongazione alla risposta a gradino, il picco di risonanza, i margini di ampiezza e fase e il coefficiente di smorzamento. I dati che riguardano la velocità di risposta sono il tempo di salita, il tempo di assestamento e la banda passante.

Il primo parametro che si determina in fase di progetto utilizzando i dati di specifica che si riferiscono alla precisione è la costante di guadagno (guadagno statico nei sistemi di tipo 0, guadagno di velocità nei sistemi di tipo 1). Inoltre il sistema è tanto meno sensibile a variazioni dei parametri e disturbi per tutti quei valori di  $\omega$  per cui si ha un elevato guadagno di anello. In generale quindi al fine di avere le migliori prestazioni di precisione possibili è opportuno cercare di avere un alto guadagno a tutte le pulsazioni.

Questo fatto è in genere incompatibile con la soddisfazione dei requisiti di stabilità e velocità di risposta, in quanto ad esempio un alto guadagno in corrispondenza di una risonanza porterebbe il sistema ad avere forti oscillazioni e un lungo tempo di assestamento in seguito a transitori. In sostanza quindi per soddisfare tutti i requisiti di precisione, stabilità e velocità di risposta è necessario calibrare accuratamente i parametri del regolatore.

Andremo ora a vedere un particolare tipo di regolatore, detto regolatore proporzionale-integrale-derivativo, o PID, largamente impiegato nel campo dei sistemi controllati.

### Il controller PID

Il controller PID è un dispositivo caratterizzato da una funzione di trasferimento  $G_c(s)$  del tipo:

$$G_c(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \quad (2.75)$$

dove il primo termine è detto proporzionale (P), il secondo integrale (I) e il terzo derivativo (D) e le costanti  $K_p$ ,  $T_i$  e  $T_d$  sono rispettivamente la *sensibilità proporzionale* e le *costanti di tempo* dell'azione integrale e derivativa.

In Fig. 2.13 è riportato lo schema a blocchi del regolatore PID. I regolatori PID vengono tipicamente realizzati per essere in grado di elaborare segnali elettrici ed è proprio questo il caso che andremo ad analizzare con qualche dettaglio, tuttavia in linea di principio è possibile realizzare dispositivi di questo tipo anche per trattare segnali di diversa natura.

In elettronica gli stadi P, I e D sono tipicamente realizzati con un amplificatore operazionale in configurazione invertente, la cui funzione di risposta armonica è data da:

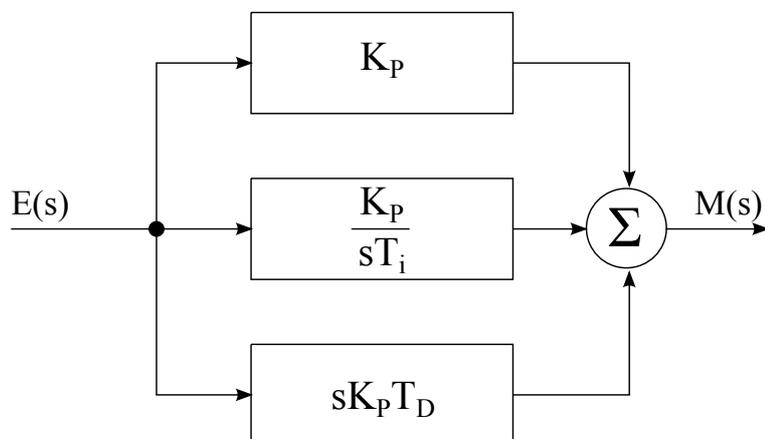


Figura 2.13: Schema di un regolatore di tipo PID.

$$F(\omega) = -\frac{Z_r}{Z_i} \quad (2.76)$$

dove  $Z_r$  e  $Z_i$  sono rispettivamente l'impedenza sul ramo di reazione e l'impedenza all'ingresso invertente. In Fig. 2.14 sono rappresentati gli schemi elettrici degli stadi proporzionali (a) integrale (b) e derivativo (c). Questi blocchi sono di solito connessi in modo da poter essere usati indipendentemente, o comunque in generale in modo da poter scegliere se usare tutti o solo alcuni di essi.

Il regolatore proporzionale è caratterizzato da una funzione di risposta armonica del tipo:

$$F(\omega) = K_p = -R_2/R_1 \quad (2.77)$$

dove  $R_1$  e  $R_2$  sono in riferimento alla Fig. 2.14 (a). Questo tipo di regolatori si impiega quando il processo consente un'elevata costante di guadagno di anello senza compromettere la stabilità, come per esempio in sistemi del primo ordine con una costante di tempo dominante. Nel caso di sistemi del secondo ordine invece un regolatore proporzionale con una costante  $K_p$  troppo grande renderebbe troppo grande il picco di risonanza comportando come si è visto un comportamento oscillatorio. Un regolatore proporzionale non è inoltre indicato per stabilizzare sistemi di tipo 0 perché darebbe luogo ad un errore a regime inaccettabile: come si è visto infatti, in questo tipo di sistemi l'errore a regime in risposta ad un segnale a gradino è proporzionale all'inverso della costante di guadagno ed è quindi nullo solo nel caso di  $K_p \rightarrow \infty$ . Considerando che la maggior parte dei sistemi è di tipo 0, un

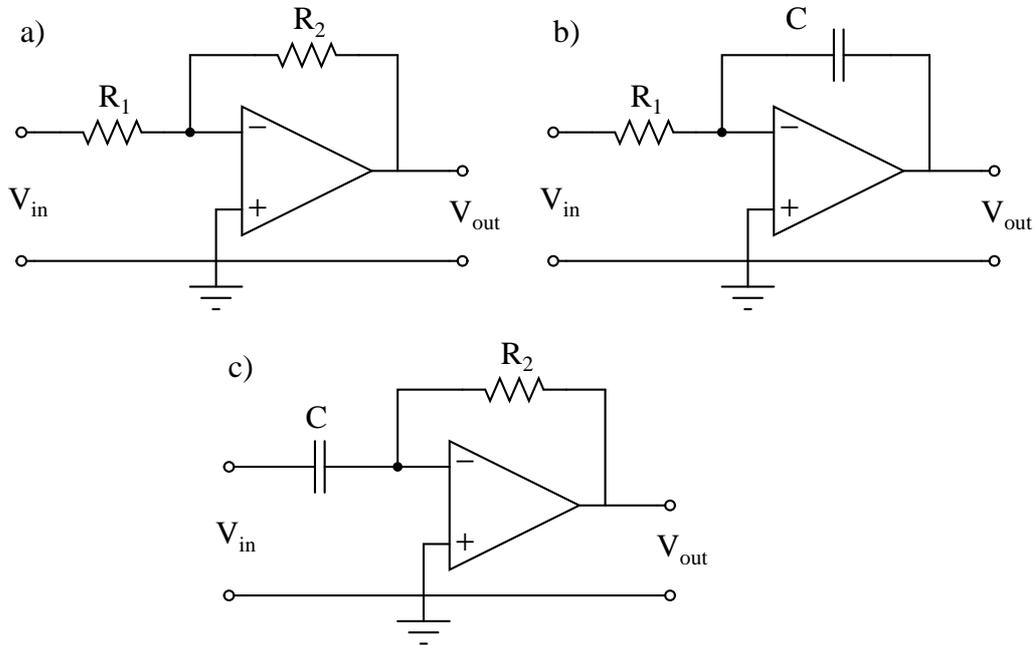


Figura 2.14: *Schemi elettrici degli stadi proporzionale (a), integrale (b) e derivativo (c).*

regolatore solamente proporzionale viene raramente impiegato.

L'integratore è caratterizzato da una funzione di risposta armonica del tipo:

$$F(\omega) = -\frac{1}{iR_1C\omega} \quad (2.78)$$

dove  $R_1$  e  $C$  sono in riferimento alla Fig. 2.14 (b). I diagrammi di ampiezza e fase di un regolatore I sono rappresentati dalle curve in blu di Fig. 2.15 (a) e (b). L'ampiezza della funzione di trasferimento è caratterizzata da un guadagno molto alto alle basse frequenze, assume valore uno alla pulsazione  $\omega = 1/(R_1C) = 2\pi/T_i$  ed è sempre decrescente al crescere della pulsazione  $\omega$ , mentre la fase è costante a  $-90^\circ$ . In linea di principio, questo tipo di regolatore è quindi indicato per stabilizzare sistemi di tipo 0 o del secondo ordine che per i motivi sopra esposti non possono essere efficacemente stabilizzati con un controllo solo proporzionale. Solitamente tuttavia si utilizza uno stadio proporzionale in parallelo allo stadio di integratore ottenendo un controllo di tipo PI, regolatore caratterizzato da una funzione di risposta armonica data dalla somma delle funzioni di trasferimento dello stadio P e dello stadio I. L'ampiezza della funzione di risposta armonica per un regolatore di tipo PI è

## 2 BASI TEORICHE SULLA DUPLICAZIONE DI FREQUENZA E SUI CONTROLLI AUTOMATICI

---

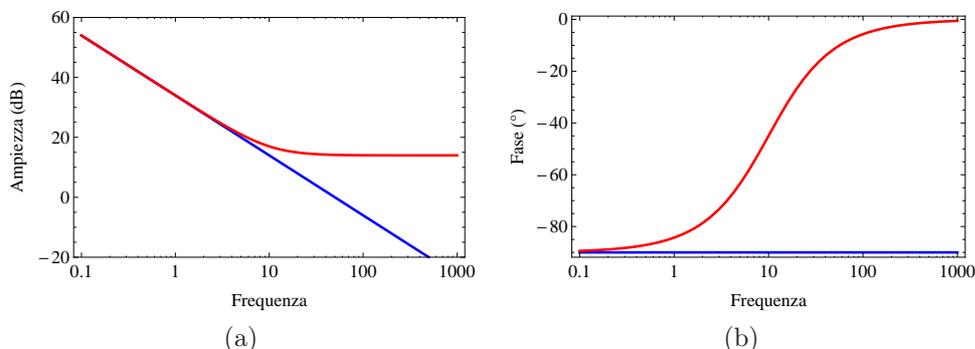


Figura 2.15: Diagrammi di ampiezza (a) e fase (b) di un regolatore I (in blu) e PI (in rosso).

rappresentata dalla curva in rosso in Fig. 2.15 (a). Come si può vedere, l'ampiezza della funzione di trasferimento del regolatore PI alle basse frequenze è dominata dal contributo ad alto guadagno dello stadio di integratore. Al crescere della frequenza, il contributo di integratore decresce, finché non diventa inferiore al contributo al guadagno dato dallo stadio proporzionale che quindi diventa dominante. Il risultato è quello di unire i benefici dei due tipi di controlli: l'alto guadagno dell'integratore alle basse frequenze consente di minimizzare l'errore a regime, mentre un guadagno costante alle alte frequenze consente di avere una banda più ampia che comporta una maggiore velocità di risposta. La fase del regolatore PI ha invece l'andamento riportato in Fig. 2.15 (b) (curva rossa).

L'aggiunta dello stadio di integratore al solo controllo proporzionale consente inoltre di abbassare la costante di guadagno in presenza di risonanze in modo che il sistema non risponda in modo oscillante al transitorio. In termini di criterio di Nyquist, l'effetto di stabilizzazione di un regolatore PI è quello portare il guadagno di anello del sistema globale al di sotto dell'unità prima che la fase raggiunga il valore di  $-180^\circ$ , mantenendo allo stesso tempo un'alto guadagno DC necessario per minimizzare l'errore a regime.

Lo stadio derivativo (Fig. 2.14 (c)) è solitamente impiegato in parallelo ad uno stadio proporzionale. Quello che si ottiene è un regolatore di tipo PD, caratterizzato da una funzione di risposta armonica del tipo:

$$F(\omega) = -\frac{R_2}{R_1} - i\omega R_2 C \quad (2.79)$$

dove  $R_1$ ,  $R_2$  e  $C$  sono in riferimento alla Fig. 2.14 (a) e (c) (le resistenze  $R_2$  sul ramo di reazione del proporzionale e del derivatore possono essere

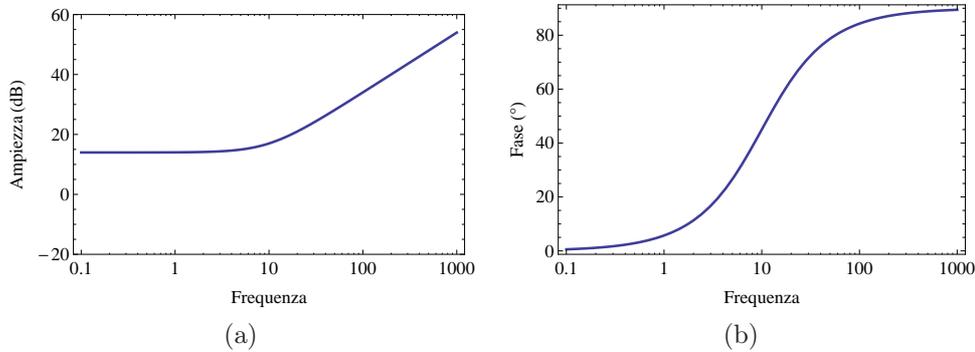


Figura 2.16: *Diagrammi di ampiezza (a) e fase (b) di un regolatore PD.*

diverse, anche se indicate con lo stesso simbolo). I grafici di ampiezza e fase della funzione di risposta armonica del regolatore PD sono riportati in Fig. 2.16. Come si può vedere, uno degli effetti dello stadio derivativo è quello di aumentare il guadagno alle alte frequenze, aumentando così la banda passante del sistema. Questo effetto da solo tuttavia può portare a delle instabilità in presenza di picchi di risonanza ed in generale per valori prossimi a  $-180^\circ$  della fase. L'effetto stabilizzante del regolatore PD avviene infatti mediante un anticipo della fase del sistema. In termini di criterio di Nyquist si può dire che il regolatore PD agisce in modo opposto rispetto al regolatore PI: anziché fare in modo di portare il guadagno globale sotto l'unità prima che la fase raggiunga i  $-180^\circ$ , il controller PD contribuisce a mantenere lo sfasamento entro i  $-180^\circ$  fino alla pulsazione per cui il guadagno globale del sistema scende sotto l'unità.

Il regolatore PID è quindi il più completo, in quanto possiede i vantaggi sia del regolatore PI che del regolatore PD. Spesso tuttavia per stabilizzare un sistema in retroazione è sufficiente impiegare un regolatore di tipo PI, che se ben calibrato può offrire ottime prestazioni: come vedremo, con l'impiego di regolatori di tipo PI è stato possibile ottenere un miglioramento di due ordini di grandezza sulla larghezza di banda del sistema laser oggetto di questa tesi.



# Capitolo 3

## Generazione di luce laser a 578 nm

In questo capitolo saranno inizialmente descritti sviluppo e realizzazione di un diodo laser in cavità estesa (*extended cavity laser diode - ECDL*) con lunghezza d'onda di emissione di 1156 nm. Sarà poi illustrata la messa in opera di una cavità ottica di duplicazione, grazie alla quale è stato possibile ricavare, mediante duplicazione di frequenza, radiazione a lunghezza d'onda di 578 nm con una potenza di  $\sim 50$  mW, a nostra conoscenza la più alta potenza raggiunta per questa lunghezza d'onda.

### 3.1 Diodo laser in cavità estesa

In questa sezione, dopo una breve introduzione al funzionamento dei diodi laser a quantum dot, saranno descritte realizzazione e caratterizzazione di un ECDL standard a partire da un *chip laser a quantum dot*.

#### 3.1.1 Laser a quantum dot

Il diodo laser a quantum dot è un sistema a semiconduttore ottenuto depositando per via epitassiale InAs su un substrato di GaAs. Questi due semiconduttori sono caratterizzati dall'aver diverse costanti reticolari, di conseguenza durante la crescita epitassiale si verificano degli accumuli di energia elastica che portano, sopra una certa soglia di spessore epitassiale, alla formazione di isole 3D di InAs sul substrato. Le isole (o *dot*) vengono poi ricoperte da uno strato di InGaAs. Dato che il InAs ha un gap tra la banda di valenza e la banda di conduzione più piccolo rispetto al GaAs, la presenza di isole di InAs sul substrato di GaAs comporta una modulazione

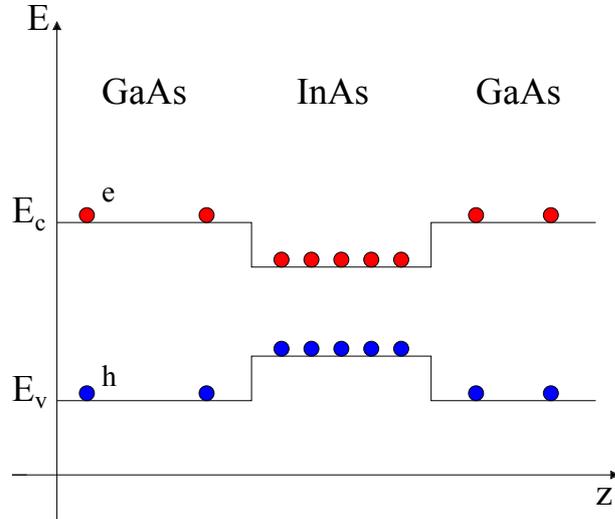


Figura 3.1: Schematizzazione dei livelli energetici di un diodo laser a quantum dot. In corrispondenza delle isole di InAs il gap energetico è ridotto.

dei livelli energetici di valenza e conduzione e i portatori di carica (elettroni nella banda di conduzione e lacune nella banda di valenza) tenderanno ad accumularsi nelle isole di InAs dove il gap energetico è più piccolo (Fig. 3.1). In questo tipo di dispositivi, il mezzo attivo in cui avviene l'inversione di popolazione necessaria per l'emissione laser è appunto l'insieme dei dot di InAs. Si può pensare alla modulazione della banda di conduzione (o di valenza) come una serie di buche di potenziale tridimensionali indipendenti di profondità  $V_0$  caratterizzate dall'aver dei livelli energetici quantizzati:

$$E = E_{n_x} + E_{n_y} + E_{n_z} \quad (3.1)$$

in cui  $E_{n_i}$  sono i livelli energetici discreti nella direzione  $i$  ricavabili risolvendo l'equazione di Schrödinger. I livelli energetici (3.1) della buca associata al dot di InAs sono quindi quantizzati, da cui la denominazione di *quantum dot*. Ogni dot è quindi assimilabile, a causa del suo spettro discreto di livelli, ad un sistema atomico, che se diseccitato emette un fotone. I fotoni emessi per ricombinazione radiativa nei dot interagiscono con i dot eccitati circostanti inducendo così emissioni stimolate che danno luogo all'emissione laser. Si può mostrare che ad un punto quantico può essere associata una densità degli stati che può essere approssimata come una successione di funzioni delta, a differenza di un semiconduttore di tipo bulk che ha una densità degli stati continua, e proprio questa particolare forma della densità degli stati è alla base di alcuni dei vantaggi dei laser a quantum dot rispetto ai laser a semiconduttore tradizionali di tipo bulk:

- Il confinamento dei portatori e la natura della densità degli stati fanno sì che questi dispositivi abbiano correnti di soglia più basse rispetto ai laser bulk, dato che la corrente di soglia diminuisce al decrescere dello spessore della regione attiva.
- Lo spettro di livelli discreti permette di variare con facilità la lunghezza d'onda di emissione. La spaziatura dei livelli infatti è legata alle dimensioni del dot, quindi si possono selezionare con una certa libertà le lunghezze d'onda aggiustando i parametri di crescita.

### 3.1.2 Realizzazione e caratterizzazione dell'ECDL

Dopo questa breve introduzione teorica, procediamo a descrivere la realizzazione di un laser ECDL a partire da un diodo laser a quantum dot. I laser a quantum dot hanno prestazioni spettrali analoghe a quelle dei diodi laser bulk. Il profilo di guadagno ha una larghezza tipica di una decina di nanometri e la lunghezza d'onda di emissione è determinata dalla competizione dei modi longitudinali della cavità interna del laser, tipicamente separati di 100-200 GHz. Il laser opera sul modo che ha il maggior guadagno. La frequenza di emissione del laser può essere cambiata variando la temperatura o la corrente di alimentazione, tuttavia variazioni troppo grandi comportano dei salti di modo di emissione del laser. Questo fa sì che vi siano degli intervalli di frequenza non accessibili: infatti intervalli di frequenza accessibili larghi qualche decina di GHz sono separati da intervalli maggiori del FSR della cavità interna del laser. Inoltre la larghezza di riga tipica un diodo laser è di alcune decine di MHz [27].

Le prestazioni spettrali di un diodo laser possono essere notevolmente migliorate inserendolo in una cavità estesa andando a formare un cosiddetto ECDL [27]. In questi dispositivi la cavità è costituita dalla faccia posteriore della cavità interna del diodo laser e da un reticolo di diffrazione posto di fronte al facet di uscita del diodo laser in modo da intercettare la luce laser uscente e reiniettarla in parte nel diodo laser. Il reticolo di diffrazione diffrange ad angoli differenti le varie componenti spettrali della luce incidente su di esso e solamente quelle componenti che vengono diffratte entro un certo angolo vengono reiniettate nel diodo laser, consentendo così una riduzione dell'intervallo spettrale di emissione del dispositivo ECDL complessivo.

In particolare, il reticolo di diffrazione è in grado di separare le diverse componenti spettrali della radiazione incidente secondo l'equazione del reticolo [28]:

$$m\lambda = d(\sin \theta_m - \sin \theta_i) \quad (3.2)$$

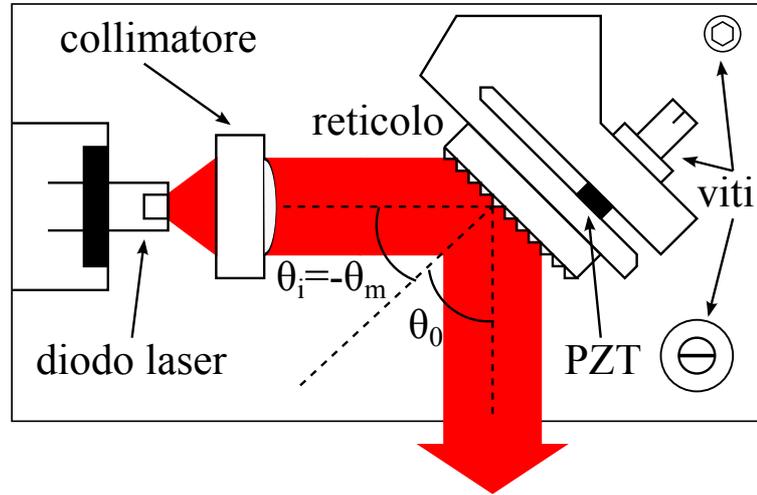


Figura 3.2: Schema di un diodo laser in cavità estesa in configurazione Littrow. L'ordine zero di diffrazione del reticolo costituisce l'output mentre l'ordine uno viene reiniettato nel diodo laser.

dove  $m$  è l'ordine di diffrazione,  $d$  il passo reticolare e  $\theta_i$  e  $\theta_m$  sono rispettivamente l'angolo tra la radiazione incidente e diffratta nell'ordine  $m$ -esimo rispetto alla normale al piano del reticolo. Per ogni ordine diverso dall'ordine zero, le componenti spettrali saranno diffratte ad angoli leggermente diversi. In un ECDL in configurazione Littrow, il reticolo è posizionato in modo da impiegare come output l'ordine  $m = 0$  di diffrazione (cioè la riflessione) mentre l'ordine  $m = -1$  viene reiniettato nel diodo laser. Questo permette di ottenere un'emissione laser centrata intorno a una lunghezza d'onda  $\bar{\lambda}$  selezionabile scegliendo la direzione  $\theta_m$  da reiniettare nel diodo laser, compatibilmente con la banda di guadagno del mezzo. La lunghezza d'onda finale di emissione del laser ECDL sarà la più vicina a  $\bar{\lambda}$  tale da soddisfare la relazione di interferenza costruttiva in cavità estesa  $n\lambda = 2L$ , dove  $L$  è la lunghezza della cavità estesa e  $n$  un numero intero. Una prima selezione della lunghezza d'onda si ottiene quindi scegliendo l'angolazione del reticolo rispetto al fascio in modo opportuno, mentre la selezione fine viene fatta variando la lunghezza  $L$  della cavità, tipicamente con un elemento piezoelettrico. In questo modo si aumenta di molto lo spazio delle frequenze accessibili rispetto al caso del semplice laser a diodo. Inoltre la configurazione ECDL permette di abbassare la corrente di soglia dell'emissione laser di un fattore di circa 10-15% e la larghezza della riga emessa può essere ridotta a qualche centinaio di kHz [27].

