



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
FIRENZE

Scuola di  
Scienze Matematiche  
Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in  
Scienze Fisiche ed Astrofisiche

**Misura delle proprietà collisionali di gas ultrafreddi  
di Itterbio e sviluppo di una sorgente laser  
per la loro manipolazione**

**Measurement of collisional properties in ultracold  
Ytterbium gases and development of a laser source  
for their manipulation**

**Relatore**

Prof. Leonardo Fallani

**Candidata**

Giada Binella

Anno Accademico 2016 - 2017



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>1 Concetti fondamentali</b>	<b>5</b>
1.1 Caratteristiche principali dell'atomo di Itterbio . . . . .	5
1.2 Reticoli ottici . . . . .	8
1.2.1 Potenziali periodici ottici . . . . .	9
1.2.2 Struttura a bande e funzioni di Bloch . . . . .	11
1.2.3 Regime di <i>tight-binding</i> . . . . .	13
1.3 Interazione radiazione-materia . . . . .	15
1.3.1 Transizioni a singolo fotone tra stati elettronici . . . . .	15
1.3.2 Transizioni a doppio fotone tra stati di spin . . . . .	17
<b>2 Setup sperimentale e procedure</b>	<b>23</b>
2.1 Setup sperimentale . . . . .	23
2.1.1 Sistema da vuoto . . . . .	23
2.2 Sistemi Laser . . . . .	25
2.2.1 Laser a 399 nm . . . . .	25
2.2.2 Laser a 556 nm . . . . .	28
2.2.3 Laser a 1064 nm . . . . .	29
2.2.4 Laser a 759 nm . . . . .	31
2.2.5 Laser a 578 nm . . . . .	31
2.3 Procedura sperimentale . . . . .	34
2.3.1 Zeeman Slower . . . . .	34
2.3.2 Trappola magneto-ottica . . . . .	34
2.3.3 Risonatore ottico . . . . .	35
2.3.4 Trasporto e trappola dipolare . . . . .	35
2.3.5 Reticoli ottici . . . . .	37
2.3.6 <i>Imaging</i> . . . . .	38

<b>3</b>	<b>Spettroscopia con transizione di orologio su un BEC di <math>^{174}\text{Yb}</math></b>	<b>39</b>
3.1	Condizioni per la spettroscopia di <i>clock</i> . . . . .	39
3.1.1	Eccitazione della transizione $^1S_0 \rightarrow ^3P_0$ . . . . .	39
3.1.2	<i>Light shift</i> differenziali e lunghezza d'onda magica. . . . .	42
3.1.3	Regime di Lamb-Dicke . . . . .	44
3.2	Spettroscopia con transizione d'orologio . . . . .	46
3.2.1	Spettroscopia con numero di occupazione risolto . . . . .	49
3.3	Stima delle lunghezze di scattering . . . . .	54
3.3.1	Lunghezza di scattering e-g . . . . .	54
3.3.2	Lunghezza di scattering e-e . . . . .	56
3.4	Collisioni inelastiche . . . . .	58
3.4.1	Ottimizzazione del processo di repump . . . . .	59
3.4.2	Collisioni inelastiche $e - g$ . . . . .	66
3.4.3	Collisioni inelastiche $e - e$ . . . . .	68
3.5	Conclusioni . . . . .	70
<b>4</b>	<b>Basi teoriche sulla duplicazione di frequenza</b>	<b>73</b>
4.1	Ottica non lineare . . . . .	73
4.2	Generazione di seconda armonica . . . . .	77
4.3	<i>Phase matching</i> . . . . .	80
4.4	Generazione di seconda armonica in cavità . . . . .	83
4.4.1	Cavità <i>bow-tie</i> . . . . .	83
4.4.2	Cristallo non lineare in cavità . . . . .	87
<b>5</b>	<b>Realizzazione di una nuova sorgente laser a 556 nm</b>	<b>89</b>
5.1	Sorgente infrarossa . . . . .	89
5.2	Realizzazione della cavità di duplicazione . . . . .	92
5.2.1	Duplicazione in singolo passaggio . . . . .	94
5.2.2	Cavità di duplicazione . . . . .	97
5.3	Larghezza di riga del laser infrarosso . . . . .	105
5.4	Analisi del rumore in ampiezza della sorgente laser . . . . .	107
5.5	Conclusioni e sviluppi futuri . . . . .	109
	<b>Conclusioni</b>	<b>111</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>113</b>

# Introduzione

Negli ultimi trent'anni lo sviluppo delle tecniche di manipolazione atomica, sfruttando l'interazione con la luce laser, ha portato alla possibilità di raffreddare campioni di gas atomici fino a temperature dell'ordine del nanokelvin, realizzando così gas ultrafreddi degeneri sia bosonici [1, 2], che fermionici [3, 4].