Nel nostro caso, il chip a quantum dot utilizzato è del modello GC-1156-TO-200 prodotto dalla ditta Innolume GmbH [30]. Questo modello è espressamente costruito per essere impiegato in una cavità esterna: il facet po-

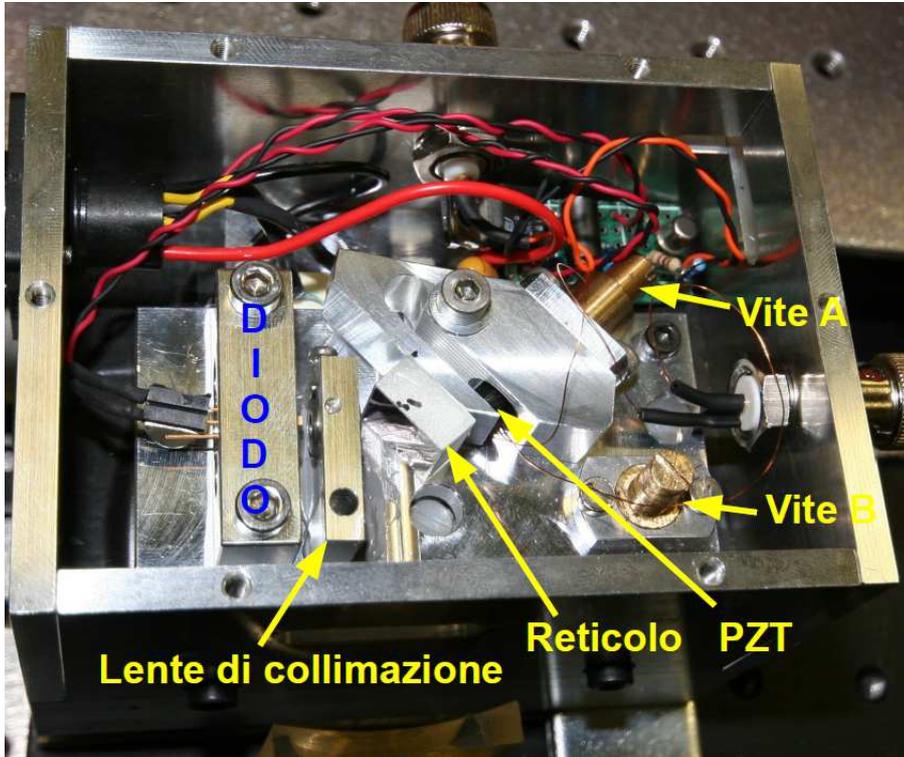


Figura 3.3: Foto del diodo laser in cavità estesa.

steriore ha una riflettività  $> 99\%$  mentre il facet di uscita ha un coating anti-riflesso (AR)  $< 0.1\%$  per il suo intervallo di emissione che impedisce al dispositivo di andare in self-lasing. Questo fa sì che vi sia meno competizione di modi di emissione e consente un più facile aggancio al reticolo esterno. La radiazione emessa viene raccolta da una collimatore Thorlabs C660TME-C. La posizione dell'ottica è ottimizzata in modo da collimare la direzione verticale del fascio che risulta essere la più divergente. Il reticolo di diffrazione utilizzato è un reticolo olografico Thorlabs GH13-12U con un'efficienza di diffrazione al primo ordine di circa  $12\%$ . Il reticolo ha  $1200$  righe/mm e questo permette da una parte di avere una buona risoluzione, dall'altra di avere un angolo di circa  $90^\circ$  alla lunghezza d'onda richiesta tra l'ordine  $-1$  e l'ordine  $0$  in caso di incidenza a  $45^\circ$ , permettendo così di prelevare facilmente il fascio di uscita. La risoluzione del reticolo infatti è tanto migliore tanto maggiore è il numero di righe; infatti si ha che [28]:

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN \quad (3.3)$$

dove  $N$  è il numero di righe del reticolo. Inoltre sostituendo i valori  $m =$

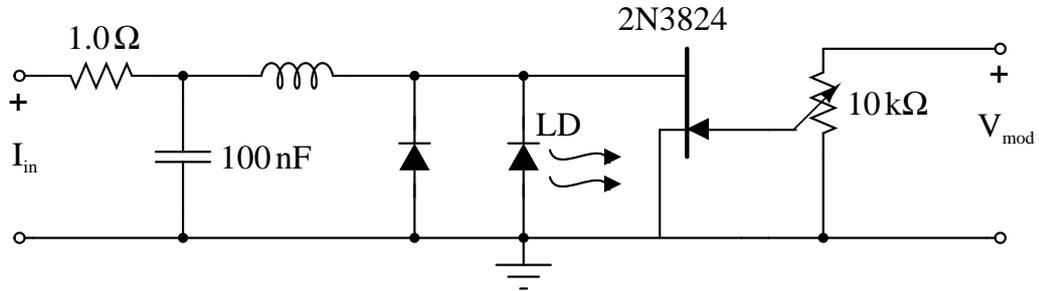


Figura 3.4: Schema del circuito di alimentazione del diodo laser in cavità estesa.

$-1$ ,  $\lambda = 1156$  nm,  $\theta_m = -\theta_i = 45^\circ$  nella (3.2) si ottiene che per avere un angolo retto tra direzione incidente e direzione di propagazione dell'ordine  $-1$  è necessario un passo reticolare  $d \simeq 817.4$  nm che corrisponde a circa 1220 righe/mm.

Il diodo laser viene alimentato da un generatore di corrente attraverso il circuito elettrico in Fig. 3.4. Questo circuito permette di filtrare fluttuazioni ad alta frequenza del generatore di corrente di alimentazione grazie al filtro passa basso all'ingresso  $I_{in}$  e all'induttanza da  $470 \mu\text{H}$  costituita da un toroide a nucleo di ferrite caratterizzata da un'alta impedenza fino dalle basse frequenze. L'induttanza ha inoltre la funzione di disaccoppiare lo stadio di alimentazione dallo stadio di modulazione della corrente passante attraverso il diodo laser (LD) costituito da un transistor FET di tipo  $n$  che funge da trasduttore voltaggio-corrente. In questo modo è possibile controllare la corrente di alimentazione del diodo laser tramite l'uscita di un PID standard senza influenzare il generatore di alimentazione.

Come abbiamo detto, la frequenza di emissione del diodo laser dipende anche dalla temperatura. Per minimizzare le fluttuazioni in frequenza causate dalla variazioni di temperatura tutto il sistema di diodo e reticolo è montato su un supporto a sua volta montato su una cella Peltier. Il supporto è costruito in ergal, una lega di alluminio che si contraddistingue per un'ottima resistenza meccanica per una buona conducibilità termica. Questo permette, insieme ad un termistore a  $10 \text{ k}\Omega$  che misura la temperatura del supporto e ad un circuito di controllo, di regolare e stabilizzare la temperatura del sistema con una precisione di circa  $0.01^\circ \text{ C}$ . L'intervallo di temperatura di esercizio del chip laser specificato dal costruttore è tra  $20^\circ$  e  $40^\circ \text{ C}$ , quindi è stata scelta una temperatura di esercizio di  $24^\circ \text{ C}$ . La cella Peltier ed il supporto del laser ECDL, sono a loro volta montati su una base massiccia di alluminio di dimensioni  $108 \times 79 \times 51$  mm (Fig. 3.2) e il tutto è chiuso in una scatola di alluminio al fine di minimizzare le vibrazioni dovute al rumore acustico e la sensibilità alle correnti d'aria.

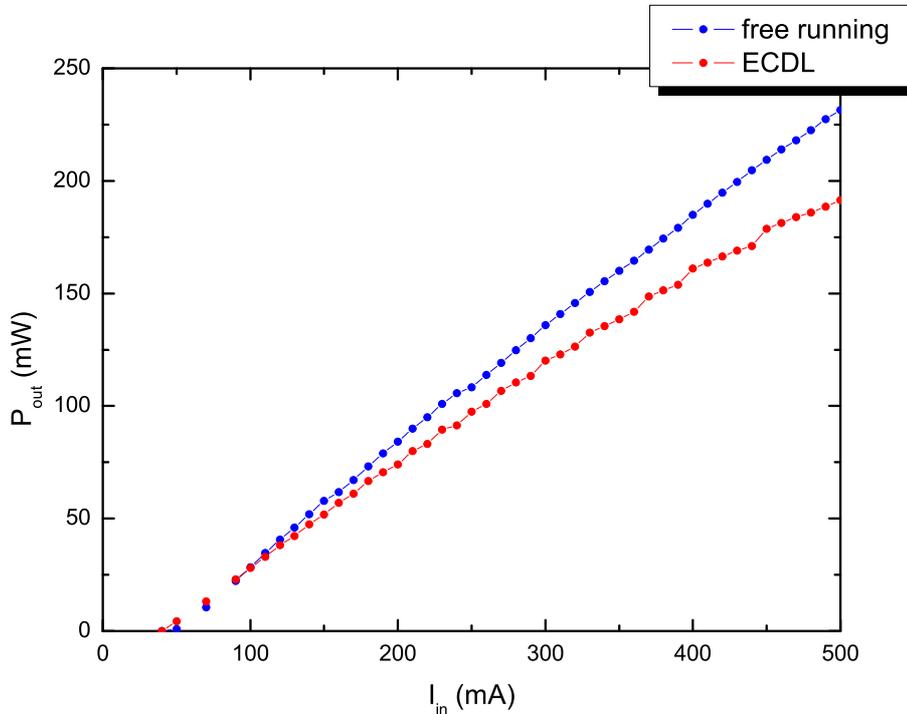


Figura 3.5: Andamento della potenza di emissione del laser a 1156 nm in funzione della corrente di alimentazione in free running e in cavità.

Sul chip laser sono state fatte delle misure di caratterizzazione dell'emissione sia in cavità che in free running (cioè senza cavità esterna). I risultati sono illustrati in Fig. 3.5. Si osserva che la potenza emessa nel caso di diodo laser in cavità è più bassa della potenza emessa nel caso di diodo laser in free running: parte della potenza emessa dal diodo infatti viene diffratta dal reticolo nel primo ordine di diffrazione e reiniettata nel diodo per ottenere l'azione laser. In generale quindi il miglioramento delle prestazioni spettrali che si ha mettendo il diodo laser in una cavità esterna comporta una perdita di potenza di emissione.

In Fig. 3.6 è invece riportato l'andamento della potenza di emissione in funzione della corrente di alimentazione per diverse lunghezze d'onda di emissione dell'ECDL. Dato che il fondo scala del misuratore di lunghezze d'onda (lambda meter) a disposizione in laboratorio è di 1100 nm, la lunghezza d'onda di emissione è stata determinata inizialmente con un metodo geometrico, descritto in dettaglio in [29], consistente nel misurare in modo indiretto l'angolo tra l'ordine 0 e l'ordine -1 di diffrazione e ricavare la lunghezza d'onda in base all'equazione (3.2). Una misura più fine della lunghezza d'onda sarà poi possibile grazie alla duplicazione in frequenza. Si può osservare come le curve

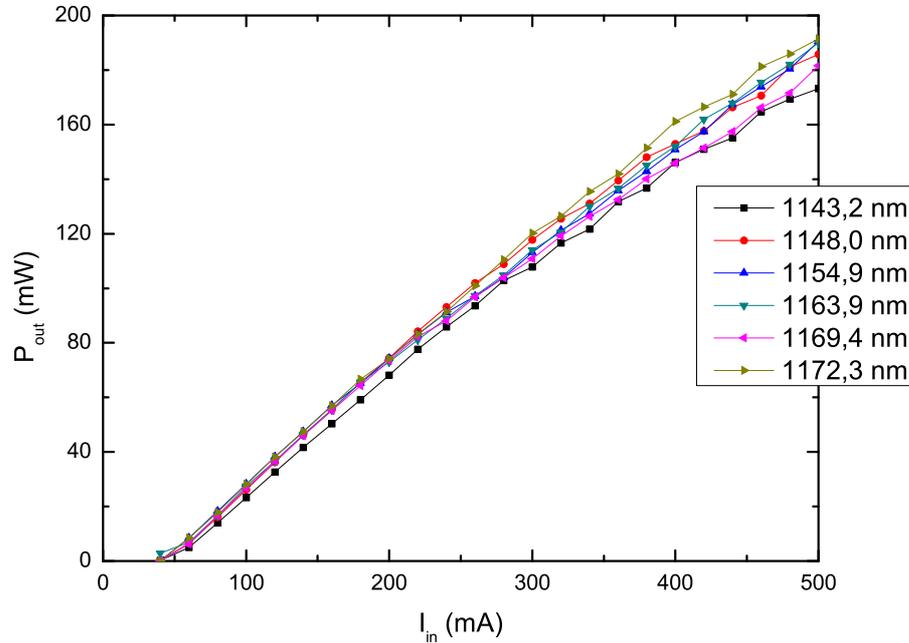


Figura 3.6: Andamento della potenza di emissione del laser in cavità esterna in funzione della corrente di alimentazione per diverse lunghezze d'onda tra 1143 e 1172 nm.

abbiano un andamento tra loro compatibile: le potenze di emissione alle varie lunghezze d'onda risultano sostanzialmente analoghe fino a lunghezze d'onda di oltre 10 nm sia superiori che inferiori alla lunghezza d'onda d'interesse, cioè i 1156 nm, e questo assicura di operare in una zona sostanzialmente al centro dell'intervallo di emissione.

Sono state inoltre eseguite misure di caratterizzazione del modo spaziale di emissione del laser. Il diodo laser infatti emette in modo molto asimmetrico tra direzione orizzontale e verticale a causa dell'asimmetria della regione ottica del laser. In particolare l'asse veloce (verticale rispetto al piano di lavoro) ha una divergenza di circa  $35^\circ$ , mentre l'asse lento (orizzontale) di circa  $6^\circ$ . Queste caratteristiche di emissione ottica astigmatica non consente di ottenere un fascio collimato in entrambe le direzioni orizzontale e verticale con la sola ottica di collimazione all'interno dell'ECDL. Come già accennato in precedenza quindi, la lente di collimazione è stata sistemata in modo tale da collimare la sola direzione verticale. È stato quindi necessario determinare il waist orizzontale e quello verticale per scegliere delle lenti cilindriche opportune in modo da collimare anche la direzione orizzontale del fascio. I risultati e la discussione di tali misure sono illustrati in [29]. Questo astigmatismo comporta comunque un modo spaziale del fascio poco pulito: nella parte

periferica della sezione del fascio in direzione verticale è infatti presente una modulazione di intensità, causata probabilmente da un effetto di diffrazione dovuto alla forte divergenza verticale del fascio che comporta un'incidenza su zone periferiche della lente di collimazione.

## 3.2 Cavità di duplicazione

Il passo successivo all'assemblaggio del laser ECDL è la costruzione della cavità di duplicazione. La duplicazione di frequenza è infatti un fenomeno tanto più efficiente tanto maggiore è la potenza della radiazione incidente sul mezzo non lineare. L'impiego di una cavità fa sì che la potenza incidente sul cristallo non lineare sia molto maggiore che nel caso di singolo passaggio aumentando così l'efficienza di conversione.

La cavità assemblata è del tipo *symmetrical bow tie*, descritto nella sezione 2.1.4. Si preferisce questo tipo di cavità rispetto ad un risonatore Fabry-Perot essenzialmente per due motivi: innanzitutto in questo tipo di cavità viene prodotto un solo fascio di seconda armonica invece dei due fasci contropropaganti che si originano in un risonatore ad onda stazionaria; inoltre si ha una più piccola retroriflessione sul laser di iniezione a causa del fatto che il fascio incide sullo specchio di ingresso non perpendicolarmente ma con un certo angolo.

La cavità (Fig. 3.7) è costituita da due specchi piani, un accoppiatore d'ingresso (*input coupler*) con riflettività del 95% a 1156 nm e uno con riflettività 99.9% a 1156 nm montato su un cristallo piezoelettrico che permette di variare finemente la lunghezza della cavità, e due specchi sferici con raggio di curvatura  $R = 100$  mm, anch'essi con riflettività del 99.9% a 1156, ma con alta trasmittività a 578 nm. Tra i due specchi sferici è collocato il cristallo non lineare. Compatibilmente con i vincoli dati dalle limitate possibili posizioni degli specchi e dal raggio di curvatura degli specchi disponibili, le distanze tra gli specchi sono state scelte in modo da avere un buon focusing del fascio sul cristallo di duplicazione posto tra i due specchi sferici. Il fascio può essere infatti focalizzato in diversi modi sul cristallo. A seconda del rapporto tra la lunghezza di Rayleigh e la lunghezza del cristallo si possono individuare tre tipi di focalizzazione:

- se il waist e la lunghezza di Rayleigh sono troppo piccoli e quindi il fascio è fortemente focalizzato (*strong focusing*), questo si allarga rapidamente all'interno del cristallo e l'intensità locale non è più sufficientemente alta da contribuire al fenomeno di SHG nelle zone periferiche. In questo caso non tutta la lunghezza del cristallo viene sfruttata in modo adeguato.

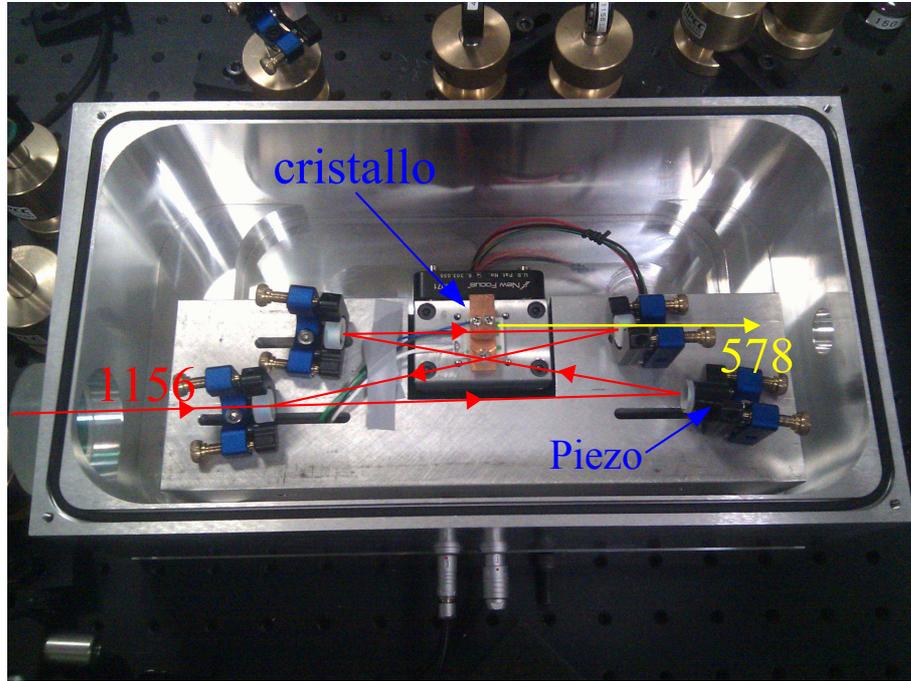


Figura 3.7: Foto della cavità di duplicazione all'interno del sistema da vuoto (vedi sezione 3.3). È rappresentato il percorso del fascio laser infrarosso e il fascio laser a 578 nm in uscita.

- Se invece il waist e la lunghezza di Rayleigh sono invece troppo grandi e quindi il fascio è scarsamente focalizzato (*weak focusing*), a parità di potenza di ingresso l'intensità locale in tutto il sistema è bassa e il fenomeno di SHG poco efficiente.
- La condizione di migliore efficienza di conversione si ha quando la lunghezza del cristallo è uguale a 5.68 volte la lunghezza di Rayleigh del fascio [24].

Dal raggio di curvatura degli specchi e dalle distanze relative tra di essi, i valori di waist dei modi della cavità stimati dalle formule in sezione 2.1.4 sono di  $\sim 300 \mu\text{m}$  tra i due specchi piani e di  $\sim 50 \mu\text{m}$  tra i due specchi sferici. Noti questi valori e noti i parametri del fascio emesso dall'ECDL, sono state scelte le ottiche opportune per ottenere il miglior accoppiamento della distribuzione spaziale del campo elettrico del fascio con i modi del risonatore (*mode matching*). Per minimizzare il numero di modi non  $\text{TEM}_{00}$  è stato necessario inserire lungo il percorso del laser un pinhole che fungesse da filtro spaziale per pulire il modo del laser da iniettare in cavità. Per evitare retroriflessioni sul laser da parte della cavità e dei vari elementi ottici

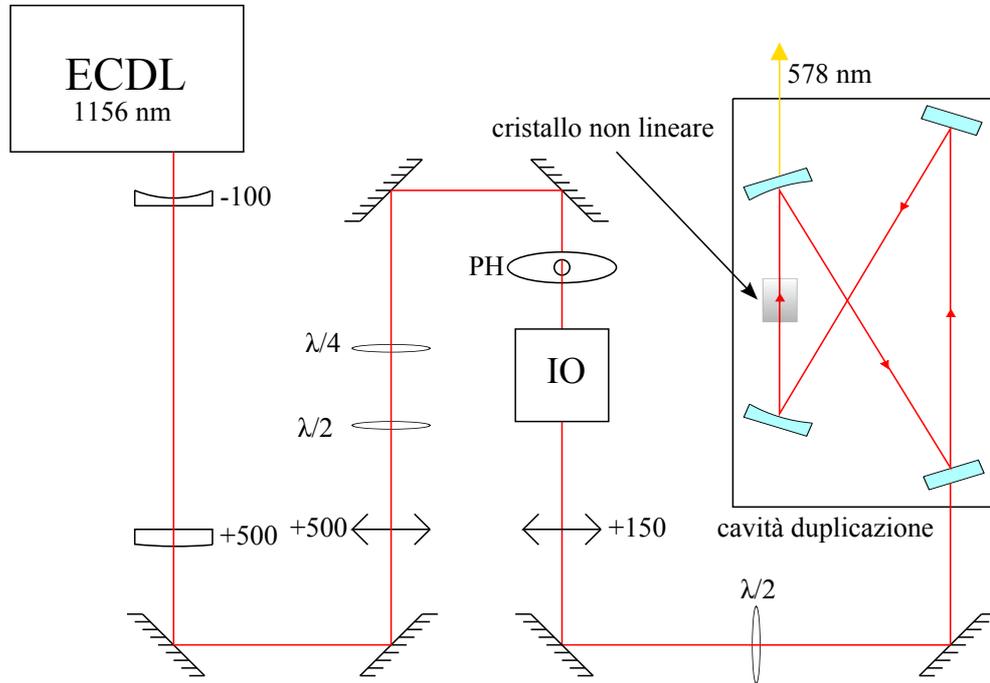


Figura 3.8: Rappresentazione del sistema laser costruito. Le due lenti cilindriche collimano il fascio uscente dall'ECDL nella direzione orizzontale (parallela al piano della figura), le due lenti con focale 500 mm e 150 mm formano il telescopio per il mode matching della cavità. IO è l'isolatore ottico. PH è un pinhole che è stato necessario utilizzare per pulire il modo spaziale del laser ed ottenere un miglior mode matching.

è stato montato un isolatore ottico con un'efficienza di trasmissione del 93% e un'attenuazione sui fasci riflessi di 34 dB. La configurazione ottenuta è illustrata in Fig. 3.8.

Il cristallo non lineare impiegato per la generazione di seconda armonica è un cristallo di Niobato di Litio ( $\text{LiNbO}_3$ ) drogato al 5% con Ossido di Magnesio ( $\text{MgO}$ ) prodotto dalla ditta HC Photonics. Il drogaggio è necessario per alzare la soglia di danneggiamento dovuto ad effetti fotorefrattivi, altrimenti troppo bassa per lavorare anche a medie potenze. Il cristallo, di dimensioni  $10 \text{ mm} \times 3.8 \text{ mm} \times 0.5 \text{ mm}$ , è diviso longitudinalmente in tre sezioni con diverso periodo di polig,  $8.8 \mu\text{m}$ ,  $8.9 \mu\text{m}$  e  $9.0 \mu\text{m}$ , tutti vicini al valore teorico stimato in [29] a partire dai valori dell'indice di rifrazione straordinario  $n_e$  [31] e dalle lunghezze d'onda desiderate, pari a  $\Lambda = (8.973 \pm 0.001) \mu\text{m}$ . Siccome il periodo di poling ottimale per la duplicazione di una certa frequenza dipende dalla temperatura del cristallo, questa è mantenuta costante da un sistema analogo al sistema che stabilizza la temperatura dell'ECDL:

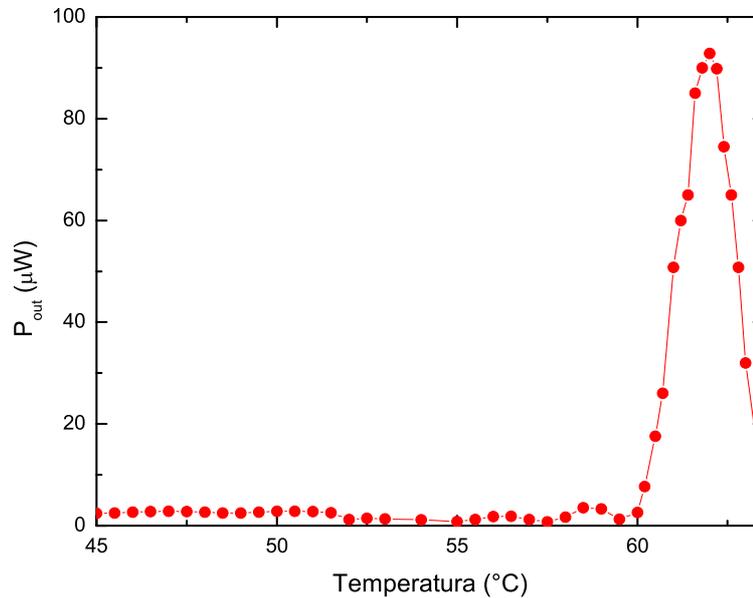


Figura 3.9: Potenza a 578 nm in uscita dal cristallo in singolo passaggio in funzione della temperatura del cristallo e a potenza incidente costante. È evidente un picco di efficienza a 62° C.

il cristallo è montato in un supporto in rame la cui temperatura è misurata con un sensore di temperatura NTC e stabilizzata tramite un circuito di controllo e una cella Peltier con una precisione di 0.01° C. Cristallo e fascio sono allineati in modo da utilizzare la sezione centrale del cristallo. Al fine di massimizzare l'efficienza di conversione, all'esterno della cavità è collocata una lamina  $\lambda/2$  per ruotare la polarizzazione del fascio entrante in cavità e renderla parallela all'asse straordinario del cristallo.

Per verificare l'efficienza di duplicazione del cristallo non lineare sono state fatte delle misure in singolo passaggio. Per fare ciò lo specchio di uscita della cavità di duplicazione è stato rimosso, facendo così in modo che la luce laser non circolasse più in cavità ma semplicemente uscisse dopo un singolo passaggio nel cristallo non lineare. In questo caso la luce in uscita contiene sia una componente a 1156 nm che una componente a 578 nm, quindi al fine di minimizzare la componente infrarossa e misurare solo la potenza di luce visibile a 578 nm, il fascio è stato deviato da due specchi Thorlabs E02, altamente riflettenti nel visibile ma non nell'infrarosso, e poi misurato con un power meter.

Inizialmente è stata determinata l'efficienza di conversione in funzione della temperatura del cristallo, mantenendo costante la potenza d'ingresso in cavità. I risultati della misura sono riportati in Fig. 3.9. Si ha un un unico

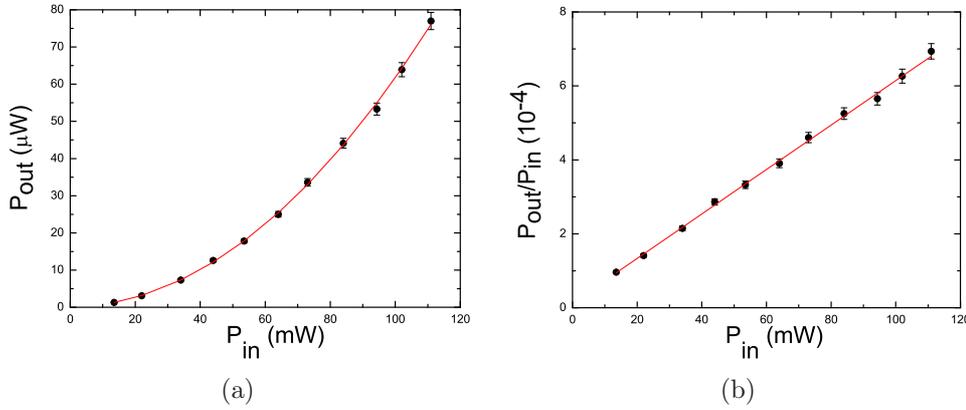


Figura 3.10: In figura (a) è riportato l'andamento della potenza in uscita a 578 nm in funzione della potenza d'ingresso a 1156 nm ed un suo fit parabolico. In figura (b) è riportato l'andamento dell'efficienza di conversione in unità di  $10^{-4}$  in funzione della potenza in ingresso ed un suo fit lineare.

picco di efficienza alla temperatura di  $62^\circ\text{C}$  alla lunghezza d'onda di operazione del laser. Portato il cristallo alla temperatura di massima efficienza, è stata misurata la potenza in uscita in funzione della potenza in ingresso. Per evitare salti di modo del laser, la potenza in ingresso è stata variata ruotando la lamina  $\lambda/2$  posta prima dell'isolatore ottico anziché variando la corrente di alimentazione del laser. La potenza in uscita è stata misurata con una testa al silicio Ophir PD300-3W, mentre la potenza in ingresso è stata misurata con una testa termica Ophir 10A-V1.1-SH, dato che la testa al silicio dà misure attendibili sono fino ad una lunghezza d'onda di 1100 nm. I risultati sono illustrati in Fig. 3.10. In figura (a) è riportato l'andamento della potenza in uscita a 578 nm in funzione della potenza incidente sul cristallo a 1156 nm. L'andamento è di tipo parabolico, come previsto dalle equazioni (2.11) e (2.9), secondo le quali il campo a frequenza doppia viene generato dalla polarizzazione degli atomi del mezzo dipendente dal quadrato del campo incidente. La curva in rosso è un fit parabolico del tipo  $y_0 + ax + bx^2$  con  $y_0 = 0.157$ ,  $a = 0.001$  e  $b = 0.006$  che si adatta molto bene ai punti sperimentali in nero. In figura (b) invece è riportato l'andamento dell'efficienza di conversione, cioè del rapporto  $P_{out}/P_{in}$ , in funzione della potenza in ingresso stessa. La scala verticale è in unità di  $10^{-4}$ . In questo caso l'andamento che si aspetta dalle equazioni è di tipo lineare. In rosso è riportato l'andamento di un fit lineare dei punti sperimentali in nero. Dal fit si ottiene un valore di efficienza pari a  $(6.01 \pm 0.07) \cdot 10^{-3} \text{ W}^{-1}$ , mentre il valore teorico stimato [29] a partire dal valore noto di  $d_{eff}$  e dalla lunghezza del cristallo e assumendo il caso di focalizzazione ideale del fascio sul cristallo è pari a  $6.859 \cdot 10^{-3}$

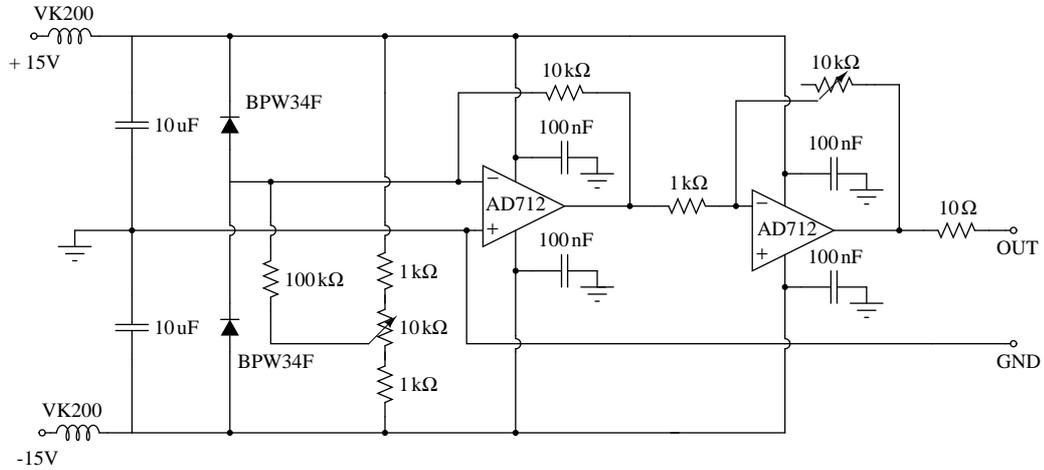


Figura 3.11: Schema del fotodiode differenziale assemblato. I fotodiode sono dei Thorlabs BPW34F.

$W^{-1}$ . È da considerare però che il caso di focalizzazione ideale è di solito irraggiungibile nella pratica e questo vale anche nel nostro caso: una focalizzazione ideale avrebbe richiesto un waist del fascio incidente sul cristallo di circa  $25 \mu\text{m}$ , mentre il fascio reale ha un waist di circa  $50 \mu\text{m}$ . Anche se non in perfetto accordo con il risultato teorico, il risultato raggiunto è molto soddisfacente dato che l'efficienza di conversione raggiunta è circa il 90 % di quella prevista dalla teoria nel caso ideale. È interessante notare quanto sia piccola l'efficienza di conversione in singolo passaggio: pur essendo vicini al valore teorico corrispondente alla migliore efficienza, alla massima potenza in ingresso raggiungibile abbiamo un'efficienza di conversione di  $\sim 6,9 \cdot 10^{-4}$ . Da qui la necessità di impiegare una cavità di duplicazione.

Lo specchio di ingresso della cavità è stato quindi riposizionato e la cavità è stata allineata sul modo longitudinale. La finesse della cavità è stata ricavata misurando il rapporto  $\Delta\nu/FSR$ , dove  $\Delta\nu$  è la larghezza a metà altezza (FWHM) del picco di trasmissione della cavità e  $FSR$  è il free spectral range della cavità. Quest'ultimo è facilmente ricavabile misurando le distanze fra gli specchi. Si ha che, in riferimento alla Fig. 2.4,  $L = d_1 + 2d_2 + d_3 + n_e d = (550 \pm 4) \text{ mm}$ , dove  $n_e = 2.14$  e  $d = 10 \text{ mm}$  sono l'indice di rifrazione straordinario e la lunghezza del cristallo non lineare. Di conseguenza il free spectral range è:

$$FSR = \frac{c}{L} = 545 \text{ MHz} \quad (3.4)$$

La finesse è stata determinata misurando su un oscilloscopio la FWHM dei

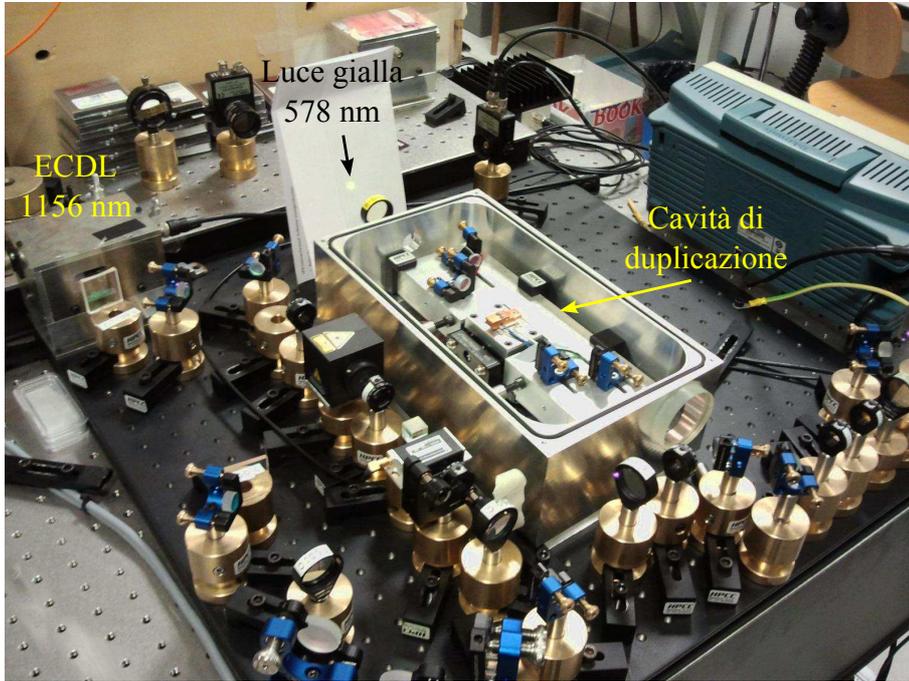


Figura 3.12: Foto del setup complessivo.

picchi e la distanza tra due picchi di trasmissione consecutivi e facendone il rapporto. Il risultato ottenuto è:

$$\mathcal{F} = \frac{\Delta\nu}{FSR} = 57 \pm 8 \quad (3.5)$$

La presenza di un elemento birfrangente in cavità consente la generazione di un segnale d'errore dispersivo di tipo Hänsch-Couillaud (vedi appendice A). Il fascio riflesso dalla cavità viene prelevato con uno specchio e fatto incidere, dopo essere passato da due lamine  $\lambda/2$  e  $\lambda/4$ , su un beam splitter polarizzatore che separa le due componenti lineare di polarizzazione orizzontale e verticale. Queste due componenti vengono inviate al fotodiode differenziale il cui schema è rappresentato in Fig. 3.11 la cui uscita è proprio il segnale d'errore desiderato. Il segnale così ottenuto rappresenta il segnale di ingresso di un controller PI, la cui uscita è collegata al piezoelettrico su cui è montato uno degli specchi piani della cavità di duplicazione. Le costanti di tempi e i guadagni degli stadi proporzionale e integrale sono stati aggiustati in modo che la condizione di risonanza sia mantenuta e la potenza in uscita massima, agganciando così la cavità al laser. Con una potenza infrarossa in ingresso di circa 110 mW, si misura una potenza della radiazione laser a 578 nm in uscita

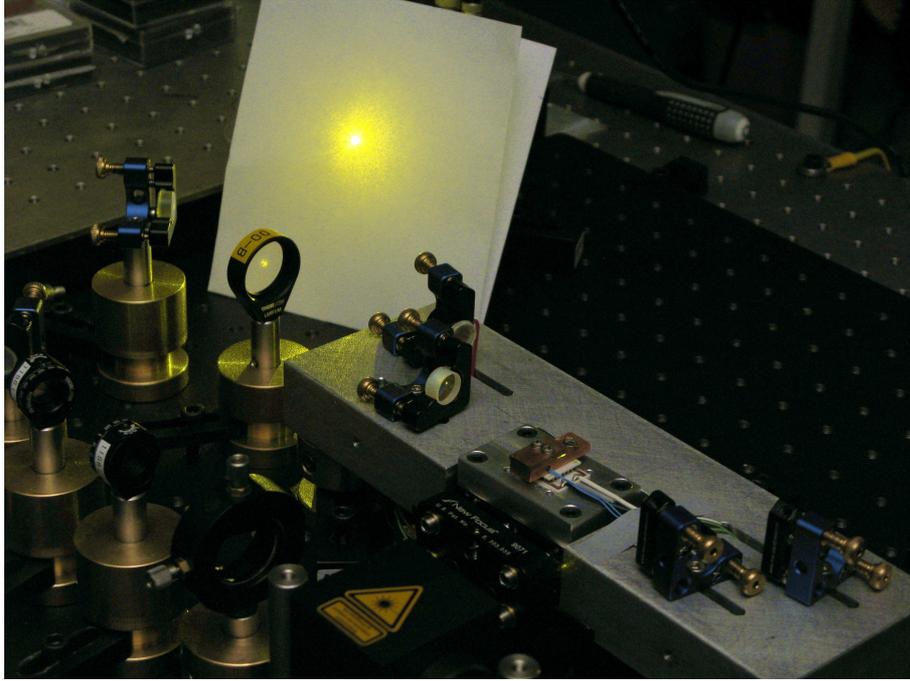


Figura 3.13: Foto della cavità di duplicazione. È visibile la luce gialla a 578 nm in uscita.

dalla cavità di circa 50 mW, raggiungendo così un'efficienza di conversione di circa 45 %.

Questo risultato rappresenta a nostra conoscenza la maggiore potenza ottenuta a questa lunghezza d'onda ed è un ottimo punto di partenza per la soddisfazione dei requisiti esposti nella sezione 1.3.

Impiegando la cavità come trasduttore frequenza-ampiezza è stato possibile effettuare anche una prima misura della larghezza di riga relativa alla cavità del laser non stabilizzato. Tramite il piezoelettrico della cavità il segnale trasmesso dalla cavità viene portato a circa metà del massimo, sul fianco quindi della riga di trasmissione. Il segnale rilevato dal fotodiode può essere monitorato su un oscilloscopio che misura il valore  $V_{\text{RMS}}$  del rumore presente. Per convertire questo rumore RMS in rumore in frequenza è quindi sufficiente monitorare sempre con un oscilloscopio una spazzata della cavità e misurare, sulla parte lineare del fianco di un picco di trasmissione, il tempo  $\Delta t_{\text{RMS}}$  corrispondente ad un voltaggio  $V_{\text{RMS}}$  e il tempo  $\Delta t_{\text{FSR}}$  necessario per coprire un FSR (Fig. 3.14). Il rumore in frequenza corrispondente al  $V_{\text{RMS}}$  misurato può essere quindi semplicemente ricavato calcolando:

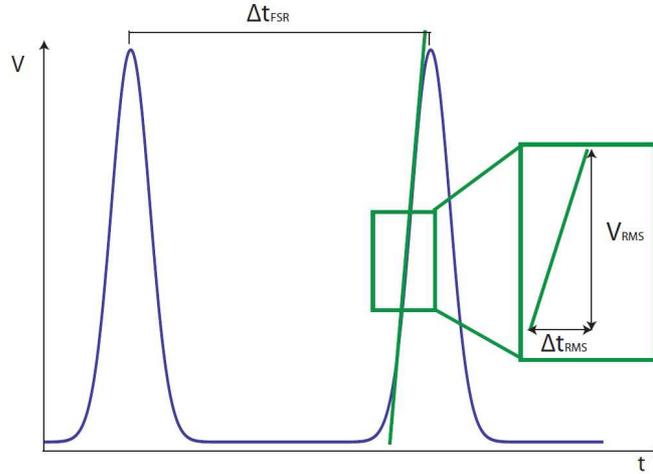


Figura 3.14: Metodo utilizzato per la stima della larghezza di riga dell'ECDL. I picchi del segnale di trasmissione sono allargati rispetto al caso reale per una più facile comprensione delle grandezze  $V_{RMS}$ ,  $\Delta t_{RMS}$  e  $\Delta t_{FSR}$ . Figura tratta da [29].

$$\Delta\nu = \frac{\Delta t_{RMS}}{\Delta t_{FSR}} \cdot FSR \quad (3.6)$$

Sebbene la larghezza dipenda dal modo specifico, il valore medio della larghezza di riga è pari a  $(700 \pm 100)$  kHz su un tempo di acquisizione di 100 ms.

### 3.3 Sistema da vuoto

Uno dei primi problemi affrontati nell'aggancio del laser alla cavità è stato un accoppiamento bistabile di laser e cavità in corrispondenza di alcuni modi di emissione dell'ECDL. Agganciare la cavità a questi modi del laser risulta infatti difficoltoso in quanto presentano un'instabilità tale da non poter essere compensata dal sistema di controllo per ampiezza e frequenza, rendendo impossibile un aggancio soddisfacente della cavità al laser. Questo comportamento bistabile è stato osservato in due modi. Innanzitutto si è osservato con una scansione della cavità che alcuni modi presentavano dei picchi di trasmissione distorti e asimmetrici (Fig. 3.15 (a)). Inoltre avvicinandosi finemente in una direzione al massimo di trasmissione il segnale saliva gradualmente fino ad un massimo per poi scendere bruscamente a zero, mentre nella direzione opposta si osservava un salto del segnale ad un massimo di entità inferiore rispetto alla direzione iniziale e poi una discesa graduale fino a zero.

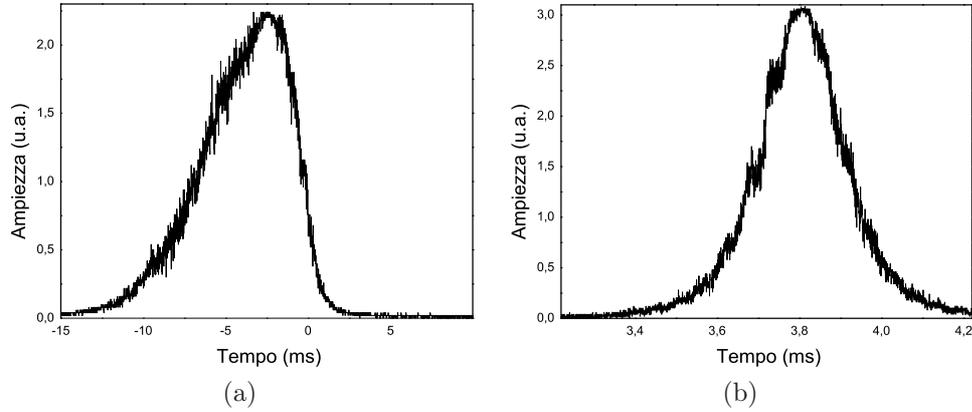


Figura 3.15: Picco di trasmissione della cavità di duplicazione per un modo bistabile (a) e uno non bistabile (b).

Una prima ipotesi era che potesse trattarsi di qualche effetto legato alla presenza del cristallo non lineare, tuttavia questo comportamento è stato osservato anche in assenza di cristallo. È stato quindi ipotizzato che questo effetto potesse essere provocato dal vapor acqueo presente nell'aria. L'acqua infatti presenta un certo numero di righe di assorbimento rotovibrazionali nell'intervallo di lunghezza d'onda intorno ai 1156 nm. In Fig. 3.16 è riportato lo spettro di assorbimento dell'acqua, ricavato dal database HITRAN, nell'intervallo da 1155.4 nm a 1157.0 nm. Come si può vedere sono presenti alcuni picchi di assorbimento, uno dei quali particolarmente pronunciato. Si può mostrare [32] che nel caso in cui sia presente un mezzo con una riga di assorbimento a frequenza  $\omega_0$  in una cavità ottica in cui viene iniettato un laser a frequenza  $\omega_L$ , gli atomi del mezzo producono dopo un passaggio del fascio in cavità uno sfasamento del campo, in unità di frequenza di risonanza della cavità, dato da:

$$\varphi_1 = g^2 N \frac{\delta}{\Gamma^2 + \delta^2 + 2\Gamma^2 S} \quad (3.7)$$

dove  $N$  è il numero di atomi,  $g$  la costante di accoppiamento luce-mezzo,  $\Gamma$  la semilarghezza naturale della transizione atomica,  $\delta = \omega_0 - \omega_L$  il detuning e  $S = I_{intra}/I_{sat}$ , con  $I_{intra}$  e  $I_{sat}$  rispettivamente intensità in cavità e intensità di saturazione, è il parametro di saturazione alla risonanza. Sviluppando lo sfasamento in potenze del parametro di saturazione, si ottiene [32] che questo contiene un termine non lineare nel campo elettrico dato da:

$$\varphi_{NL} = -\frac{2g^2 N \gamma}{\delta^3} S \quad (3.8)$$

il che implica uno sfasamento funzione dell'intensità circolante in cavità.

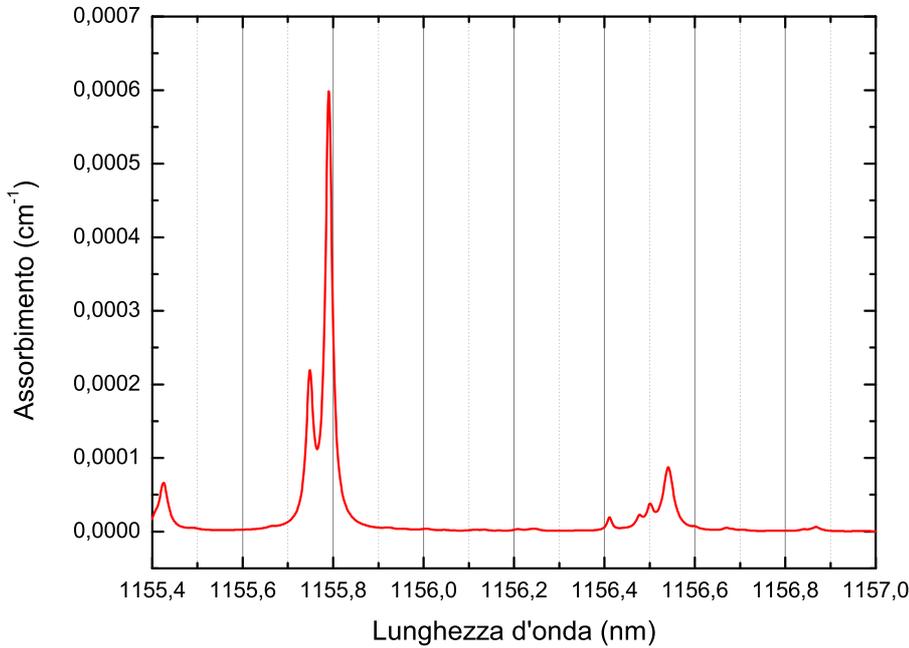


Figura 3.16: *Spettro di assorbimento della molecola di  $H_2O$  tra 1155.4 nm e 1157.0 nm. L'assorbimento sulla scala verticale è misurato nell'unità definita da HITRAN come  $cm^{-1}$ .*

Questo è un effetto di tipo Kerr, corrispondente al fatto che il mezzo introduce nel campo che lo attraversa uno sfasamento proporzionale alla sua intensità. Per spiegare qualitativamente quello che accade, si pensi di variare la tensione sul cristallo piezoelettrico della cavità in modo da accorciarla per portarla in risonanza. Avvicinandosi alla risonanza l'intensità in cavità inizia a crescere, lo sfasamento aumenta come se fosse stato causato da un allungamento del cammino ottico del laser e quindi della cavità. Questi due effetti competono, e perché l'intensità cresca ulteriormente in cavità è necessario agire sul piezoelettrico e accorciare ulteriormente la cavità per bilanciare l'effetto di allungamento dato dall'effetto Kerr. Quando l'intensità raggiunge il massimo, cessa l'aumento di cammino ottico per effetto Kerr e il sistema è stabile. Se un ulteriore accorciamento della cavità con il piezoelettrico porta la cavità un poco fuori risonanza, l'intensità in cavità diminuisce, il minor sfasamento comporta un ulteriore accorciamento della lunghezza effettiva della cavità. L'effetto combinato dei due accorciamenti porta bruscamente la cavità fuori risonanza. Avvicinandosi alla riga in senso opposto invece, cioè allungando con il piezoelettrico la cavità, i due effetti lavorano insieme e quando ci si avvicina alla risonanza, l'effetto combinato dei due allungamenti fa sì che si superi il massimo di intensità circolante e ci

si stabilizzi ad un valore più basso. Allungando ulteriormente la cavità con il piezoelettrico, l'intensità diminuisce insieme alla lunghezza del cammino ottico per effetto Kerr e i due effetti lavorano in senso opposto portando ad una lenta diminuzione dell'intensità all'aumento della lunghezza della cavità. La presenza di questi due stati stabili è un fenomeno che può trovare applicazioni interessanti, quali ad esempio la realizzazione di stati squeezed in fase della luce [32, 33], tuttavia in questo caso specifico costituisce un problema.

Per verificare questa ipotesi, è stata verificata la bistabilità o meno per diverse lunghezze d'onda di emissione del laser. I risultati sono riepilogati nella seguente tabella:

$\lambda$ (nm)	Bistabilità (SI/NO)
1155.700	NO
1155.766	SI
1155.788	SI
1155.858	NO
1155.904	NO
1155.990	NO
1156.316	NO
1156.540	SI
1156.746	NO
1156.844	NO

La lunghezza d'onda di emissione è stata determinata misurando la lunghezza d'onda della luce uscente dalla cavità di duplicazione e poi raddoppiandola. Come si può vedere le lunghezze d'onda a cui si osserva un comportamento bistabile sono prossime a quelle lunghezze d'onda a cui si osserva un picco di assorbimento e l'ipotesi che la causa della bistabilità sia il vapor acqueo presente nell'atmosfera trova un buon riscontro sperimentale. A 1155.788 nm il comportamento è particolarmente critico: si osserva la riga di trasmissione cambiare forma tra scansioni successive, e questo può essere interpretato come causato dal fatto che tale lunghezza d'onda cade in prossimità due diverse righe di assorbimento adiacenti. È da notare il fatto che alla lunghezza d'onda corrispondente alla transizione  $^1S_0 \rightarrow ^3P_0$  dell'atomo di Itterbio, pari a 578,421221 nm e corrispondente a una lunghezza d'onda di 1156,842442 nm nell'infrarosso da duplicare e molto vicina all'ultima riga della tabella, presenta solo tracce di un comportamento bistabile. Tuttavia, dati gli elevati requisiti di precisione e stabilità richiesti per eccitare la transizione, è opportuno eliminare tale effetto.

Supponendo quindi di poter attribuire al vapor acqueo atmosferico il comportamento bistabile della cavità, la soluzione più immediata e facilmente

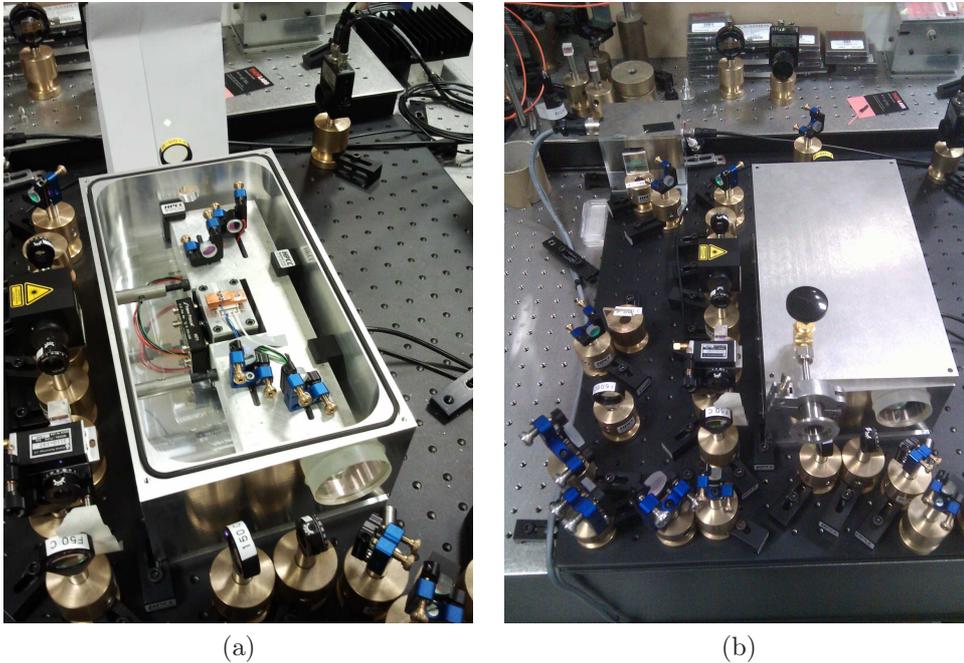


Figura 3.17: Foto della sistema da vuoto all'interno del quale è inserita la cavità aperto (a) e chiuso (b).

applicabile è quella di inserire la cavità in un sistema da vuoto. Tale soluzione peraltro è già stata adottata per altri laser presenti in laboratorio con effetti positivi in termini di stabilità e insensibilità alle correnti d'aria e alle vibrazioni acustiche. Foto della scatola da vuoto utilizzata sono rappresentate in Fig. 3.17. Due finestre di vetro permettono l'ingresso e l'uscita dei fasci laser. La finestra d'ingresso Thorlabs WG12012-C ha un coating antiriflesso di tipo C ed è più grande (2 pollici) per permettere l'uscita del fascio riflesso dalla cavità impiegato per la generazione del segnale d'errore. Per il fascio d'uscita è sufficiente una finestra più piccola Thorlabs WG11050-A, con coating antiriflesso di tipo A. Le connessioni elettriche degli elementi della cavità (piezoelettrico, sonda NTC e fornetto del cristallo) passano attraverso dei connettori da vuoto Fischer DEE 102 non visibili in figura. La cavità è costruita in modo tale da poter collocare la massiccia base degli specchi della cavità su quattro piccoli supporti ricavati da un foglio di *sorbothane* Thorlabs SB12B con spessore di 1/4 di pollice, materiale che una volta schiacciato è in grado di assorbire fino al 95.5 % dell'energia di impatto e poi riassumere la forma originaria, in grado quindi di smorzare le vibrazioni acustiche e disaccoppiare così la cavità da buona parte delle vibrazioni acustiche esterne a cui è soggetta la scatola. Questo effetto di reiezione delle vibrazioni acustiche

è poi ulteriormente intensificato dal vuoto che viene creato all'interno della cavità.

Il vuoto all'interno della scatola è realizzato con una pompa a membrana PVR modello M71BX-08 in grado di raggiungere un livello di vuoto dell'ordine di  $10^{-2}$  Torr. A questo punto è stato verificato se la cavità in vuoto presentasse ancora bistabilità o meno a diverse lunghezze d'onda. I risultati sono riportati nella seguente tabella:

$\lambda$ (nm)	Bistabilità (SI/NO)
1155.586	NO
1155.604	NO
1155.660	NO
1155.778	NO
1155.826	NO
1155.844	NO
1156.034	NO
1156.484	NO
1156.668	NO
1156.866	NO

Come si può vedere, a nessuna lunghezza d'onda è stato osservato un comportamento bistabile, solo deboli tracce alla lunghezza d'onda di 1155.778 nm corrispondente al grosso picco di assorbimento in Fig. 3.16. L'aver collocato la cavità in vuoto, seppur non molto spinto, ha quindi consentito di eliminare le cause del comportamento bistabile della cavità, avvalorando ulteriormente l'ipotesi di un effetto dovuto all'assorbimento da parte del vapor acqueo. Come nel caso degli altri laser inoltre, inserire la cavità nel sistema da vuoto ha portato dei miglioramenti per quanto riguarda la stabilità e l'insensibilità del sistema ai disturbi quali correnti d'aria, vibrazioni acustiche e variazioni di temperatura.

Abbiamo visto come sia stato possibile realizzare un sistema laser in grado di raggiungere una potenza di radiazione a 578 dell'ordine di 50 mW con una larghezza di riga dell'ordine dei 700 kHz. Nel capitolo successivo sarà illustrato il processo seguito per raffinare le prestazioni spettrali del sistema, fino a raggiungere una larghezza di riga relativa alla cavità di riferimento dell'ordine di qualche kHz, cioè due ordini di grandezza inferiore rispetto a quella del sistema non stabilizzato.

# Capitolo 4

## Riduzione della larghezza di riga

In questo capitolo vedremo come è stato possibile restringere la larghezza di riga di emissione del sistema laser da circa 700 kHz fino al livello di qualche kHz. Seppur ancora lontani dai requisiti esposti nella sezione 1.3, il sistema ottenuto rappresenta un ottimo punto di partenza per ulteriori interventi mirati a migliorare le prestazioni spettrali del dispositivo fino ad ottenere una larghezza di riga dell'ordine della decina di Hz.

### 4.1 Configurazione generale

In questa sezione è illustrato lo schema generale che sarà impiegato per la stabilizzazione della frequenza di emissione del sistema laser. Come si è detto, l'ECDL ha una larghezza di riga dell'ordine del MHz e per raggiungere il valore desiderato per la codifica di qubit, pari a  $\sim 10$  Hz, è necessario guadagnare circa 5 ordini di grandezza. Per fare questo è stata elaborata una configurazione che prevede l'impiego di stadi successivi per la riduzione della larghezza di riga, sull'esempio di come fatto per altri dispositivi laser con analoghe prestazioni spettrali [34].

Una rappresentazione schematica della configurazione è illustrata in Fig. 4.1. Il fascio laser uscente dall'ECDL viene inviato alla cavità di duplicazione ed una piccola parte di esso viene prelevata ed inviata ad una seconda cavità, chiamata cavità di *prestabilizzazione*. La cavità di duplicazione fornisce un segnale d'errore che viene impiegato per una prima correzione ad ampia banda delle fluttuazioni della frequenza di emissione dell'ECDL. Si può infatti dimostrare [24] che una cavità ottica si comporta come un sistema del primo ordine con banda passante pari a  $\omega_n = \delta\omega/2$ , dove  $\delta\omega$  è la larghezza della riga di trasmissione della cavità. La larghezza di riga della cavità di duplicazione è data da  $\delta\omega = FSR/\mathcal{F} \sim 9$  MHz e questo in linea di principio garanti-

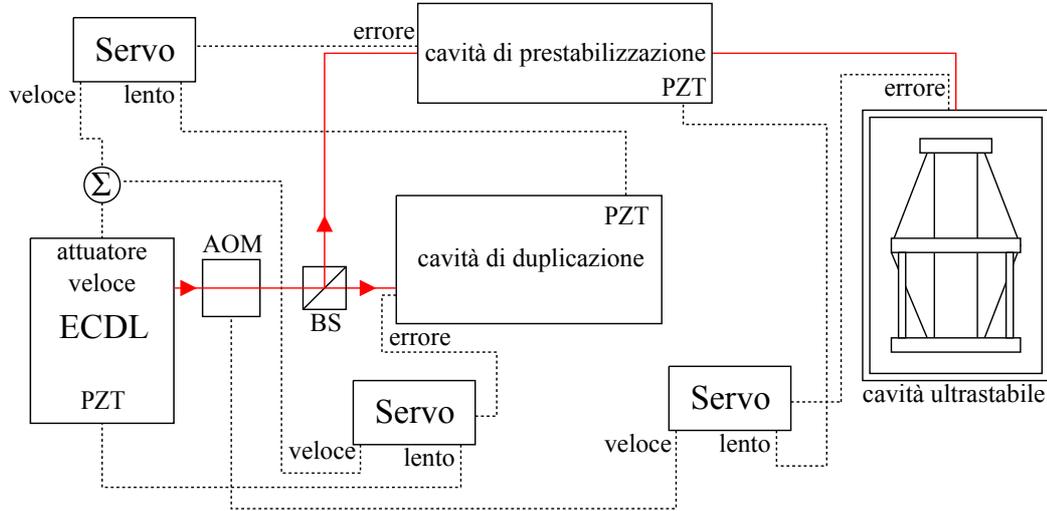


Figura 4.1: Schema generale della configurazione laser per la riduzione della larghezza di riga dell'ECDL. Nello schema sono rappresentati solo gli elementi più importanti.

sce quindi una banda di aggancio dell'ordine di 5 MHz. La parte lenta del segnale d'errore fornito dalla cavità di duplicazione è impiegata per correggere le fluttuazioni in frequenza del laser agendo sul piezoelettrico dell'ECDL mentre la parte veloce agisce su un attuatore ad alta frequenza.

Come sarà chiaro in seguito, il contributo più importante alla larghezza di riga del laser è dato dal rumore nell'intervallo dalla DC alle frequenze acustiche. Una cavità a bassa finesse, pur consentendo un'ampia banda d'aggancio, è caratterizzata da un basso guadagno alle basse frequenze a causa sostanzialmente della scarsa pendenza del segnale dispersivo in corrispondenza dei picchi di trasmissione. Per avere maggiore guadagno alle basse frequenze è quindi necessario ricorrere a cavità con finesse più elevate e per questo motivo si impiega una cavità di prestabilizzazione. La cavità di prestabilizzazione impiegata è attualmente in fase di test e ha un free spectral range di 1.5 GHz e una finesse teorica di 10000 (vedi sezione 4.5), da cui si ottiene una banda d'aggancio teorica dell'ordine dei 100 kHz ed un guadagno alle basse frequenze più alto di un fattore dell'ordine di 100 rispetto al guadagno della cavità di duplicazione. Il segnale d'errore ricavato con metodo Pound-Drever-Hall [35, 36] dalla cavità di prestabilizzazione viene impiegato per correggere le fluttuazioni di frequenza del laser agendo con la sua parte lenta sul piezoelettrico della cavità di duplicazione e sommando la sua parte veloce alla parte veloce del segnale d'errore della cavità di duplicazione.

Per ottenere ulteriore guadagno in DC e avere un riferimento assoluto di

frequenza, il fascio gaussiano uscente dalla cavità di prestabilizzazione viene inviato ad una cavità ultrastabile il cui segnale d'errore interviene per un'ulteriore stabilizzazione della frequenza di emissione agendo sul piezoelettrico della cavità di prestabilizzazione e su un modulatore acusto-ottico (AOM). Attualmente le caratteristiche di questa cavità sono in fase di discussione.

Nelle sezioni successive saranno esposti i risultati raggiunti con lo stadio di riduzione della larghezza di riga ad ampia banda basato sulla cavità di duplicazione. Vedremo come grazie alla cavità di duplicazione sia stato possibile mettere in luce le problematiche legati all'impiego della corrente di alimentazione come attuatore per la correzione ad alta frequenza della frequenza di emissione così come quelle legato all'impiego di un AOM. Queste problematiche hanno condotto allo sviluppo di una sorgente laser costituita da un ECDL con cavità lunga in cui la correzione veloce alla frequenza di emissione è possibile grazie all'impiego di un modulatore elettro-ottico (EOM) intracavità. Con questo dispositivo il primo stadio di riduzione della larghezza di riga si è rivelato molto efficace consentendo di ottenere un restringimento della larghezza di riga di emissione fino all'ordine di qualche kHz, ben due ordini di grandezza inferiore rispetto al valore di 700 kHz misurato nel capitolo precedente.

## 4.2 Modulazione tramite corrente di alimentazione

L'attuatore veloce per il controllo della frequenza di emissione di un diodo laser solitamente impiegato è la corrente di alimentazione. In questa sezione vedremo come questo non sia stato possibile per il diodo laser impiegato, probabilmente a causa di un problema intrinseco del chip laser a quantum dot.

Le misure illustrate in questa sezione sono state fatte con la configurazione illustrata in Fig. 3.8, usando la cavità di duplicazione stessa come discriminatore di frequenza. Il segnale d'errore viene inviato a due controller PID, uno dei quali controlla il piezoelettrico del reticolo di diffrazione dell'ECDL, l'altro è collegato all'ingresso  $V_{\text{mod}}$  di Fig. 3.4 ed è in grado di modulare direttamente la corrente di alimentazione del diodo laser. Dopo aver ottimizzato i parametri dei due controller PID, il segnale uscente dalla cavità di duplicazione osservato con un fotodiodo è molto rumoroso e presenta inoltre una modulazione alla frequenza di rete molto probabilmente causata da loop di massa. Utilizzando un generatore di corrente ILX Lightwave LDX-3620 in grado di operare a batteria è stato possibile svincolarsi almeno parzialmente

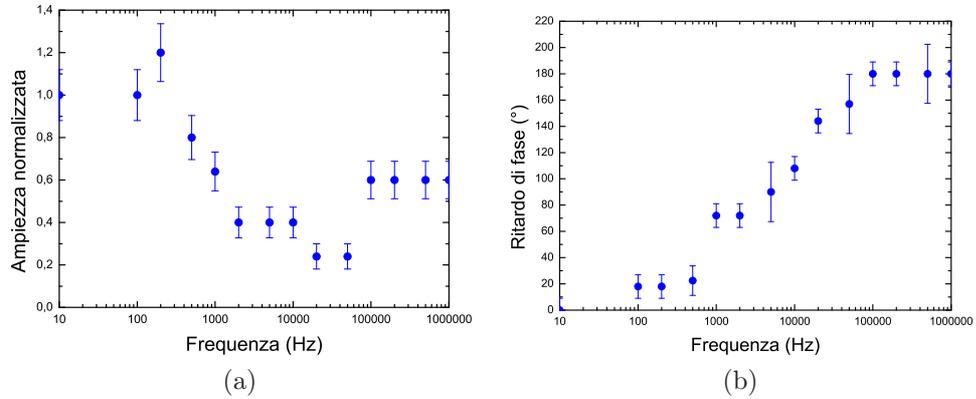


Figura 4.2: Ampiezza (a) e fase (b) della modulazione sul segnale trasmesso dalla cavità di duplicazione in risposta ad una modulazione sinusoidale della corrente di alimentazione.

dal rumore associato alla rete di alimentazione. Questo generatore si dimostra comunque migliore del Thorlabs LDC-240-C precedentemente utilizzato anche ad alta frequenza.

Per determinare l'efficacia della corrente di alimentazione nel correggere le fluttuazioni di frequenza di emissione del laser è stato osservato l'andamento sinusoidale del segnale sul fianco di un picco di trasmissione della cavità di duplicazione in risposta all'applicazione di un'onda sinusoidale all'ingresso  $V_{\text{mod}}$ , cioè ad una ipotetica modulazione sinusoidale della corrente di alimentazione. I diagrammi di ampiezza e fase ricavati sono riportati in Fig. 4.2. Si osserva uno sfasamento tra input e output da 0 a  $180^\circ$  nell'intervallo 1 kHz - 100 kHz e l'ampiezza si riduce anche di più di un fattore due rispetto alle basse frequenze.

Per cercare di determinare la causa del problema sono stati fatti numerosi test sul circuito di alimentazione sostituendo il diodo laser con una resistenza da  $3.3 \Omega$ , scelta in base al valore della resistenza dinamica del diodo laser che ad una corrente di alimentazione di 500 mA è di circa  $3 \Omega$ . È stato misurato l'andamento della differenza di potenziale ai capi della resistenza in risposta alla modulazione della corrente di alimentazione per il circuito in Fig. 3.4 e per sue numerose varianti ottenute sia cambiando i valori delle sue componenti sia sostituendo il transistor con altri trasduttori voltaggio-corrente. I migliori risultati sono stati riscontrati impiegando il transistor come trasduttore e sono riportati in Fig. 4.3. Come si può vedere, ampiezza e fase restano sostanzialmente costanti fino ad una frequenza di modulazione di 2 MHz.

Nell'ipotesi quindi di una caratteristica anomala del chip in uso, il diodo

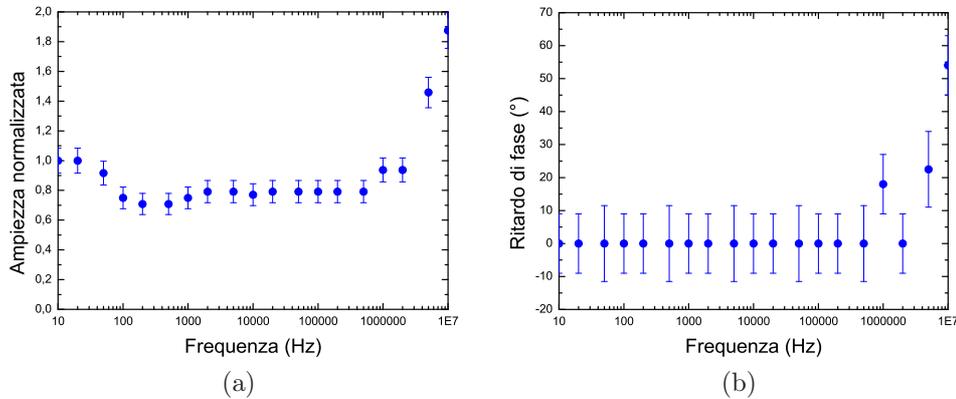


Figura 4.3: Ampiezza (a) e fase (b) della differenza di potenziale sinusoidale misurata ai capi della resistenza di test in sostituzione del diodo nel circuito di Fig. 3.4 in risposta ad una modulazione di corrente sinusoidale.

laser è stato sostituito con un altro chip dello stesso tipo. La modulazione in frequenza per questo nuovo diodo laser presenta tuttavia un comportamento analogo a quello osservato per il diodo laser precedente (Fig. 4.2). È importante notare come, in seguito, si sia venuti a conoscenza del fatto che un comportamento analogo è stato rilevato anche da altri gruppi che hanno utilizzato lo stesso chip per applicazioni simili [37, 38]. L'ipotesi più ragionevole è che questo tipo di risposta alla modulazione in corrente sia causata dalla natura del dispositivo laser a quantum dot. Nei diodi laser la variazione di corrente comporta in realtà, oltre che un effetto puramente elettronico, anche un effetto di tipo termico e questi due effetti portano a variazioni della frequenza di emissione del laser in senso opposto. La competizione tra i due effetti porta ad uno zero della funzione di trasferimento e poi a una inversione di fase di  $180^\circ$  nella risposta ad una modulazione di corrente tipicamente a frequenze di modulazione dell'ordine del MHz. È possibile che questo fenomeno si manifesti nel diodo laser in questione a frequenze di modulazione ben più basse, cioè intorno alle decine di kHz.

Questa inversione di fase caratteristica del diodo laser impedisce di ottenere un buon aggancio in frequenza mediante un'attuazione in corrente anche ottimizzando lo stadio di derivatore del controller PID in quanto si manifesta in un intervallo di frequenze (intorno ai 10 kHz) critico per ottenere delle buone prestazioni spettrali.

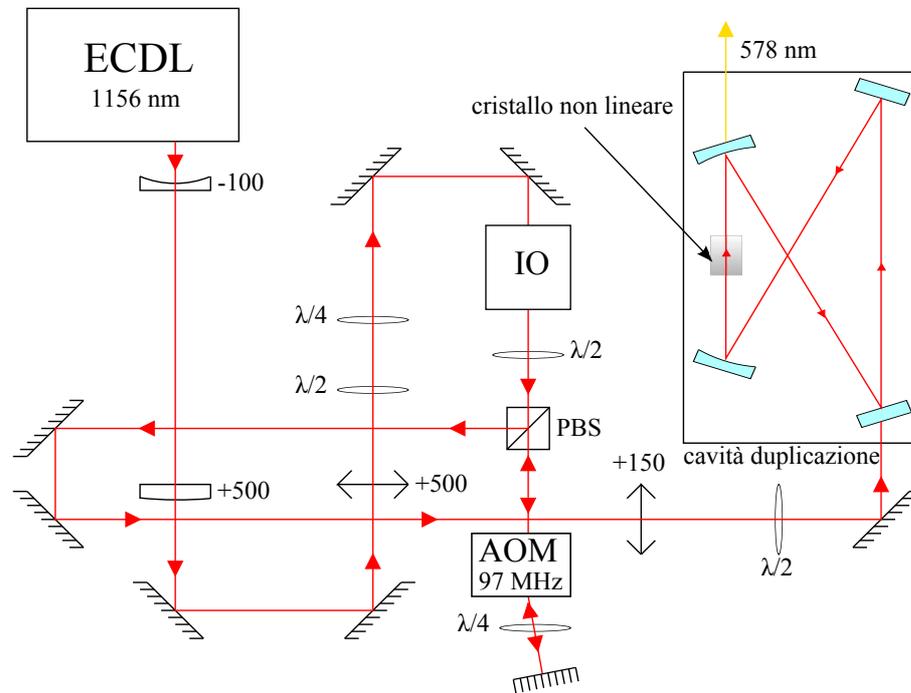


Figura 4.4: Schema adottato per le prove di modulazione in frequenza con AOM.

### 4.3 Modulazione con AOM

Appurato che la corrente non è un buon attuatore per la modulazione veloce della frequenza di emissione del laser, è stata presa in considerazione l'ipotesi di utilizzare un modulatore acusto-ottico per variare la frequenza del laser. L'AOM è un dispositivo che contiene un cristallo in cui l'applicazione di un campo elettrico oscillante a frequenza  $\nu_{\text{AOM}}$ , di solito una radiofrequenza, induce un'onda acustica con frequenza pari alla frequenza di oscillazione del campo. Quando della luce a frequenza  $\nu_0$  attraversa il cristallo i fotoni del fascio laser interagiscono con i fononi del cristallo. A seconda del numero e della direzione (vettore d'onda) dei fononi con cui i fotoni interagiscono, questi saranno deviati (diffratti) in modo diverso. La conservazione dell'energia impone che la frequenza del fotone uscente sia data da  $\nu_m = \nu_0 + m\nu_{\text{AOM}}$ , dove  $m$  è l'ordine di diffrazione. L'efficienza tipica di diffrazione agli ordini  $\pm 1$  può arrivare e superare l'80% una volta ottimizzata la posizione angolare del dispositivo. Applicando una modulazione alla frequenza di vibrazione dell'AOM è possibile quindi ottenere una modulazione di frequenza del fascio diffratto.

La configurazione di Fig. 3.8 è stata modificata in modo da poter inserire un AOM lungo il percorso del laser a 1156 nm, come illustrato in Fig. 4.4. È

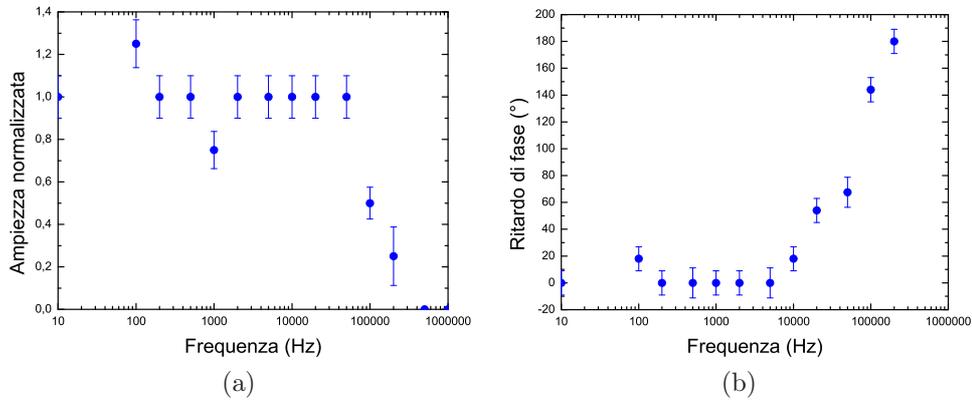


Figura 4.5: *Amplitude (a) e fase (b) della modulazione sul segnale trasmesso dalla cavità di duplicazione in risposta ad una modulazione sinusoidale della frequenza dell'AOM.*

stata adottata una configurazione in doppio passaggio per ridurre l'effetto di disallineamento dato dall'AOM: infatti non solamente la frequenza del fascio diffratto, ma anche l'angolo di diffrazione dipende dalla frequenza di vibrazione dell'AOM. L'AOM è regolato per funzionare intorno ad una frequenza di 97 MHz con un'efficienza sul primo ordine di diffrazione pari a 87 %. Al driver dell'AOM è stato poi applicato un segnale sinusoidale di ampiezza fissa ed è stata misurata l'ampiezza di modulazione sul segnale trasmesso dalla cavità e lo sfasamento tra la modulazione sul segnale trasmesso e la modulazione stessa applicata sull'AOM. I diagrammi di ampiezza e fase così ottenuti sono riportati in Fig. 4.5. Come si può vedere, l'ampiezza di modulazione del segnale trasmesso diviene trascurabile sopra i 100 kHz e nello stesso intervallo di frequenza la fase passa da 0 a 180°. L'AOM non risulta quindi in grado di modulare con efficacia la frequenza del laser sopra 100 kHz di frequenza di modulazione. Questa è in realtà una limitazione intrinseca del VCO Minicircuits R01S0 presente nel circuito del driver dell'AOM, che in linea di principio può essere sostituito. Tuttavia bisogna tenere conto del fatto che deviazioni sopra il MHz alla frequenza del laser comportano variazioni dell'angolo di diffrazione tali da disallineare sensibilmente la cavità nonostante la configurazione in doppio passaggio. Questo effetto è stato osservato agganciando con il piezoelettrico il laser alla cavità e variando la frequenza di vibrazione dell'AOM. Per evitare questo effetto sarebbe quindi necessario limitare il range di correzione compromettendo ulteriormente l'efficacia del loop di controllo.

## 4.4 ECDL con EOM intra-cavità

L'inefficienza osservata per il laser in questione nella modulazione in frequenza mediante corrente e/o AOM esterno ha condotto alla necessità di ridisegnare il sistema laser a 1156 nm "ab initio". L'idea è quella di cambiare il design della sorgente e di inserire un attuatore in cavità. In particolare vedremo come sia possibile controllare la frequenza di emissione del laser impiegando un diodo laser in configurazione ECDL con cavità di lunghezza dell'ordine di 15 cm all'interno della quale viene inserito un modulatore elettro-ottico.

Un EOM è un dispositivo basato su una cella di Pockels che permette di modificare la lunghezza ottica del cristallo di cui è composto per un determinato asse di propagazione mediante l'applicazione di un campo elettrico. Se inserito in una cavità, un dispositivo del genere permette di variare finemente la lunghezza della cavità stessa, dato che variando l'indice di rifrazione si ottiene una variazione del cammino ottico del laser. Una soluzione di questo tipo è stata adottata con successo in alcuni esperimenti [41–43]. Questo tipo di approccio presenta però alcuni svantaggi: oltre a comportare un costo aggiuntivo, l'inserimento di un elemento in una cavità ottica, anche se di finesse molto bassa, rappresenta una fonte di perdite. Inoltre l'interfaccia con il cristallo dell'EOM può essere fonte di retroriflessioni che possono portare il laser in mode competition.

Anche l'impiego di una cavità lunga presenta vantaggi e svantaggi. L'aumento della lunghezza della cavità comporta una larghezza di riga di emissione più piccola rispetto ad un ECDL standard in quanto l'intervallo spettrale che viene reiniettato nel diodo laser è più piccolo, e i modi di emissione risultano più fitti. Tuttavia l'allungamento della leva ottica rende in linea di principio il sistema più sensibile alle vibrazioni, mentre i modi di emissione più fitti aumentano la probabilità che avvengano dei salti di modo.

Nelle sezioni seguenti saranno presentati i risultati ottenuti con due diversi EOM che sono stati gentilmente forniti in prestito come test samples dalla ditta Qubig GmbH. Per minimizzare le perdite e le retroriflessioni, uno degli EOM ha un coating antiriflesso mentre l'altro contiene un cristallo tagliato all'angolo di Brewster. Per entrambi gli EOM, la sorgente è costituita da due basi standard per ECDL, una che funge da supporto per il diodo laser, stabilizzata termicamente come illustrato nella sezione 3.1.2, e una che funge da supporto per il reticolo di diffrazione. Questa seconda base è costituita da componenti analoghe a quella della base del diodo laser, compresa una cella Peltier di uguali dimensioni, in modo da ottenere un secondo supporto il più simile possibile al primo. In mezzo alle due basi è montato l'EOM. Con questa configurazione la cavità estesa del diodo laser è lunga circa 15 cm.

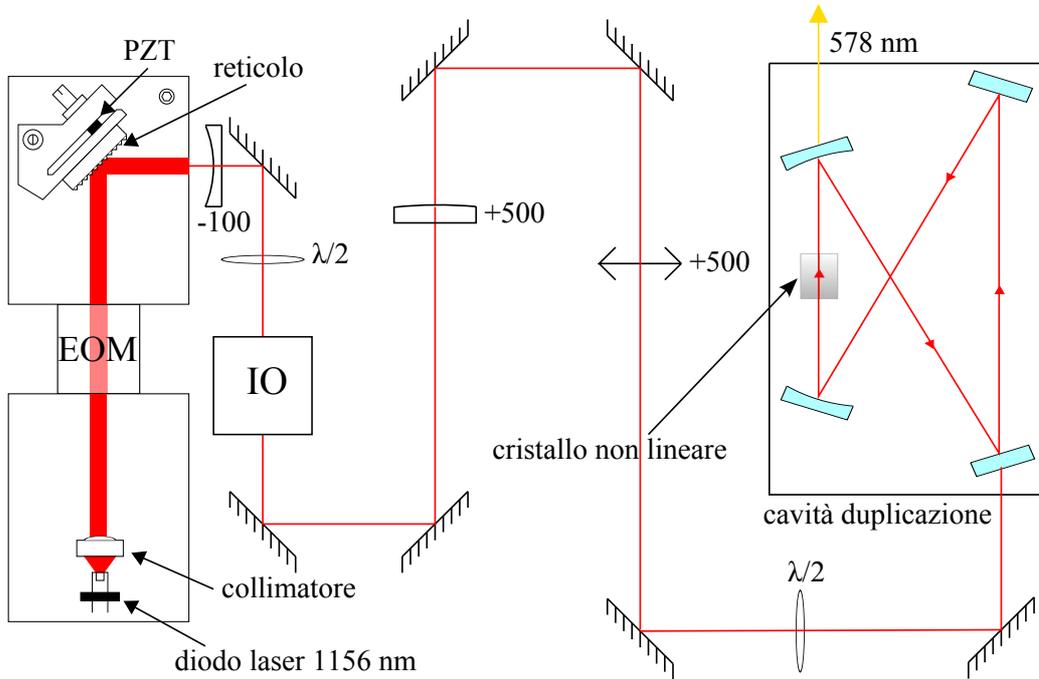


Figura 4.6: Configurazione adottata per i test dell'ECDL con cavità lunga e EOM intra-cavità.

Entrambi gli EOM hanno un case cubico di 40 mm di lato e contengono cristalli di Niobato di Litio; il cristallo dell'EOM con coating AR ha dimensioni  $3 \times 3 \times 30$  mm mentre il cristallo tagliato all'angolo di Brewster ha dimensioni  $5 \times 5 \times 30$  mm. Entrambi sono EOM broadband e consentono una variazione di cammino ottico di circa 1 nm/V, valore valido per entrambi gli EOM a causa delle dimensioni paragonabili dei cristalli. Per fare una variazione  $\Delta\nu$  di frequenza di emissione è necessario variare la lunghezza  $L$  della cavità dell'ECDL di una quantità  $\Delta L$  tale che  $\Delta\nu/\nu = \Delta L/L$ , quindi per ottenere una variazione di frequenza di 10 MHz (cioè approssimativamente la larghezza del picco della cavità di duplicazione) intorno alla frequenza  $\nu = 5.2 \times 10^{14}$  Hz della radiazione a 578 nm è necessaria una variazione di cammino ottico della cavità di circa 3 nm. Di conseguenza entrambi gli EOM possono essere controllati direttamente con l'uscita di un controller PID, la cui uscita può variare nell'intervallo  $\pm 15$  V, senza bisogno di amplificatori di segnale.

Entrambi gli EOM forniti come sample (soprattutto quello con cristallo tagliato all'angolo di Brewster) contengono cristalli di scarsa qualità che comportano una deformazione del fronte d'onda molto maggiore di  $\lambda$ . Questo non rappresenta un problema per lo studio delle prestazioni spettrali raggiun-

gibili con questo tipo di setup, mentre lo diventa al momento di massimizzare l'efficienza di duplicazione, dato che un fascio particolarmente distorto rende difficile raggiungere le condizioni di mode matching. Per questo motivo l'EOM che sarà piazzato in cavità nella configurazione finale sarà dotato di caratteristiche tali da non inficiare apprezzabilmente il modo spaziale del laser (deformazione del fronte d'onda  $< \lambda/8$ ).

Per entrambi gli EOM, per lo studio delle prestazioni spettrali del laser è stato impiegato lo schema illustrato in Fig. 4.6, in cui la cavità di duplicazione funge da trasduttore frequenza-ampiezza. Come già anticipato, per lo studio delle prestazioni spettrali non siamo interessati a massimizzare la potenza in uscita dalla cavità, di conseguenza il sistema laser è stato pensato per consentire di iniettare il fascio nella cavità di duplicazione il più semplicemente possibile, senza ottimizzare finemente il mode matching.

Nelle sezioni successive saranno descritti nel dettaglio i risultati ottenuti con i due EOM.

#### 4.4.1 Stima della larghezza di riga

Prima di procedere a illustrare i risultati sperimentali è necessario introdurre brevemente i metodi utilizzati per la stima della larghezza di riga di emissione del dispositivo realizzato.

Consideriamo di poter scrivere il campo elettrico del laser come:

$$E(t) = A(t)e^{i\phi(t)} = A(t)e^{i(2\pi\nu_0 t + \varphi(t))} \quad (4.1)$$

dove  $\phi(t)$  è la fase,  $A(t)$  è l'ampiezza lentamente variabile rispetto a  $1/\nu_0$ ,  $\nu_0$  la frequenza della portante e  $\varphi(t)$  è la modulazione istantanea della fase dell'onda. La frequenza di oscillazione del campo è definita come la variazione istantanea della fase:

$$\nu(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi}{dt} = \nu_0 + \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi}{dt} \quad (4.2)$$

il cui secondo termine  $\delta\nu(t) = \dot{\varphi}/2\pi$  è chiamato *rumore di frequenza* del campo. Si definisce quindi la densità spettrale di rumore (frequency power spectral density o frequency PSD) la funzione:

$$S_\nu(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \int_0^T \delta\nu(t) e^{-i2\pi ft} dt \right|^2 \quad (4.3)$$

dove  $f$  è la frequenza di Fourier strettamente collegata alla frequenza di modulazione. La funzione  $S_\nu(f)$  è quindi una distribuzione continua che descrive la modulazione della frequenza del laser.

Esiste una relazione rigorosa tra lo spettro di rumore in frequenza e il profilo della riga di emissione, tuttavia è possibile ricavare una forma analitica della riga del laser solo in casi particolari di rumore in frequenza ed in generale è necessario ricorrere a metodi numerici o approssimati. Saranno ora descritti due metodi che consentono di stimare la larghezza di riga del laser a partire dal suo spettro di rumore di fase.

Il primo metodo consiste nell'osservare che la modulazione di fase causata dalla presenza del rumore comporta che la potenza di emissione si distribuisca su un intervallo continuo di frequenze determinando quindi una larghezza di emissione finita. È noto infatti che una modulazione sinusoidale a frequenza  $\omega_m$  della fase del campo elettrico a frequenza  $\omega$  porta alla comparsa di sidebands alle frequenze  $\omega \pm n\omega_m$ , dove  $n$  è un numero naturale. Si può mostrare [39] che la potenza rimanente sulla portante è proporzionale al fattore  $\exp[-\int_{f_0}^{\infty} S_{\varphi}(f)df]$ , dove  $S_{\varphi}(f)$  è il rumore di fase definito a partire dal rumore in frequenza come  $S_{\varphi}(f) = S_{\nu}(f)/f^2$  e  $f_0$  è una frequenza di taglio inferiore. In particolare si può definire la larghezza di riga quella frequenza  $\Delta\nu$  tale che:

$$1 \text{ rad}^2 = \int_{\Delta\nu/2}^{\infty} S_{\varphi}(f)df \quad (4.4)$$

cioè quella frequenza per cui l'integrale assume un valore per cui la potenza sulla portante è metà della potenza totale del campo.

Un secondo metodo utilizzato si basa sull'osservazione [40] che il contributo al profilo di riga dato dalla modulazione alla frequenza di Fourier  $f$  può essere di due tipi. Se il livello di rumore è alto rispetto alla sua frequenza di Fourier, allora produce una lenta modulazione di frequenza (del laser) con un alto indice di modulazione  $\beta$ , dove  $\beta$  è definito come il rapporto tra la deviazione in frequenza  $\Delta\nu$  e la frequenza di modulazione  $f_m$ . Queste lente modulazioni di frequenza, contribuiscono alla larghezza di riga del laser proporzionalmente al livello di rumore. Se invece il livello di rumore è piccolo rispetto alla sua frequenza di Fourier, ed è quindi caratterizzato da un piccolo valore di  $\beta$ , significa che la modulazione è troppo veloce per avere un effetto significativo sulla larghezza di riga del laser. È possibile tenere conto di questa osservazione introducendo la funzione gradino di Heaviside  $\theta$  nel calcolo dell'integrale dello spettro di rumore di fase:

$$A = \int_{1/T_0}^{\infty} \theta(S_{\nu}(f) - 8 \ln(2)f/\pi^2) S_{\nu}(f)df \quad (4.5)$$

dove  $T_0$  è il tempo di misura che impedisce l'osservazione di frequenze inferiori a  $1/T_0$  e la retta  $\beta(f) = 8 \ln(2)f/\pi^2$  è chiamata  $\beta$ -line. Dal valore di questi

integrale si può ricavare un valore approssimato per larghezza di riga dato da:

$$\Delta\nu = \sqrt{8\ln(2)A} \quad (4.6)$$

È importante notare che la larghezza di riga ottenuta con questi metodi rappresenta un'approssimazione di quella che è la larghezza di riga reale del sistema laser. Nonostante siano metodi approssimati, da entrambi è possibile ricavare un'informazione importante riguardo il peso dei diversi contributi alla larghezza di riga: il contributo maggiore dato dal rumore di frequenza alla larghezza di riga del laser risulta infatti essere quello alle basse frequenze di modulazione. Infatti stimando la larghezza di riga dal rumore di fase si calcola l'integrale di una funzione decrescente come  $f^2$ , mentre nel metodo della  $\beta$ -line il livello di rumore minimo per cui si ha un contributo alla larghezza di riga cresce con la frequenza di modulazione.

Nelle sezioni seguenti, la larghezza di riga del sistema laser è stata stimata calcolando numericamente gli integrali (4.4) e (4.5). Come vedremo, tenendo conto del fatto che entrambi questi metodi forniscono un valore approssimato della grandezza di riga, i due metodi danno risultati sostanzialmente compatibili.

#### 4.4.2 EOM con coating antiriflesso

Il primo EOM ad essere testato è stato quello con coating antiriflesso. È importante specificare che il coating antiriflesso garantisce una riflettività 0.5% nell'intervallo 1.0-1.6  $\mu\text{m}$ , mentre un coating ottimizzato potrebbe garantire una riflettività  $< 0.1\%$ . Come si può vedere in Fig. 4.7 e come già specificato precedentemente, l'EOM è stato posizionato in mezzo alle due basi del diodo laser e del reticolo di diffrazione. Per scegliere l'orientazione dell'asse di polarizzazione straordinaria dell'EOM, sono stati svolti alcuni test sulla polarizzazione del fascio emesso dal diodo. Dai test si evince che la polarizzazione emessa dal diodo laser ha un rapporto in potenza del 12%. Inoltre l'asse di polarizzazione principale è inclinato di qualche grado rispetto all'asse orizzontale. Questo è in generale un problema perché si ha modulazione di ampiezza residua. Date queste caratteristiche, l'EOM è stato montato in modo da avere l'asse di polarizzazione straordinaria orizzontale rispetto al piano di lavoro. Tuttavia, nonostante questo accorgimento, durante i test dell'EOM è stata osservata una competizione di modi tra due diverse polarizzazioni. È stato quindi necessario inserire in cavità un beam splitter polarizzatore orientato in modo da trasmettere la sola componente orizzontale della polarizzazione (Fig. 4.7). Questo ha permesso di stabilizzare la

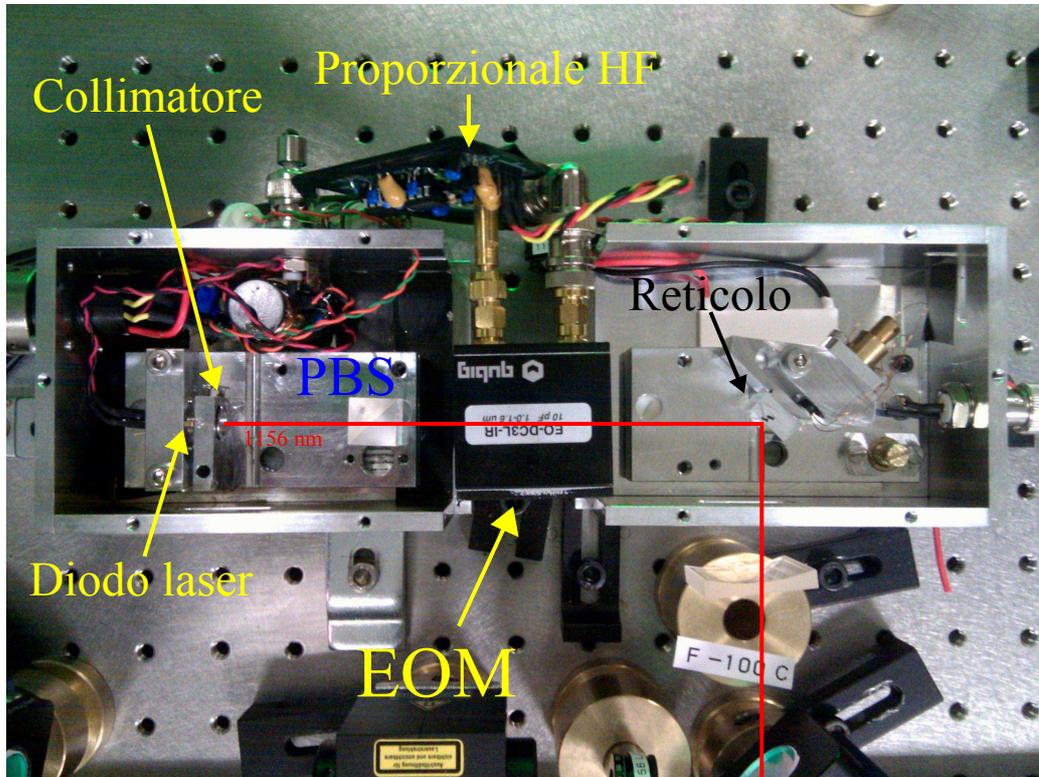


Figura 4.7: Foto dell'ECDL con cavità lunga e EOM con coating AR intra-cavità. Sono visibili le due basi del diodo laser e del reticolo di diffrazione. Nella foto è visibile anche un beam splitter polarizzatore posizionato prima dell'EOM che è stato necessario utilizzare per risolvere i problemi di polarizzazione.

polarizzazione di emissione, a discapito però della potenza del fascio uscente dall'ECDL. Iniettato il fascio nella cavità di duplicazione, il segnale d'errore generato a partire dal segnale riflesso dalla cavità e uscente da fotodiode differenziale viene inviato a due controller PID, uno dei quali controlla il piezoelettrico dell'ECDL, l'altro connesso all'EOM. In questo modo è possibile regolare indipendentemente i guadagni e le costanti di tempo dei due PID per ottimizzare l'aggancio. Il processo di ottimizzazione dei parametri dei PID è stato agevolato dall'impiego di un analizzatore di spettro FFT Tektronix RSA5106A con banda da 1 Hz a 6.2 GHz. Grazie all'analizzatore di spettro è stato possibile osservare in tempo reale gli effetti dell'aggiustamento dei vari parametri dei PID (guadagni e costanti di tempo).

Come si è visto nella sezione precedente, la necessità fondamentale per la riduzione di larghezza di riga del laser è un forte guadagno alle frequenze acustiche. Per questo motivo è fondamentale la corretta calibrazione dello

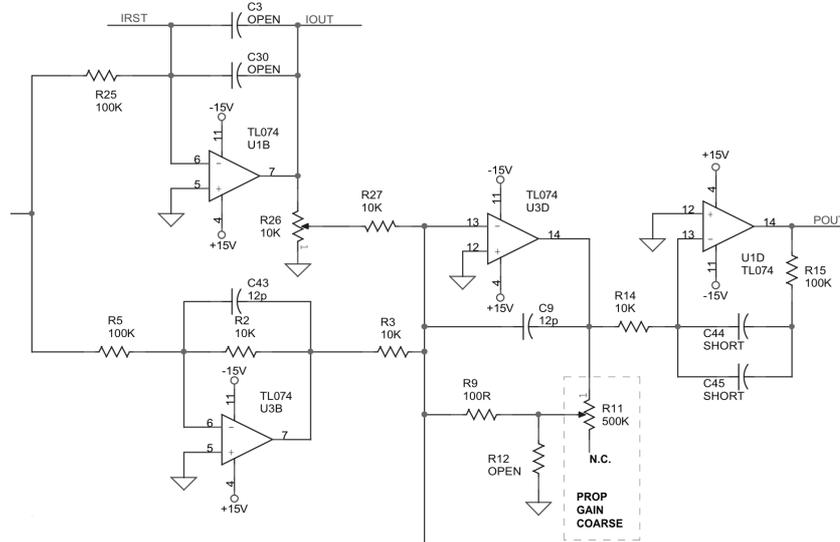


Figura 4.8: Sezione dello schema di un PID Rev 10 realizzato presso l'officina elettronica del LENS. I valori di resistenze e condensatori indicati sono relativi alla sezione PI non modificata.

stadio di integratore dei PID.

### PID del piezoelettrico

Alle basse frequenze è fondamentale il contributo del cristallo piezoelettrico del reticolo di diffrazione che controlla a tutti gli effetti la lunghezza della cavità. Il PID che controlla il cristallo piezoelettrico è stato modificato in modo da avere due stadi di integratore in serie, che hanno una funzione di trasferimento uguale al prodotto delle funzioni di trasferimento dei singoli integratori. Il primo integratore (operazionale U1B in Fig. 4.8) ha una frequenza di guadagno unitario di 1.6 kHz ( $R_{25} = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $C_{30} = 10 \text{ nF}$ ), mentre il secondo integratore (ricavato dall'operazionale U1D in Fig. 4.8) di 72 Hz ( $R_{14} = 110 \text{ k}\Omega$ ,  $C_{44} = 20 \text{ nF}$ ). Entrambi sono integratori puri, cioè hanno un guadagno non limitato in DC. Lo stadio proporzionale ha guadagno unitario, praticamente irrilevante per la parte di piezoelettrico. Il PID del piezoelettrico quindi è caratterizzato da un guadagno molto alto alle basse frequenze dato dal prodotto dei guadagni dei due stadi di integrazione, necessario per correggere i molti disturbi alle basse frequenze acustiche e il rumore di alimentazione residuo in uscita dallo stadio di filtraggio posto in prossimità del diodo laser (Fig. 3.4). Il PID deve essere invece tagliato alle alte frequenze in quanto il piezoelettrico, una volta sotto carico, è caratterizzato da una

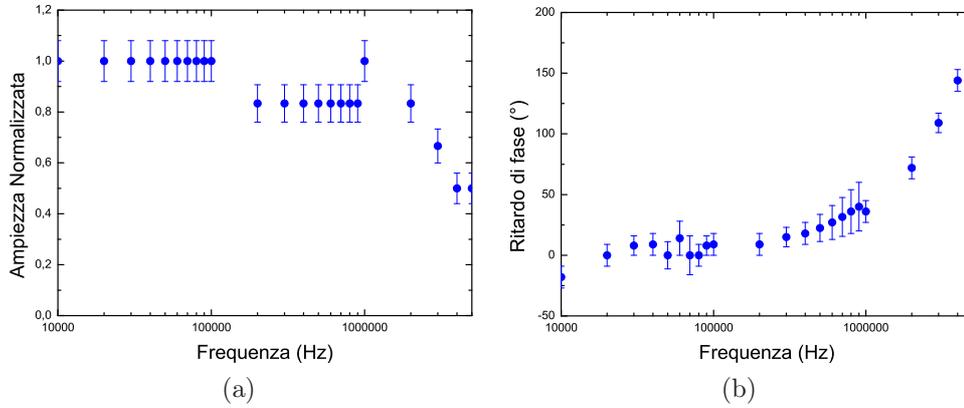


Figura 4.9: Ampiezza (a) e fase (b) della modulazione sul segnale trasmesso dalla cavità di duplicazione in risposta ad una modulazione sinusoidale applicata all'EOM.

funzione di trasferimento che presenta una risonanza a frequenze dell'ordine di qualche kHz.

### PID dell'EOM

Il PID che controlla l'EOM, a differenza del PID che controlla il piezoelettrico, deve essere caratterizzato da un buon comportamento dinamico anche alle alte frequenze, dato che la banda dell'EOM è molto più ampia rispetto a quella del cristallo piezoelettrico. In particolare i diagrammi di ampiezza e fase dell'EOM con coating antiriflesso sono stati ricavati come nelle sezioni precedenti osservando l'andamento del segnale trasmesso sul fianco del picco di trasmissione della cavità in risposta ad una modulazione sinusoidale applicata all'EOM stesso e sono riportati in Fig. 4.9. La frequenza di modulazione iniziale è di 10 kHz a causa del fatto che le misure sono state fatte agganciando con il piezoelettrico il laser al fianco del picco di trasmissione della cavità e a frequenze di modulazione più basse era visibile l'effetto correttivo del piezoelettrico. Come si può vedere, è possibile modulare con ampiezza sostanzialmente costante e con fase inferiore ai  $90^\circ$  fino ai 2 MHz, una banda molto più ampia di quella ottenibile con il controllo in corrente. Il PID dell'EOM dovrà quindi avere una banda nettamente più ampia di quello del piezoelettrico, oltre che un alto guadagno alle basse frequenze.

Per quanto riguarda lo stadio di integratore, questo è stato aggiustato in modo da avere una frequenza di guadagno unitario pari a 16 kHz ( $R_{25} = 10$  k $\Omega$ ,  $C_{30} = 1$  nF in Fig. 4.8) e una frequenza di roll-off, cioè la frequenza di "attacco" dell'integratore, pari a 16 Hz (mettendo una resistenza da 10

$M\Omega$  al posto del condensatore  $C_3$ ), necessaria per limitare il guadagno in DC per evitare la competizione con il PID del piezoelettrico che renderebbe impossibile l'aggancio su tempi lunghi.

Per quanto riguarda lo stadio proporzionale (operazionale U3B in Fig. 4.8), questo è stato modificato per aumentare di un fattore 10 il guadagno iniziale pari a 2 ( $R_2 = R_5 = 10\text{ k}\Omega$ ,  $R_{27} = 1\text{ k}\Omega$ ), altrimenti sostanzialmente inefficace, per un totale di 20. Inoltre la banda dello stadio proporzionale, teoricamente infinita, è limitata nel nostro caso dagli integrati utilizzati, quindi per aumentare la banda passante dello stadio proporzionale sono stati sostituiti gli integrati di serie TL074, con banda passante di 3 MHz, con degli integrati OP467 caratterizzati da una banda più ampia (28 MHz). Dopo queste modifiche le misure di ampiezza e fase del segnale in uscita dal PID operante con il solo stadio proporzionale in risposta ad un segnale sinusoidale applicato all'ingresso sono riportate in Fig. 4.10 (a) e (b). Come si può vedere, con le modifiche effettuate fino intorno ai 300 kHz si ha ancora una buona ampiezza di modulazione e la fase non supera un ritardo di  $60^\circ$ , tuttavia a 1 MHz l'ampiezza di modulazione è molto ridotta e la fase è invertita di  $180^\circ$  a causa principalmente della presenza dei numerosi stadi di amplificazione in cascata che compongono il controller e di capacità residue.

Per aumentare la banda del sistema elettronico di controllo è stato introdotto un ulteriore stadio proporzionale collegato all'EOM costituito da un solo integrato e connesso con cavi corti, nominato per brevità HF (high frequency), pensato per lavorare a frequenze più alte di quelle raggiungibili tramite il controller PID. Per lavorare alle alte frequenze è accoppiato in AC con una frequenza di taglio di 16 kHz. L'output è filtrato da un filtro passa basso con frequenza di taglio a 1.6 MHz al fine di avere un basso guadagno in corrispondenza della prima risonanza dell'EOM misurata dal costruttore intorno ai 3 MHz. Le resistenze sono state scelte in modo da avere una costante di guadagno pari a 10. I suoi diagrammi di ampiezza e fase, misurati allo stesso modo di quelli del PID dell'EOM, sono riportati in Fig. 4.10 (c) e (d). Come si può vedere lo stadio HF agisce tra 50 kHz e 1 MHz. Nello stesso intervallo di frequenze la fase accumula un ritardo di  $60^\circ$ . L'alto guadagno fino al MHz consente a questo stadio proporzionale di essere dominante alle alte frequenze rispetto al PID dell'EOM, che a quelle frequenze, nonostante l'alta costante di guadagno proporzionale, ha un'ampiezza di modulazione piccola, e questo aiuta la stabilizzazione del sistema. Infine sempre per aumentare la banda è stato sostituito l'integrato AD712 (banda passante 3 MHz) del fotodiode differenziale con un integrato AD823 (banda passante 16 MHz), pin-to-pin compatibile disponibile in officina elettronica.

Una volta ottimizzato il sistema come sopra illustrato, sono stati acquisiti

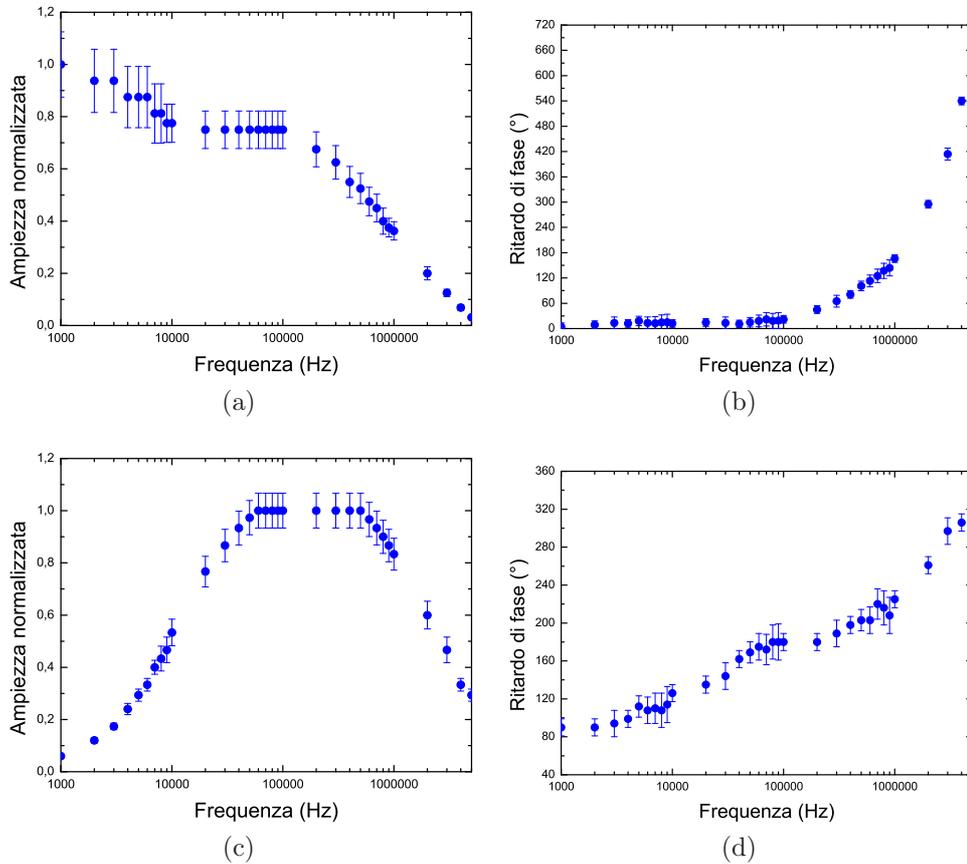


Figura 4.10: Le figure (a) e (b) sono rispettivamente ampiezza e fase del segnale in uscita dallo stadio proporzionale del PID dell'EOM in risposta ad una modulazione sinusoidale applicata all'ingresso. Intorno al MHz è possibile vedere l'effetto dell'accumulo di fase dato dalla presenza di integrati in cascata. Le figure (c) e (d) sono ampiezza e fase del segnale in uscita dallo stadio HF.

diversi spettri di rumore in frequenza sul segnale d'errore. Gli spettri sono stati acquisiti con il laser agganciato con il solo piezoelettrico dell'ECDL (spettri in marrone nelle figure che seguono), con il piezoelettrico e il proporzionale HF (spettri in verde), con il piezoelettrico e il PID dell'EOM (spettri in rosso) e piezoelettrico e PID e proporzionale HF dell'EOM (spettri in blu)

Allo scopo di tradurre gli spettri di rumore in ampiezza registrati dall'FFT in spettri di rumore in frequenza è necessario conoscere il fattore di trasduzione frequenza-ampiezza. Per farlo è stato utilizzato un metodo analogo a quello illustrato nella sezione 3.1.2 per la misura della larghezza di riga del laser ECDL, con l'unica differenza di aver misurato la pendenza del tratto lineare passante per zero del segnale d'errore anziché la pendenza della

parte lineare del picco di trasmissione della cavità.

Gli spettri acquisiti sono l'unione di due spettri in diversi intervalli, uno a frequenze comprese tra 10 Hz e 100 kHz con una RBW di 10 Hz e uno a frequenza comprese tra 1 kHz e 10 MHz con RBW di 1 kHz. Gli spettri sono stati rinormalizzati per la RBW e convertiti in spettri di frequenza misurando il fattore di trasduzione e sono stati poi uniti a formare un unico spettro di rumore in frequenza, indicato con Frequency PSD (Power Spectral Density) nei grafici a seguire.

Dagli spettri di rumore in frequenza è stato possibile ricavare informazioni sia sulla larghezza di riga del laser, sia sulle prestazioni dell'EOM intra-cavità come elemento di correzione della frequenza del laser. Gli spettri di rumore che hanno permesso una stima della larghezza di riga del laser sono illustrati in Fig. 4.11. Questi sono stati ottenuti sommando allo spettro di rumore del segnale d'errore rilevato con il fotodiodo differenziale lo spettro di rumore del detector stesso. Il detector del segnale d'errore fa infatti parte del loop di controllo del laser, quindi il suo contributo di rumore in ampiezza viene introdotto come "correzione" spuria alla frequenza del laser e pertanto va tenuto in considerazione. Questi spettri mettono in luce diversi particolari importanti. Innanzitutto per quanto riguarda i diversi attuatori e regolatori, appare evidente l'efficacia dell'EOM controllato dallo stadio di integratore del PID nel correggere le fluttuazioni alle frequenze acustiche superiori ai 100 Hz: lo spettro di rumore dell'aggancio con il solo piezoelettrico è anche di 40 dB più alto in alcune zone di questo intervallo rispetto allo spettro del laser agganciato con piezoelettrico e EOM. Alle alte frequenze è invece evidente l'effetto del proporzionale HF: tra i 100 kHz e 1 MHz questo riesce a correggere l'aumento di rumore dato dalla scarsa banda del PID dell'EOM fino a un massimo di 20 dB.

In Fig. 4.11 sono inoltre evidenti due grossi contributi al rumore dati dal picco a 50 Hz e dalle sue armoniche, attribuibile a loop di massa e disturbi legati alla linea di alimentazione AC, e un picco estremamente pronunciato intorno ai 18 kHz. La larghezza di riga relativa alla cavità di riferimento del laser agganciato con tutte le componenti del sistema di controllo è stata stimata con i metodi illustrati in sezione 4.4.1. I risultati sono i seguenti:

Metodo	Larghezza di riga (kHz)
Rumore di fase	140
$\beta$ -line	85

I fattori che maggiormente contribuiscono a questa larghezza di riga sono il rumore a 50 Hz e armoniche e il picco a 18 kHz. Questo si può vedere facilmente ad esempio osservando che proprio queste sezioni di spettro sono

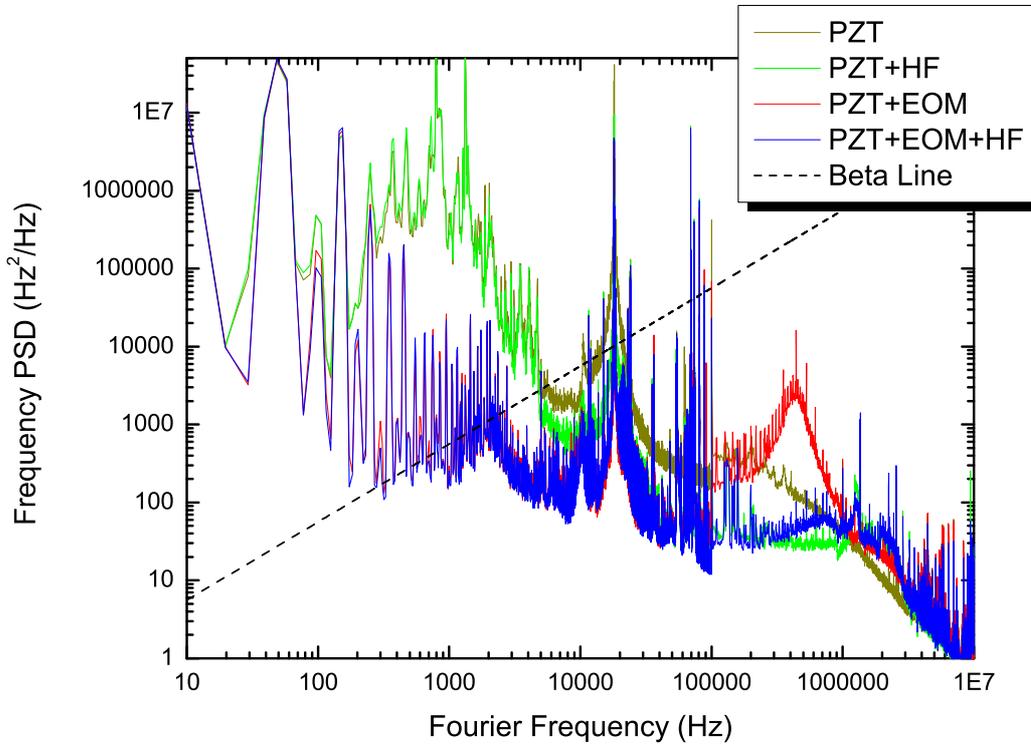


Figura 4.11: Spettri di rumore in frequenza del segnale d'errore per diverse configurazioni di aggancio ricavati sommando il rumore in frequenza del detector.

quelle che più salgono sopra la  $\beta$ -line. Per stimare il contributo alla larghezza di riga del picco a 18 kHz è stata calcolata la larghezza di riga approssimata con il metodo della  $\beta$ -line trascurando il contributo del picco all'integrale. Il risultato ottenuto è di 48 kHz. Questo implica che per ridurre la larghezza di riga è necessario lavorare per eliminare o al limite ridurre entrambi i contributi.

Un metodo che può mettere in luce l'efficienza del sistema di aggancio qualora si possa impiegare un rivelatore a più basso rumore intrinseco (attualmente in fase di studio) è considerare degli spettri di rumore da cui è stato sottratto il rumore del detector in modo da ottenere degli spettri che tengano conto dei soli contributi al rumore dati dalle componenti del sistema di controllo escluso il detector. Anche di questi spettri è stata calcolata la larghezza di riga con i due metodi illustrati precedentemente ottenendo approssimativamente quella che sarebbe la larghezza di riga del laser impiegando un detector ideale, cioè privo di rumore, per la generazione del segnale d'errore.

Gli spettri ottenuti sono rappresentati in Fig. 4.12. Innanzitutto osserva-

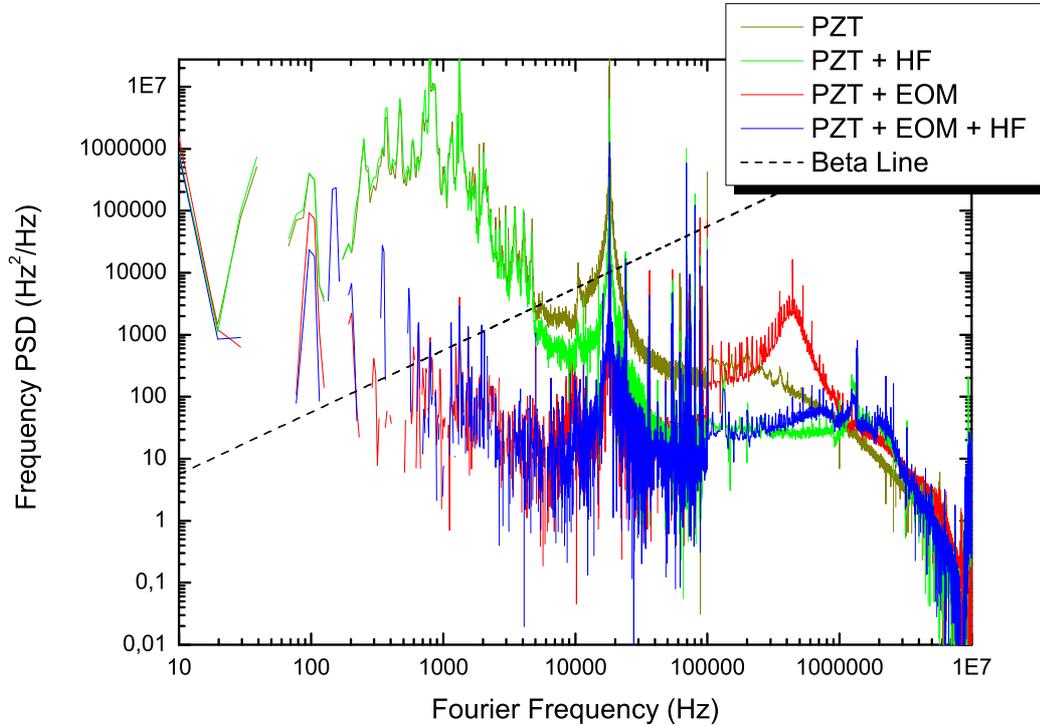


Figura 4.12: *Spettri di rumore in frequenza del segnale d'errore per diverse configurazioni di aggancio ricavati sottraendo il rumore del detector. I valori mancanti sono negativi.*

mo che alle basse frequenze vi sono alcuni valori fuori scala sia perché troppo piccoli sia perché negativi. In questi punti il rumore del segnale d'errore coincide con il rumore del detector o ne è anche lievemente più basso a causa delle fluttuazioni statistiche e/o ambientali del segnale. I punti negativi non rappresentano un problema per il calcolo dell'integrale con il metodo della  $\beta$ -line, mentre nel calcolo dell'integrale dello spettro di rumore di fase sono stati sostituiti con degli zeri. Come è lecito aspettarsi, questi spettri presentano le stesse peculiarità dei precedenti, sia per quanto riguarda la differenza tra i diversi tipi di aggancio, sia per quanto riguarda i maggiori contributi al rumore. Le larghezze di riga relative alla cavità del laser agganciato con tutte le componenti ottenute con i due metodi sono riportate nella seguente tabella:

Metodo	Larghezza di riga (kHz)
Rumore di fase	36.5
$\beta$ -line	16.5

Anche in questo caso è possibile stimare facilmente con il metodo della  $\beta$ -line la larghezza di riga che si avrebbe escludendo il picco a 18 kHz dall'integrale, cosa ragionevole in quanto è stato appurato che questo è un picco "tecnico", ipoteticamente correggibile alimentando tutto a batteria, dato che proviene da pick-up di altra strumentazione sulla linea del laboratorio. Il valore ottenuto è pari a 3.8 kHz. Questo risultato rappresenta una stima dell'efficacia del sistema di controllo a meno del detector. Nella sezione successiva sarà ricavato in modo analogo un risultato per l'altro EOM e in questo modo sarà possibile un confronto tra i due oggetti.

### 4.4.3 EOM all'angolo di Brewster

Test analoghi a quelli effettuati per l'EOM con coating antiriflesso sono stati svolti anche per l'EOM con cristallo all'angolo di Brewster. Il cristallo è posizionato all'interno dell'EOM in modo che un fascio incidente perpendicolarmente alla superficie dell'EOM incide sul cristallo all'angolo di Brewster. Il fascio esce poi perpendicolare dalla superficie dell'EOM, ma spostato orizzontalmente di 18 mm rispetto al punto d'ingresso. L'EOM è quindi posizionato in mezzo alle due basi del diodo laser e del reticolo, le quali però sono disassate tra loro in modo da compensare lo spostamento del fascio dato dal cristallo dell'EOM (Fig. 4.13). Anche questo EOM è montato in modo da avere l'asse di polarizzazione straordinaria orizzontale rispetto al piano di lavoro. A differenza dell'EOM con coating antiriflesso, questo EOM presenta un comportamento migliore per quanto riguarda la polarizzazione: l'ECDL cambia infatti polarizzazione di emissione solo ad intervalli di 1-2 giorni, e quindi in questo caso è stato possibile operare senza ricorrere ad un beam splitter polarizzatore intra-cavità, con netto beneficio per la potenza in uscita.

La configurazione laser adottata è, come per l'EOM con coating AR, quella illustrata in Fig. 4.6. Anche le connessioni sono le stesse impiegate per i test sul primo EOM: il segnale d'errore viene inviato a un PID che controlla il piezoelettrico della cavità e a un PID e uno stadio proporzionale HF collegati ai due ingressi dell'EOM.

Anche in questo caso i parametri dei PID sono stati ottimizzati con l'ausilio dell'analizzatore di spettro. Le frequenze di taglio ottimali degli integratori di entrambi i PID del piezoelettrico e dell'EOM sono invariate in quanto le caratteristiche dei due EOM sono molto simili, e sono solo stati aggiustati i guadagni integrale e proporzionale, così come è stato modificato il guadagno del proporzionale HF. In particolare i guadagni del PID dell'EOM e del proporzionale HF sono stati diminuiti di un fattore  $\sim 2$  per evitare oscillazioni del sistema.

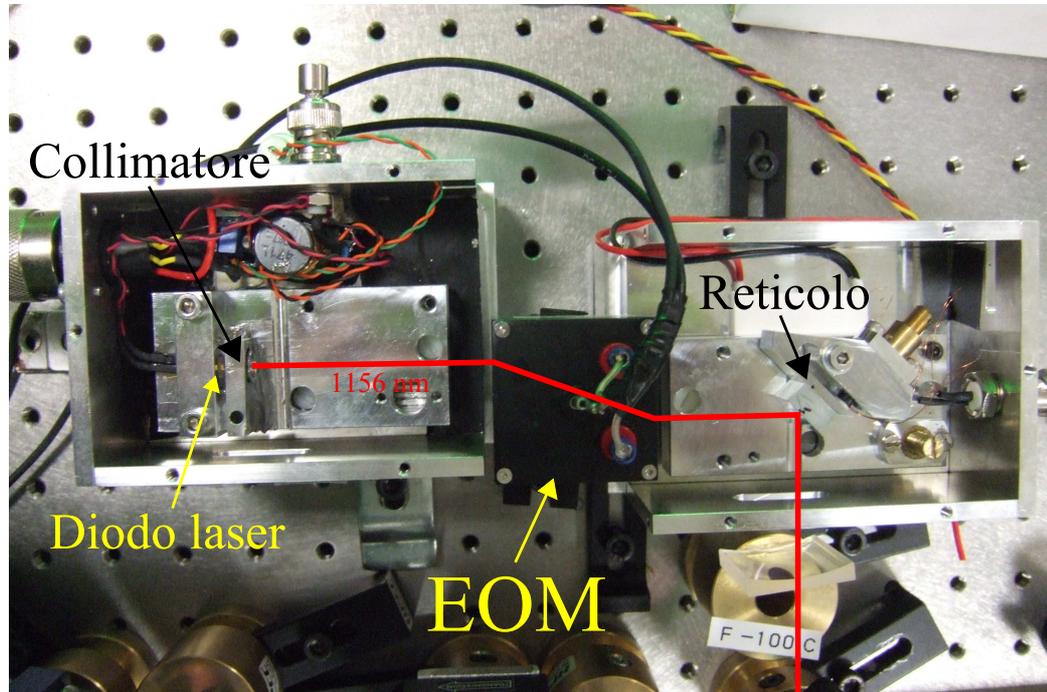


Figura 4.13: Foto dell'ECDL con cavità lunga e EOM con cristallo all'angolo di Brewster. Sono visibili le due basi del diodo laser e del reticolo di diffrazione posizionate in modo da compensare lo spostamento orizzontale del fascio dato dal cristallo dell'EOM.

La risposta dell'EOM ad una modulazione sinusoidale è stata misurata otticamente come per l'altro EOM ottenendo i grafici in Fig. 4.14. Come si può vedere, questo secondo EOM ha una banda leggermente inferiore rispetto alla banda dell'EOM con coating antiriflesso. Oltre i 2 MHz, comunque oltre la banda del PID e del fotodiodo, sono inoltre presenti numerosissime risonanze molto strette a poco ampie, che sul grafico non sono riportate. Per quanto riguarda la fase invece, le risposte dei due EOM sono confrontabili.

Per cercare di migliorare i risultati illustrati nella sezione precedente e cercare di ridurre ulteriormente la larghezza di riga del laser sono stati eseguiti alcuni interventi di miglioramento. Sono state effettuate delle modifiche alle componenti elettroniche al fine di ridurre i disturbi sulla linea di alimentazione AC causa del rumore a 50 Hz e armoniche superiori. Inoltre per aumentare la banda sono stati sostituiti i fotodiodi BPW34F al silicio del fotodiodo differenziale (Fig. 3.11) con dei fotodiodi InGaAs. Dopo queste modifiche sono stati acquisiti degli spettri di rumore in frequenza sia del segnale d'errore sia del segnale trasmesso. Gli spettri di rumore in frequenza del segnale d'er-

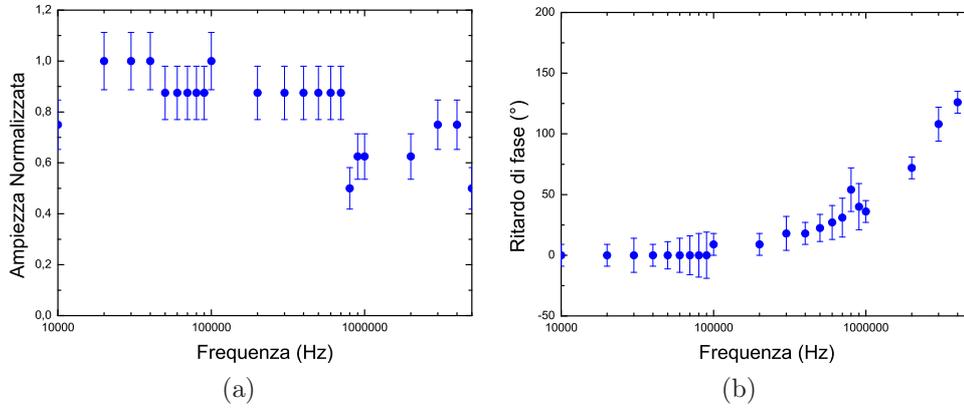


Figura 4.14: Ampiezza (a) e fase (b) della modulazione sul segnale trasmesso dalla cavità di duplicazione in risposta ad una modulazione sinusoidale applicata all'EOM con cristallo all'angolo di Brewster.

re sono stati ricavati con un'elaborazione analoga a quella illustrata nella sezione precedente. In Fig. 4.15 sono rappresentati gli spettri di rumore in frequenza del segnale d'errore con sommato il contributo del detector per diverse configurazioni di aggancio del laser. È evidente la diminuzione del rumore a 50 Hz e armoniche superiori rispetto agli spettri rappresentati in Fig. 4.11, mentre resta sostanzialmente invariato il picco di rumore intorno ai 18 kHz. Anche in questo caso è possibile osservare l'efficacia dell'EOM nel correggere il rumore a bassa frequenza e l'efficacia dello stadio proporzionale HF alle alte frequenze. Dallo spettro di rumore del laser agganciato con tutte le componenti del loop di controllo è stata calcolata, con i metodi illustrati in sezione 4.4.1, la larghezza di riga approssimata del laser relativa alla cavità di riferimento, ottenendo i valori riportati nella seguente tabella:

Metodo	Larghezza di riga (kHz)
Rumore di fase	36.4
$\beta$ -line	11.8

Per confronto, è stato acquisito anche lo spettro di rumore in frequenza del segnale trasmesso dalla cavità per il solo caso di laser agganciato con tutte le componenti del circuito di controllo. Questo spettro è stato ricavato innanzitutto rinormalizzando per la RBW e poi sottraendo il rumore in ampiezza, a sua volta ricavato a partire dal segnale di un fotodiode InGAs posto all'uscita dell'ECDL. Lo spettro così ottenuto è stato poi convertito in rumore di frequenza misurando il fattore di conversione in modo analogo a quanto illustrato nella sezione 3.1.2 riguardo le misure preliminari di larghezza di riga di emissione dell'ECDL. Infine è stato sottratto il rumore del

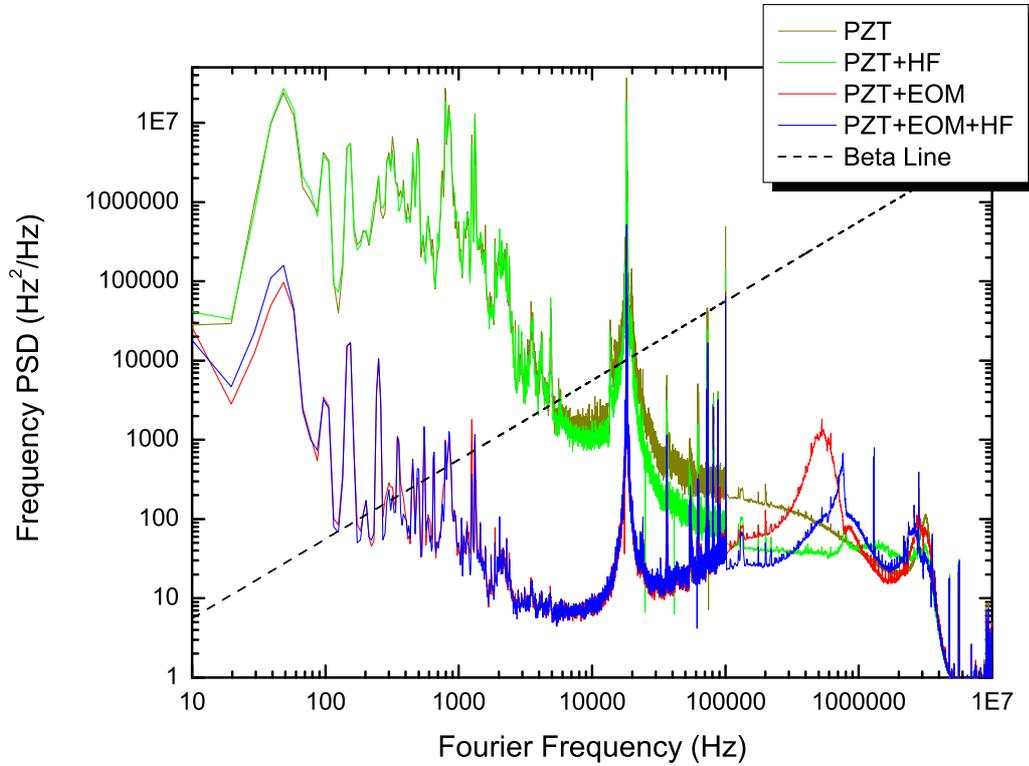


Figura 4.15: *Spettri di rumore in frequenza del segnale d'errore per diverse configurazioni di aggancio ricavati sommando il rumore in frequenza del detector. Gli spettri sono meno rumorosi rispetto a quelli rappresentati in Fig. 4.11 perché sono stati mediati su un numero maggiore di acquisizioni.*

detector, che a differenza del caso del rumore del segnale d'errore non fa parte del sistema di controllo. Lo spettro di rumore in frequenza del segnale trasmesso così ottenuto è rappresentato in Fig. 4.16. Come si può vedere questo spettro presenta caratteristiche analoghe allo spettro di rumore in frequenza del segnale d'errore nel caso di laser agganciato con tutti le componenti del sistema di controllo (curva in blu di Fig. 4.15). I punti non rappresentati sono anche in questo caso o fuori scala o negativi e rappresentano i punti in cui il rumore del segnale è al limite di rivelazione del detector. Le larghezze di riga relative alla cavità stimate a partire da questo spettro sono riportate nella tabella seguente:

Metodo	Larghezza di riga (kHz)
Rumore di fase	18.2
$\beta$ -line	11.8

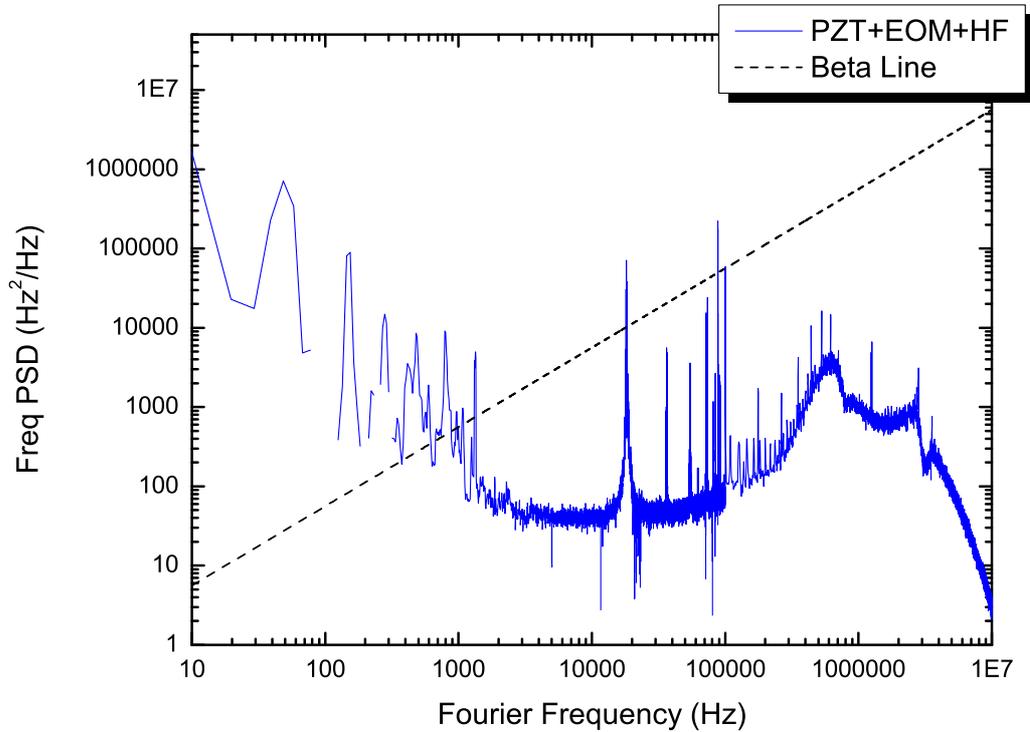


Figura 4.16: *Spettro di rumore in frequenza del segnale trasmesso. Per un facile confronto con la Fig. 4.15 le due figure hanno la stessa scala verticale.*

Tenendo conto del fatto che i metodi utilizzati per la stima della larghezza di riga sono delle approssimazioni, i valori ottenuti sono come ordine di grandezza compatibili con quelli ricavati a partire dallo spettro di rumore in frequenza del segnale d'errore.

Come nel caso dell'EOM con coating antiriflesso, dagli spettri di rumore è stato possibile ricavare informazioni sull'efficacia del sistema di controllo a meno delle prestazioni del detector. In Fig. 4.17 sono rappresentati gli spettri di rumore in frequenza del segnale d'errore da cui è stato sottratto il rumore del detector. Calcolando la larghezza di riga di questi spettri, come già detto nella sezione precedente, non si ottiene una stima della larghezza di riga del laser, che è influenzata anche dal detector impiegato per la rivelazione del segnale d'errore, ma si ottiene un valore di larghezza in caso di detector ideale. Rispetto alla sezione precedente il sistema di rivelazione è stato migliorato riducendo i loop di massa e cambiando i fotodiodi, ma come si è detto il contributo del detector al rumore viene sottratto e quindi non influisce. Le altre componenti elettroniche sono le stesse, con l'unica differenza che i guadagni sono stati appositamente adeguati per lavorare bene con il

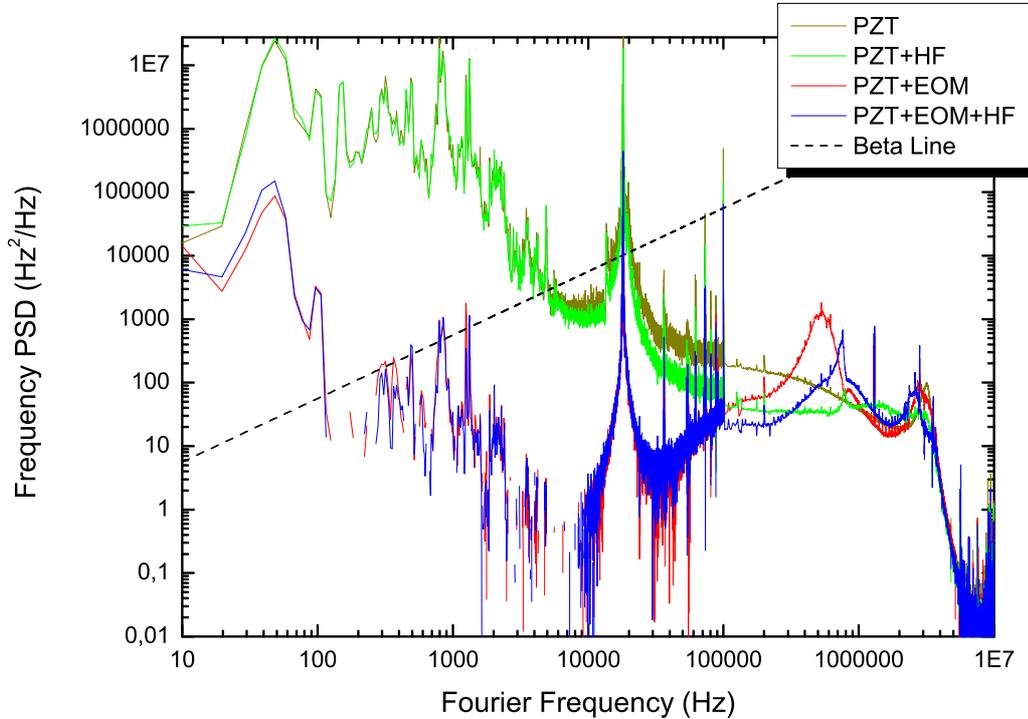


Figura 4.17: Spettri di rumore in frequenza del segnale d'errore per diverse configurazioni di aggancio ricavati sottraendo il rumore del detector.

nuovo EOM. L'unico oggetto sostanzialmente differente è quindi l'EOM, di conseguenza i risultati ottenuti possono essere direttamente confrontati con quelli ottenuti nella sezione precedente per paragonare le prestazioni dei due EOM come elemento di correzione della frequenza del laser. Nel caso dell'EOM con cristallo all'angolo di Brewster i risultati ottenuti sono riportati nella seguente tabella:

Metodo	Larghezza di riga (kHz)
Rumore di fase	36.4
$\beta$ -line	10.7

In particolare stimando con il metodo della  $\beta$ -line la larghezza di riga che si avrebbe trascurando il picco a 18 kHz, si ottiene il valore di 4.7 kHz. Tenendo di nuovo conto del fatto che i metodi di stima della larghezza di riga sono approssimati, questi risultati sono confrontabili con quelli ottenuti nel caso di EOM con coating antiriflesso e riportati nella tabella alla fine della sezione precedente. Si può concludere quindi che i due EOM hanno prestazioni simili. Di conseguenza, dato che ha presentato problemi molto

meno gravi di polarizzazione, è stato scelto di continuare ad operare con l'EOM con cristallo tagliato all'angolo di Brewster.

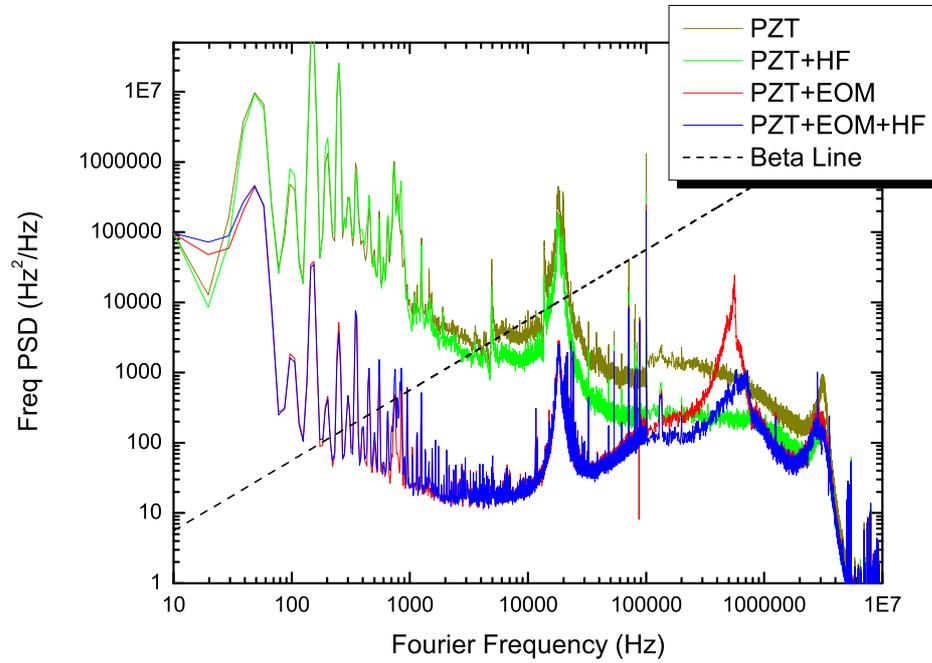
In ogni caso le prestazioni raggiungibili sono attualmente limitate dal rumore a 50 Hz e armoniche e dal picco di rumore a 18 kHz. Se il rumore a 50 Hz è riducibile lavorando accuratamente per eliminare i loop di massa, il picco di rumore a 18 kHz è principalmente imputabile al gruppo di continuità a cui sono collegate tutte le componenti elettroniche del sistema ed quindi in linea di principio eliminabile alimentando il sistema a batteria.

#### 4.4.4 Larghezza di riga con rumore elettrico ed acustico ridotto

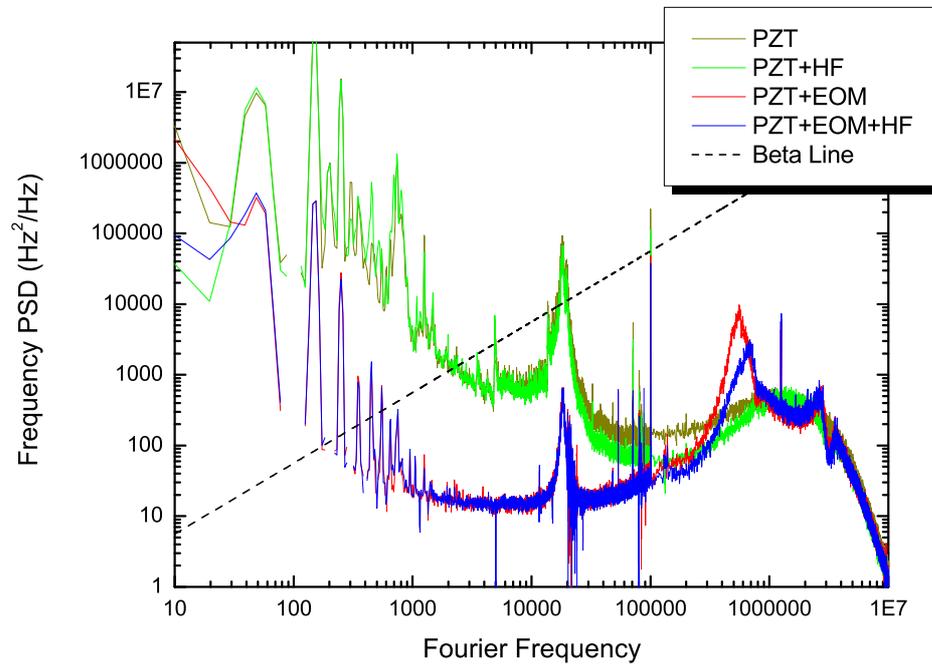
Al fine di stimare la larghezza di riga di emissione ottenibile eliminando il gruppo di continuità come fonte di rumore, sono state eseguite delle misure di rumore in frequenza alimentando il sistema laser e tutte le componenti elettroniche direttamente dalla rete elettrica e spengendo completamente il gruppo di continuità. Nonostante, come vedremo, il rumore diminuisca, non è possibile operare regolarmente senza gruppo di continuità in quanto in caso di interruzione della rete AC si rischia di danneggiare il diodo laser e il cristallo non lineare stabilizzato termicamente a temperature oltre i 60° C. Sempre al fine di stabilire i valori raggiungibili eliminando altre possibili fonti di rumore, sono stati spenti gli altri laser del laboratorio e i relativi sistemi di raffreddamento.

In queste condizioni, sono stati acquisiti degli spettri di rumore in frequenza sia del segnale d'errore che del segnale trasmesso dalla cavità di duplicazione. Gli spettri sono stati elaborati e ricavati nel modo specificato nelle sezioni precedenti. In questo caso, l'obiettivo è quello di misurare la larghezza di riga e non di confrontare le prestazioni dei diversi EOM, quindi nel caso del rumore del segnale d'errore, sono stati ricavati i soli spettri di rumore che tengono conto, sommandolo, del contributo del detector.

Gli spettri di rumore così ottenuti sono rappresentati in Fig. 4.18. Come si può vedere, il picco di rumore a 18 kHz, seppur ancora presente, risulta molti dB più basso rispetto ai casi delle sezioni precedenti. Questo implica che il gruppo di continuità può non essere la causa diretta del rumore, ma in ogni caso contribuisce molto ad incrementare il rumore esistente. Le larghezze di riga relative alla cavità stimate con i diversi metodi a partire dal rumore del segnale d'errore e del segnale trasmesso sono riepilogate nella seguente tabella:



(a)



(b)

Figura 4.18: *Spettri di rumore in frequenza per diverse configurazioni di aggancio del segnale d'errore (a) e del segnale trasmesso (b). La larghezza di riga ottenuta dagli spettri in blu è di qualche kHz.*

	Metodo	Larghezza di riga (kHz)
Segnale d'errore	Rumore di fase	4.4
	$\beta$ -line	8.1
Segnale trasmesso	Rumore di fase	2
	$\beta$ -line	9

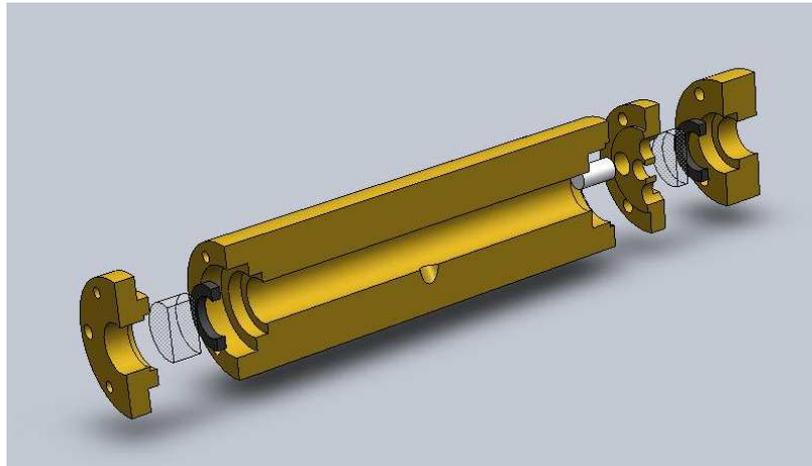
Sempre tenendo conto del fatto che la larghezza di riga ricavata dai metodi di sezione 4.4.1 è un'approssimazione, i risultati ottenuti sono sostanzialmente coerenti. Supponendo quindi di isolare acusticamente l'intero sistema laser e di trovare una fonte di alimentazione priva del rumore tipico introdotto dal gruppo di continuità, il laser è caratterizzato da una larghezza di riga di emissione relativa alla cavità di riferimento dell'ordine di qualche kHz. Si tratta di un ottimo risultato in quanto la larghezza di riga del sistema risulta ridotta di due ordini di grandezza rispetto al sistema iniziale costituito dal laser ECDL.

Sulla base di questi risultati possono essere pianificati i futuri interventi volti al miglioramento delle prestazioni spettrali del sistema.

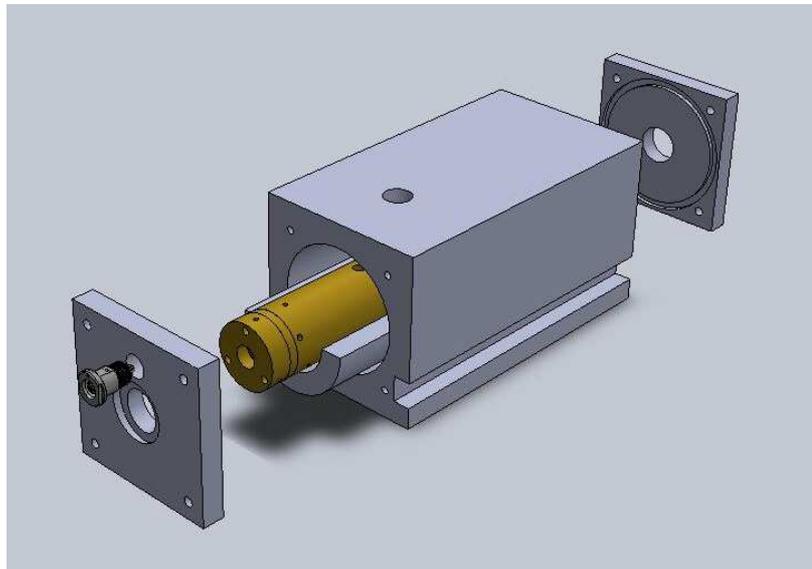
## 4.5 Cavità di prestabilizzazione

Tutte le misure effettuate sono state svolte ottimizzando il sistema di controllo in modo da agganciare il laser al segnale d'errore ricavato dalla cavità di duplicazione, verificando così l'efficacia del primo stadio di stabilizzazione previsto nella configurazione generale di Fig. 4.1. Questo ha permesso di effettuare dei test per quantificare l'efficacia dei diversi attuatori da impiegare per la riduzione della larghezza di riga ed allo stesso tempo progettare una cavità di prestabilizzazione con le caratteristiche giuste per assolvere il compito per cui è pensata, cioè di fornire un segnale d'errore poco rumoroso e con un forte guadagno alle frequenze medio-basse (0-10 kHz) in modo da consentire un'efficace correzione in questo intervallo.

La cavità ottica vera e propria è costituita da un cilindro di ottone forato lungo il suo asse in modo da far circolare la luce laser (Fig. 4.19 (a)). Una delle estremità è sagomata in modo da poter accogliere un o-ring su cui viene poggiato uno specchio, il quale viene poi bloccato in posizione da un supporto che viene avvitato al cilindro della cavità. Questo accorgimento consente di regolare l'inclinazione dello specchio stringendo o allentando le viti che fissano il supporto alla cavità. All'altra estremità possono essere applicati due supporti differenti i quali consentono di fissarvi, a seconda delle necessità, un elemento piezoelettrico cilindrico HPSt 150/14-10/12 oppure



(a)



(b)

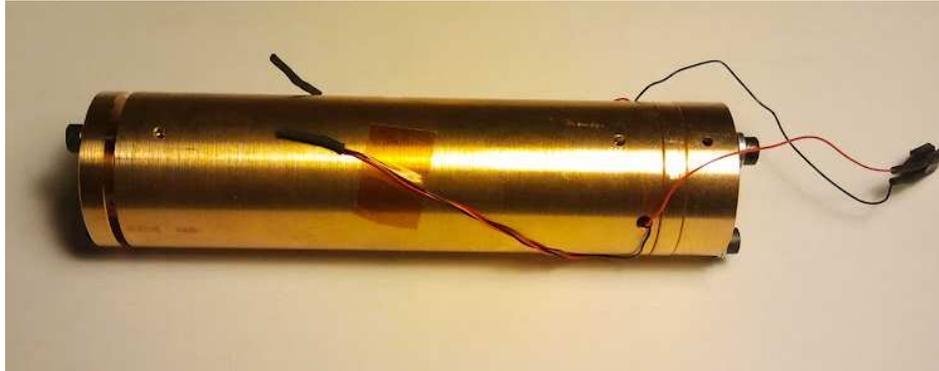
Figura 4.19: *Rappresentazione della cavità di prestabilizzazione (a) e sistema totale composto da cavità, half-pipe e scatola da vuoto (b).*

tre stack lineari PSt 150/2x3/7, entrambi elementi piezoelettrici con range di voltaggio -30/+150 V, prodotti dalla ditta Piezomechanik GmbH. In particolare è stata scelta la configurazione che permette di montare tre stack piezoelettrici che sono caratterizzati da una minore capacità, 170 nF rispetto ai 2.6  $\mu\text{F}$  dei piezoelettrici cilindrici (il caso rappresentato in Fig. 4.19). Indipendentemente dall'elemento piezoelettrico scelto, sopra di esso può essere poi collocato un secondo specchio il quale è bloccato in posizione da un secondo supporto avvitato alla cavità. Anche l'inclinazione di questo secondo specchio è regolabile grazie alla presenza di un o-ring. La lunghezza totale della cavità con i tre stack piezoelettrici è pari a 10 cm.

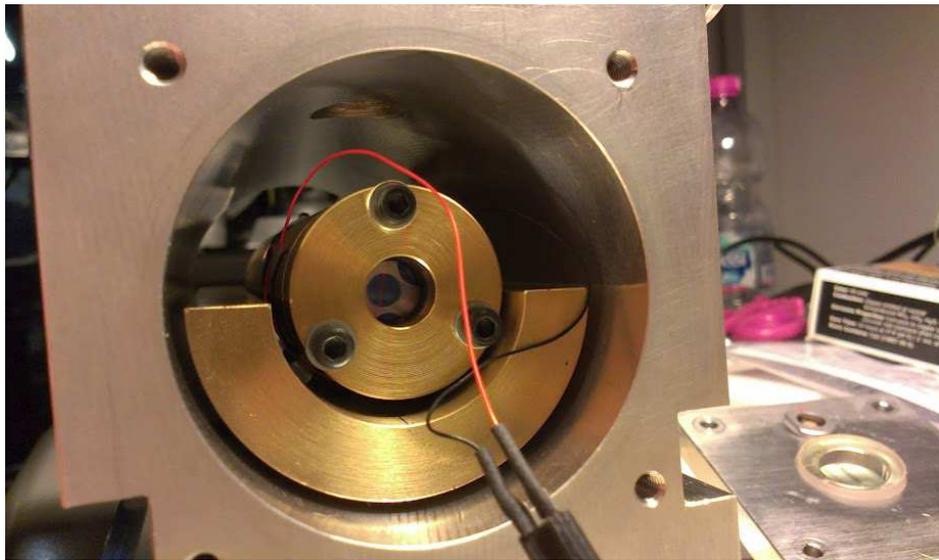
Una volta assemblata, la cavità viene collocata su un massiccio supporto in ottone a forma di cilindro tagliato (half-pipe), sul quale viene appoggiata con quattro piccoli supporti di sorbothane al fine di disaccoppiare i modi di vibrazione. Il raggio esterno del cilindro della cavità e il raggio interno dell'half-pipe sono fatti in modo che il cilindro della cavità e l'half-pipe siano concentrici se la cavità poggia su supporti di 2 mm di spessore.

Il sistema costituito da half-pipe e cavità è a sua volta collocato all'interno di una scatola da vuoto parallelepipedale con un foro di forma cilindrica che la attraversa per tutta la sua lunghezza (Fig. 4.19 (b)). Anche il raggio di questo alloggiamento cilindrico è tale che cavità e half-pipe sono concentrici con l'asse dell'alloggiamento se appoggiati su supporti di 2 mm di spessore. Questo consente di collocare a suo volta l'half-pipe su quattro pezzi di sorbothane, accorgimento che dovrebbe fornire un ulteriore disaccoppiamento dei modi di vibrazione. Le estremità del foro cilindrico sono chiuse da due sezioni quadrate con una sede per o-ring in viton che garantisce la tenuta del vuoto che possono essere avvitate alla scatola da vuoto, forate al centro in modo da permettere il passaggio del fascio laser. Sui fori sono incollate con della colla da vuoto due finestre Thorlabs WG11050-C trattate con coating antiriflesso broadband di tipo C. Su una di queste sezioni è posizionato un connettore da vuoto Fischer DEE 102 con quattro pin. A due di questi pin è collegato il sistema dei tre stack piezoelettrici, collegati tra loro in serie, che permette la variazione fine della lunghezza della cavità, mentre gli altri due pin sono liberi per permettere di inserire nella scatola un elemento quale ad esempio una sonda NTC. Mettendo sotto vuoto la cavità si ottiene un ulteriore aumento di reiezione del rumore acustico e in linea di principio si elimina la presenza di vapor acqueo che potrebbe portare ad effetti di bistabilità.

Sono state acquistate diverse serie di specchi sferici per la cavità, in modo da poter scegliere fra tre diversi raggi di curvatura e due valori di riflettività. In particolare gli specchi possono avere raggi di curvatura di 75 mm, 250 mm e 500 mm e riflettività pari a 99.97% e 99.99%. Le finesse teoriche raggiungibili sono quindi  $\sim 10000$  utilizzando gli specchi con riflettività più



(a)



(b)

Figura 4.20: Foto della cavità di prestabilizzazione (a) e sistema totale composto da cavità, half-pipe e scatola da vuoto (b).

bassa e  $\sim 30000$  utilizzando gli specchi con riflettività più alta. Gli specchi attualmente montati nella cavità hanno raggio di curvatura pari a 250 mm e riflettività del 99.97%. A causa dell'elevata finesse, i picchi della cavità sono larghi  $\sim 150$  kHz, sono cioè circa un fattore 60 più stretti rispetto ai picchi di trasmissione della cavità di duplicazione. Si può quindi stimare un guadagno alle basse frequenze più alto di un fattore  $\sim 100$ , cioè circa 20 dB. Come si può osservare dagli spettri in Fig. 4.18, tra i 10 e i 100 Hz gli spettri sono circa 40 dB più alti della  $\beta$ -line, quindi perché il loro contributo possa essere trascurabile è necessario ottenere un guadagno di circa 40 dB. La cavità di prestabilizzazione fornisce quindi parte del guadagno necessario per una ulteriore riduzione della larghezza di riga.

Al momento della stesura di questa tesi, il segnale d'errore fornito da questa cavità non è stato ancora osservato: i tentativi di allineamento hanno messo in luce la presenza di feedback ottico dalla cavità sul diodo laser e questo richiede l'impiego di un secondo isolatore, ancora però non disponibile.

## 4.6 Miglioramenti e sviluppi futuri

Alla luce di quanto osservato nelle sezioni precedenti è stato possibile delineare gli aspetti che più necessitano di un intervento al fine di migliorare le prestazioni spettrali del sistema. Sarà innanzitutto acquistato un nuovo EOM con cristallo tagliato all'angolo di Brewster più omogeneo e uniforme e possibilmente privo di risonanze entro i 5 MHz. Sarà poi progettata una nuova base per l'ECDL con cavità lunga ed EOM intra-cavità che consenta la sistemazione opportuna di tutte le componenti, un controllo in temperatura dell'intero sistema e non della sola parte del diodo laser ed una sufficiente stabilità e insensibilità alle vibrazioni acustiche. Visti i risultati ottenuti in sezione 4.4.4, sarà inoltre studiato un adeguato sistema di isolamento acustico e termico complessivo ed una fonte di alimentazione che permetta di ridurre il rumore elettrico.

Il sistema ottico sarà poi riottimizzato per soddisfare entrambe le esigenze di migliorare le prestazioni spettrali del laser e avere una potenza a 578 nm in uscita dalla cavità di duplicazione in linea con i valori massimi raggiunti nella sezione 3.2. Dopo la sostituzione del diodo laser infatti il fascio uscente dall'ECDL non è più collimato e il suo modo spaziale è particolarmente irregolare, anche per la presenza di un EOM con un cristallo di scarsa qualità in cavità, e questo ha portato ad un peggioramento del mode matching della cavità di duplicazione compromettendo l'efficacia di conversione. Il nuovo sistema laser dovrà anche tenere conto della necessità di iniettare in fibra ottica il fascio perché possa essere inviato sugli atomi, contenuti in una cella

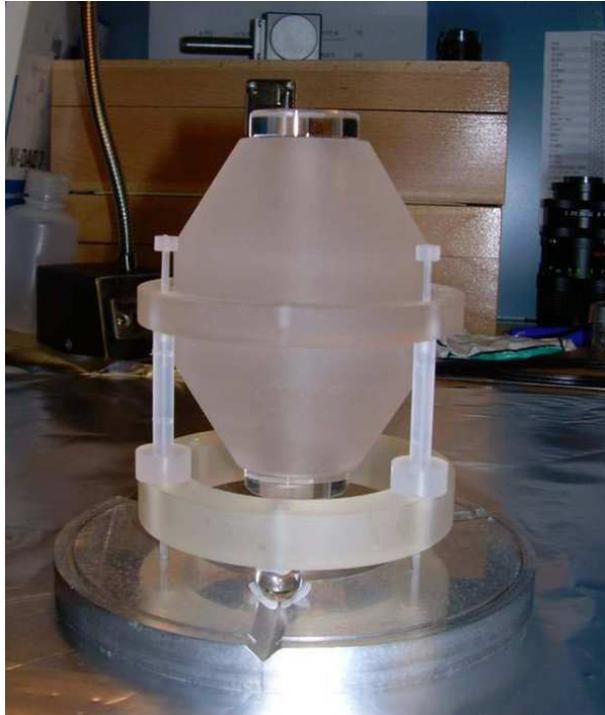


Figura 4.21: *Foto della cavità ULE verticale utilizzata nell'esperimento [48].*

collocata su un altro banco ottico, e ad una cavità ultrastabile ULE (sezione 4.1).

Lo sviluppo futuro del sistema infatti prevede infatti l'installazione di una cavità ottica ultrastabile ad altissima finesse, indispensabile per restringere la riga di emissione al livello di qualche Hz. Cavità di questo tipo sono state impiegate da numerosi gruppi per realizzare laser con larghezze di riga anche inferiori all'Hz, ad esempio [34, 44–48]. Le caratteristiche principali che contraddistinguono queste cavità sono l'elevatissima reiezione del rumore acustico e l'alta insensibilità alle fluttuazioni termiche.

Per minimizzare la sensibilità alle vibrazioni è necessario fare in modo che la distanza tra i punti centrali degli specchi della cavità rimanga invariata in seguito all'applicazione di una forza al supporto della cavità o alla cavità stessa. Questa condizione può essere raggiunta impiegando un montaggio simmetrico e questo di solito viene implementato in due modi. Un primo metodo è quello di montare la cavità in modo che il suo asse longitudinale sia verticale e allineato con la forza di gravità. La cavità è poi tenuta in posizione da un supporto passante per il suo piano trasversale di simmetria (Fig. 4.21). Un secondo metodo è quello di montare la cavità orizzontalmente studiando accuratamente la posizione dei supporti in modo

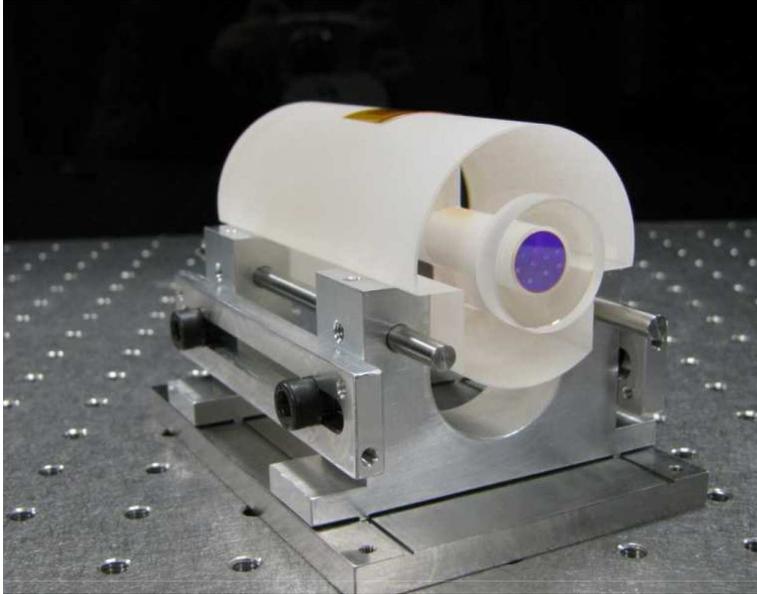


Figura 4.22: Foto della cavità ULE orizzontale utilizzata per la realizzazione di un orologio atomico con atomi di Itterbio all'INRiM.

far sì che le inevitabili deformazioni verticali della cavità date dalla gravità siano tali da mantenere invariata la distanza tra i centri dei due specchi (Fig. 4.22). Soprattutto questo secondo metodo richiede un'attenta e dettagliata modellizzazione mediante un calcolo a elementi finiti della cavità e dei suoi supporti [47, 49].

La stabilità delle dimensioni della cavità a causa dei cambiamenti di temperatura è fondamentale per stabilizzare la frequenza di emissione su scale di tempo superiori al secondo. Questa può essere massimizzata costruendo la cavità in vetro ULE (ultra low expansion), materiale caratterizzato da un coefficiente di espansione termica lineare con un minimo a una temperatura  $T_c$  vicina alla temperatura ambiente. Vicino alla temperatura  $T_c$  resta quindi il solo contributo quadratico che contribuisce per un fattore  $\Delta\nu/\nu \sim 10^{-9}(T - T_c)^2$  [44]. Stabilizzando la temperatura il più vicino possibile a  $T_c$  questo contributo può essere reso al limite nullo, tuttavia non possono essere trascurati i contributi all'espansione termica della cavità dati dal substrato e dal coating degli specchi. Per questo è necessario un sistema di controllo e stabilizzazione della temperatura il più accurato possibile al fine di minimizzare le variazioni di temperatura. Con questi accorgimenti è possibile raggiungere una sensibilità stimata intorno ai 50 Hz/mK [44]. Un limite inferiore alla stabilità è rappresentato inoltre dal limite di rumore termico dovuto al moto browniano delle molecole del substrato e del coating

degli specchi. Se la stabilizzazione in temperatura è particolarmente efficiente, per abbassare questo limite si impiegano specchi con un substrato di fused silica, materiale caratterizzato da un coefficiente di espansione termica più alto di quello del vetro ULE ma con un rumore termico più basso. Questo permette di raggiungere stabilità pari dell'ordine di  $\sim 5 \times 10^{-16}$  [47].

La cavità ULE in conclusione possiede tre caratteristiche estremamente importanti. È innanzitutto sostanzialmente insensibile alle vibrazioni, e questo consente di ottenere un segnale d'errore molto pulito alle frequenze acustiche. Inoltre la finesse tipica di questo tipo di cavità è dell'ordine di  $10^5$ , che per una cavità di 10 cm di lunghezza implica una larghezza di riga di qualche kHz la quale fornisce ulteriori 10-20 dB di guadagno alle decine di Hz rispetto alla cavità di prestabilizzazione. Infine grazie all'elevata stabilità su scale di tempo lunghe, la cavità costituisce anche un preciso riferimento in frequenza. In particolare il drift termico e di invecchiamento della cavità può essere misurato e corretto con un sistema di feed forward. Nel nostro caso questo aspetto è particolarmente importante perché permette di conoscere e mantenere stabile la frequenza assoluta del laser, dato che non è possibile avere un segnale di riferimento dalla spettroscopia atomica della transizione doppiamente proibita  $^1S_0 \rightarrow ^3P_0$ .

# Conclusioni

Durante questo lavoro di tesi è stato progettato e sviluppato un prototipo di sistema laser che fornisce oltre 50 mW luce gialla a 578 nm a partire dalla radiazione emessa da un diodo laser a quantum dot duplicata in frequenza. È stato mostrato come sia stato possibile ridurre la larghezza di riga di emissione del dispositivo fino a qualche kHz.

È stato mostrato come la particolare natura della sorgente laser a quantum dot impiegata si sia rivelata problematica ai fini del miglioramento delle prestazioni spettrali del dispositivo, in quanto non è stato possibile impiegare efficacemente la corrente di alimentazione del diodo laser come attuatore per la correzione della frequenza di emissione del dispositivo.

È stata quindi studiata e adottata una configurazione ECDL con cavità lunga all'interno della quale è stato collocato un modulatore elettro-ottico. Sono state svolte numerose misure ai fini di individuare la migliore soluzione tra due diversi EOM, uno con coating antiriflesso e uno contenente un cristallo tagliato all'angolo di Brewster, le quali hanno messo in mostra le sostanziali analogie tra le prestazioni dei due dispositivi, ma le migliori caratteristiche di polarizzazione del secondo. Con questa configurazione grazie al sistema elettronico di aggancio in frequenza studiato e ottimizzato durante il presente lavoro di tesi, e grazie anche a particolari accorgimenti per ridurre il rumore acustico ed elettronico la larghezza di riga di emissione del sistema laser costruito relativa alla cavità di riferimento è stimata, con due diversi metodi approssimati a partire dallo spettro di rumore in frequenza, dell'ordine di qualche kHz, un valore di due ordini di grandezza inferiore rispetto al valore iniziale dell'ECDL ( $\sim 700$  kHz).

Allo stesso tempo è stata sviluppata una particolare cavità ottica a finezza elevata con l'obiettivo di migliorare ulteriormente le prestazioni spettrali grazie ad un aumento di guadagno alle basse frequenze e sono stati infine individuati i possibili miglioramenti e gli sviluppi futuri del sistema per raggiungere gli obiettivi desiderati.



# Appendice A

## Metodo Hänsch-Couillaud

Il metodo Hänsch-Couillaud [50] utilizza una cavità al cui interno è piazzato un elemento polarizzatore per ricavare un segnale dispersivo in corrispondenza dei picchi di trasmissione della cavità analizzando il cambiamento di polarizzazione della luce riflessa. Il segnale dispersivo così ottenuto può essere impiegato come segnale di riferimento per agganciare un sistema laser a una cavità ottica (o viceversa).

Consideriamo un campo elettrico polarizzato linearmente incidente su una cavità ottica al cui interno è collocato un polarizzatore la cui asse di trasmissione forma un angolo  $\theta$  con l'asse di polarizzazione del campo incidente. La radiazione incidente può essere scomposta nelle due componenti parallela e perpendicolare all'asse di trasmissione del polarizzatore e si avrà che la componente parallela all'asse del polarizzatore entra in cavità, compie un giro della cavità ed esce con uno sfasamento dipendente dalla frequenza della radiazione. Si può mostrare che la componente parallela del campo riflesso è data da:

$$E_{\parallel}^{(r)} = E_{\parallel}^{(i)} \left[ \sqrt{R_1} - \frac{T_1}{\sqrt{R_1}} \frac{Re^{i\delta}}{1 - Re^{i\delta}} \right] \quad (\text{A.1})$$

dove  $E_{\parallel}^{(i)}$  è la componente parallela del campo incidente,  $R_1$  e  $T_1$  sono la riflettività e trasmittività dello specchio di ingresso,  $\delta$  è lo sfasamento e il fattore  $R < 1$  è legato alla finesse della cavità e tiene conto dell'attenuazione data dalla presenza del polarizzatore e delle altre perdite. La componente perpendicolare all'asse del polarizzatore invece non può circolare in cavità quindi viene semplicemente riflessa dallo specchio di ingresso ed è data da:

$$E_{\perp}^{(r)} = E_{\perp}^{(i)} \sqrt{R_1} \quad (\text{A.2})$$

Il campo riflesso totale è dato quindi dalla somma dei due termini precedenti. Alla risonanza si ha  $\delta = 2m\pi$ , con  $m$  intero, entrambe le componenti del campo riflesso sono reali e in fase e la polarizzazione del campo riflesso totale resta lineare anche se ruotata di  $\theta$  rispetto a quella della radiazione incidente. Fuori dalla risonanza, la componente parallela del campo riflesso è sfasata rispetto alla componente perpendicolare e questo risulta in una polarizzazione ellittica del campo riflesso totale con un verso che dipende dal detuning. Per rilevare l'ellitticità della polarizzazione, la luce riflessa è inviata ad una lamina  $\lambda/4$  e poi ad un beam splitter polarizzatore. La polarizzazione del campo riflesso può essere infatti considerata come sovrapposizione di due polarizzazioni circolari in senso opposto con diversa ampiezza. La lamina  $\lambda/4$  trasforma queste due polarizzazioni circolari in polarizzazioni lineari che sono separate dal beam splitter polarizzatore in modo che le loro intensità siano misurate indipendentemente. Si può mostrare che la differenza tra le intensità  $I_a$  e  $I_b$  in uscita dal cubo polarizzatore è data da:

$$I_a - I_b = I^{(i)} 2 \cos \theta \sin \theta \frac{T_1 R \sin \delta}{(1 - R)^2 4R \sin^2(\delta/2)} \quad (\text{A.3})$$

dove  $I^{(i)}$  è l'intensità della radiazione incidente.

Questa intensità funzione dello sfasamento è simmetrica rispetto alla frequenza di risonanza della cavità e presenta una forte pendenza vicino alla risonanza e delle code lentamente variabili e rappresenta un segnale d'errore dispersivo ideale per la stabilizzazione in frequenza di un laser.

# Bibliografia

- [1] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, E. A. Cornell, *Observation of a Bose-Einstein Condensate in a Dilute Atomic Vapour*, Science, 269(5221):198-201, (1995).
- [2] B. DeMarco, *Onset of Fermi Degeneracy in a Trapped Atomic Gas*, Science, 285(5434):1703-1706, (1999).
- [3] Y. Takasu, K. Maki, K. Komori, T. Takano, K. Honda, M. Kumakura, T. Yabuzaki, Y. Takahashi, *Spin-Singlet Bose-Einstein Condensation of Two-Electron Atoms*, Phys. Rev. Lett. **91**, 4, (2003).
- [4] D. Jaksch, H. J. Briegel, J. I. Cirac, C. W. Gardiner, P. Zoller, *Entanglement of atoms via cold controlled collisions*, Phys. Rev. Lett. **82**, 1975-1978, (1999).
- [5] O. Mandel, M. Greiner, A. Widera, T. Rom, T. W. Hänsch, I. Bloch, *Coherent Transport of Neutral Atoms in Spin-Dependent Optical Lattice Potentials*, Phys. Rev. Lett. **91**, 010407, (2003).
- [6] A. J. Daley, M. M. Boyd, J. Ye, P. Zoller, *Quantum Computing with Alkaline-Earth-Metal Atoms*, Phys. Rev. Lett. **101**, 170504, (2008).
- [7] A. J. Daley, *Quantum Computing and Quantum Simulation with Group-II Atoms*, Quantum Simulation Processing **10**, 6, (2011).
- [8] N. Poli, R. E. Drullinger, G. Ferrari, F. Sorrentino, M. Prevedelli, G. M. Tino, *Optical Frequency Standard with Ultra-cold Strontium Atoms*, Proceedings of the 20th EFTF, (2006).
- [9] N. D. Lemke, A. D. Ludlow, Z. W. Barber, T. M. Fortier, S. A. Diddams, Y. Jiang, S. R. Jefferts, T. P. Heavner, T. E. Parker, C. W. Oates, *Spin-1/2 Optical Lattice Clock*, Rev. Lett. **103**, 063001, (2009).

## BIBLIOGRAFIA

---

- [10] D. P. DiVincenzo, *The Physical Implementation of Quantum Computation*, Fortschritte der Physik **48**, 771-784, (2000).
- [11] G. Pagano, *Raffreddamento e Intrappolamento di Atomi di Itterbio*, Tesi Magistrale, Università la Sapienza, (2011).
- [12] M. Mancini, *Realizzazione Sperimentale di un Gas Quantistico Degenerare di Atomi di Itterbio*, Tesi Magistrale, Università Statale di Milano, (2012).
- [13] A. Yamaguchi, *Metastabile State of Ultracold and Quantum Degenerate Ytterbium Atoms*, PhD Thesis, Kyoto University, (2008).
- [14] T. Hong, C. Cramer, E. Cook, W. Nagourney, E. N. Fortson, *Observation of the  $^1S_0 \rightarrow ^3P_0$  Transition in Ytterbium for Optical Clocks and Qubit Arrays*, Opt. Lett. **30**, 19, (2005).
- [15] A. V. Taichenachev, V. I. Yudin, C. W. Oates, C. W. Hoyt, Z. W. Barber, L. Hollberg, *Magnetic Field-Induced Spectroscopy of Forbidden Optical Transitions with Application to Lattice-Based Optical Atomic Clocks*, Phys. Rev. Lett. **96**, 083001, (2006).
- [16] G. Insero, *Realizzazione di un Apparato Sperimentale per il Rallentamento di un Fascio Atomico di Itterbio*, Tesina Triennale, Università di Firenze, (2010).
- [17] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T. W. Hänsch, I. Bloch, *Quantum Phase Transition from a Superfluid to a Mott Insulator in a Gas of Ultracold Atoms*, Nature Vol **415**, Gennaio 2002.
- [18] Z. W. Barber, C. W. Hoyt, C. W. Oates, L. Hollberg, A. V. Taichenachev, V. I. Yudin, *Direct Excitation of the Forbidden Clock Transition in Neutral  $^{174}\text{Yb}$  Atoms Confined to an Optical Lattice*, Phys. Rev. Lett. **96**, 083001 (2006).
- [19] W. S. Bakr, J. I. Gillen, A. Peng, S. Fölling, M. Greiner, *A Quantum Gas Microscope for Detecting Single Atoms in a Hubbard-regime Optical Lattice*, Nature Vol **426**, Novembre 2009.
- [20] R. Maruyama, *Optical Trapping of Ytterbium Atoms*, PhD Thesis, University of Washington, (2003).
- [21] R. Paschotta, *Derivation of the Schawlow-Townes Linewidth of Lasers*, RP Photonics Consulting GmbH, (2010).

- [22] R. W. Boyd, *Nonlinear optics*, Academic press INC, (1992).
- [23] G. Aglieri Rinella, *Duplicazione di Frequenza in Guide Ottiche di Nio-bato di Litio a Scambio Protonico Inverso*, Tesi Magistrale, Università di Palermo, (2001).
- [24] W. Nagouney, *Quantum Electronics for Atomic Physics*, Oxford University press, (2010).
- [25] J. A. Armstrong *et al*, *Interaction between Light Waves in a Nonlinear Dielectric*, Phys. Rev. **127**, (1962)
- [26] G. Marro, *Controlli Automatici*, Zanichelli, (1997).
- [27] L. Ricci, M. Weidemüller, T. Esslinger, A. Hemmerich, C. Zimmermann, V. Vuletic, W. König, T. W. Hänsch, *A Compact Grating-stabilized Diode Lased System for Atomic Physics*, Opt. Commun. **117**, (1995).
- [28] E. Hecht, *Optics*, Adelphi University, (2007).
- [29] U. Torrini, *Generazione di Radiazione Laser a 578 nm Tramite Duplicazione di Frequenza*, Tesina Triennale, Università di Firenze, (2012).
- [30] [http://www.innolume.com/\\_pdfs/laserchips/GC-1156-T0-200.pdf](http://www.innolume.com/_pdfs/laserchips/GC-1156-T0-200.pdf)
- [31] [http://www.roditi.com/Optical/MgO\\_Lithium.html](http://www.roditi.com/Optical/MgO_Lithium.html)
- [32] A. Lambrecht, *Atomes Froids et Fluctuations Quantiques*, Université Pierre et Marie Curie, Tesi di dottorato, (1995).
- [33] A. Lambrecht, J. M. Courty, S. Reynaud, E. Giacobino, *Cold Atoms: a New Medium for Quantum Optics*, Appl. Phys. B **60**, 129-134, (1995).
- [34] M. Tarallo, N. Poli, M. Schioppo, D. Sutyryn, G. M. Tino, *A High-stability Semiconductor Laser System for a <sup>88</sup>Sr-based Optical Lattice Clock*, Appl. Phys. B **103**, 17-25, (2011).
- [35] R. W. P. Drever, J. L. Hall *et al*, *Laser Phase and Frequency Stabilization Using an Optical Resonator*, App. Phys. B **31**, 97-105, (1983).
- [36] E. D. Black, *An Introduction to Pound-Drever-Hall Laser Frequency Stabilization*, Am. J. Phys. **69** (1), (2001).

## BIBLIOGRAFIA

---

- [37] Dr. Alexander Nevsky, Institut fuer Experimentalphysik, Heinrich-Heine-Universitaet, Duesseldorf, Comunicazione Privata.
- [38] Dr. Won-Kyu Lee, Center for Time and Frequency Division of Physical Metrology, Korea Institute of Standards and Science, Comunicazione Privata.
- [39] J. L. Hall, M. Zhu, *An Introduction to Phase-Stable Optical Sources*, Proceeding of the International School of Physics “E. Fermi”, p. 686 (1992).
- [40] G. Di Domenico, S. Schilt, P. Thomann, *Simple Approach to the Relation Between Laser Frequency Noise and Laser Line Shape*, *App. Opt.* **49**, 25, 4801-4807, (2010).
- [41] N. Kolachevsky, J. Alnis, C. G. Parthey, A. Matveev, R. Landig, T. W. Hänsch, *Low Phase Noise Diode Laser Oscillator for 1S-2S Spectroscopy in Atomic Hydrogen*, *Opt. Lett.* **36**, 21, (2011).
- [42] H. Stoehr, F. Mensing, J. Helmcke, U. Sterr, *Diode Laser with 1 Hz Linewidth*, *Opt. Lett.* **31**, 6, (2011).
- [43] J. Le Gouët, J. Kim, C. Bourassin-Bouchet, M. Lours, A. Landragin, F. Pereira Dos Santos, *Wide Bandwidth Phase-locked Diode Laser with an Intra-cavity Electro-optic Modulator*, *Opt. Comm.* **282**, 5, (2008).
- [44] J. Alnis, A. Matveev, N. Kolachevsky, T. Wilken, T. Udem, T. W. Hänsch, *Subhertz Linewidth Diode Lasers by Stabilization to Vibrationally and Thermally Compensated Ultralow-expansion Glass Fabry-Perot Cavities*, *Phys. Rev. A* **77**, 053809, (2008).
- [45] M. Notcutt, L. Ma, J. Ye, J. L. Hall, *Simple and Compact 1-Hz Laser System via an Improved Mounting Configuration of a Reference Cavity*, *Opt. Lett.* **30**, 14, (2005).
- [46] A. D. Ludlow, X. Huang, M. Notcutt, T. Zanon-Willette, S. M. Foreman, M. M. Boyd, S. Blatt, J. Ye, *Compact, Thermal-noise-limited Optical Cavity for Diode Laser Stabilization at  $1 \times 10^{-15}$* , *Opt. Lett.* **32**, 6, (2006).
- [47] J. Millo, D. V. Magalhaes, C. Mandache, Y. Le Coq, E. M. L. English, P. G. Westergaard, J. Lodewyck, S. Bize, P. Lemonde, G. Santarelli, *Ultrastable lasers based on vibration insensitive cavities*, *Phys. Rev. A*, **79**, 053829, (2009).

- [48] C. W. Oates, Z. W. Barber, J. E. Stalnaker, C. W. Hoyt, T. M. Fortier, S. A. Diddams, and L. Hollberg, *Stable Laser System for Probing the Clock Transition at 578 nm in Neutral Ytterbium*, Frequency Control Symposium, 2007 Joint with the 21st European and Time Forum IEEE International.
- [49] S. A. Webster, M. Oxborrow, P. Gill, *Vibration Insensitive Optical Cavity*, Phys. Rev. A, **75**, 011801(R), (2007).
- [50] T. W. Hänsch, B. Couillaud, *Laser Frequency Stabilization by Polarization Spectroscopy of a Reflecting Reference Cavity*, Opt. Commun. **35** (3), 441 (1980).



# Ringraziamenti

Vorrei innanzitutto ringraziare tutte quelle persone senza le quali questa tesi non avrebbe mai visto la luce. Un ringraziamento particolare va quindi al Prof. Massimo Inguscio, per avermi fatto scoprire il mondo della fisica atomica e per avermi dato la possibilità di svolgere la tesi con il gruppo dell'YbLab, consentendomi di iniziare a capire cosa significa essere un fisico.

Grazie di cuore a Jacopo Catani per avermi dedicato un numero particolarmente consistente di ore del suo tempo, come coordinatore e come relatore, per avermi mostrato come si possa sempre fare un po' meglio e per avermi fatto provare, come ad uno studente che si rispetti, l'ebbrezza di consegnare la tesi alle stampe all'ultimo secondo. Grazie a Leonardo Fallani perché anche grazie a lui ho scoperto anni fa la fisica atomica e perché nonostante i suoi infiniti impegni ha sempre trovato qualche minuto da dedicarmi quando ho avuto bisogno. Grazie a Florian Schaefer, per essere stato in laboratorio il 16 agosto, per aver risposto, soprattutto nei finesettimana, ad un buon numero di tediosissime mail di richiesta di codici e datasheet e per avermi insegnato senza troppo successo a fare i cavi coassiali. Grazie a Guido per le spiegazioni e le discussioni, per il suo ottimismo e per "L'Italiano Medio". Grazie a Marco per aver condiviso con me il ruolo di "ultimo arrivato" e per avermi mostrato come parcheggiare efficacemente (scherzo!).

Un ringraziamento va poi a tutti gli amici, da quelli "storici" ai nuovi, che mi hanno accompagnato in questo percorso e che hanno fatto in modo che le mie giornate fossero qualcosa di più di lezioni e libri. Il tempo  $\Delta t$  ancora a disposizione è agli sgoccioli, l'ispirazione è finita da un pezzo e l'ora tarda appesantisce le palpebre, quindi non cito nessuno per ricordarvi tutti. Spero che mi perdonerete...

Dato che mi ha esplicitamente chiesto di non farlo, ringrazio mio fratello Alberto per tutte le volte che abbiamo discusso anche sulle cose più stupide e per aver letto senza capire quasi nulla 100 pagine di tesi alla ricerca di refusi. Un ringraziamento speciale va infine ai miei genitori per non avermi mai fatto mancare in tutti questi anni il loro appoggio e per avermi sempre spronato ad andare avanti anche e soprattutto nei momenti di difficoltà. Grazie!