Ciò ha aperto la strada ad una nuova branca della fisica, quella dei gas quantistici ultrafreddi, che permettono di condurre esperimenti con un grado di controllo molto elevato sui parametri che li descrivono. In particolare, sistemi di questo tipo risultano estremamente versatili per la simulazione quantistica [5, 6, 7], seguendo la congettura proposta da R.Feynman [8], secondo la quale è possibile risolvere problemi quantistici, non caratterizzabili attraverso simulazioni numeriche a causa della loro complessità, attraverso lo studio sperimentale di altri sistemi nei quali il modello fisico di interesse possa essere realizzato esattamente.

Un elemento fondamentale per questo tipo di ricerca è stata la realizzazione di reticoli ottici [9], che permettono di controllare in modo estremamente accurato varie proprietà del sistema atomico. Ciò ha permesso anche di realizzare simulazioni di materia-condensata [10] e di indagare sistemi a molti corpi fortemente correlati [11, 7]. La simulazione quantistica di sistemi a stato solido ha permesso di descrivere un vasto numero di fenomeni, ad esempio la transizione di fase quantistica da fase superfluida ad isolante di Mott [12] oppure la localizzazione di Anderson di onde di materia [13].

L'introduzione dei reticoli ottici, con la possibilità di bloccare lo stato di moto delle particelle intrappolate all'interno dei vari siti reticolari, ha anche permesso di effettuare misure di spettroscopia estremamente precise delle frequenze delle transizioni atomiche, aprendo la strada alla realizzazione di orologi ottici su reticolo [14]. A tale scopo è stato di fondamentale importanza lo studio degli atomi alcalino terrosi (o simil-alcalino terrosi, come ad esempio l'Itterbio). Questi atomi presentano una struttura con due elettroni nel livello esterno, simile a quella dell'Elio ma, a differenza di quest'ultimo, il loro elevato numero atomico rende possibili le transizioni tra livelli caratte-

rizzati da un diverso numero quantico di spin, dette "di intercombinazione". Queste transizioni tuttavia hanno larghezze di riga molto ridotte. In particolare, quella che lega lo stato metastabile  $e = {}^3P_0$  allo stato fondamentale  $g = {}^1S_0$  è doppiamente proibita e ciò fa sì che i due livelli risultino debolmente accoppiati alla radiazione ottica e che lo stato eccitato sia caratterizzato da un tempo di vita medio dell'ordine della decina di secondi. Negli ultimi decenni, sfruttando questa transizione su atomi intrappolati all'interno dei reticoli ottici, è stato possibile costruire orologi atomici che raggiungono un'accuratezza e precisione dell'ordine di  $10^{18}$  [15].

Oltre alle applicazioni metrologiche la manipolazione coerente degli stati atomici ha permesso la realizzazione di campi magnetici artificiali [16] utilizzando, ad esempio, transizioni Raman per accoppiare stati di spin diverso seguendo l'idea delle così dette "dimensioni sintetiche" [17, 18], secondo la quale si considerano stati atomici diversi come se fossero siti reticolari di una dimensione aggiuntiva. Ciò ha permesso di simulare l'effetto di un campo magnetico intenso, per particelle effettivamente cariche, osservando poi le correnti di bordo caratteristiche dell'effetto Hall quantistico [19]. A partire da qui è stato possibile ingegnerizzare l'accoppiamento spin-orbita e realizzare *ladders* fermioniche con flussi magnetici sintetici [20, 21], anche utilizzando la transizione di orologio.

Alla base della maggior parte di queste applicazioni vi è la conoscenza delle proprietà di scattering degli atomi nei diversi stati elettronici. Le lunghezze di scattering dello Stronzio [22, 23] e dell'Itterbio fermionico [24, 25] sono già ben note, mentre quelle dell'Itterbio bosonico risultano ancora in gran parte sconosciute. Sebbene la maggior parte degli orologi atomici sia realizzata con atomi fermionici per limitare il problema delle interazioni, l'implementazione con atomi bosonici potrebbe fornire grandi vantaggi grazie alla bassa sensibilità a campi magnetici esterni ed alla struttura dei livelli più semplice. Le interazioni possono essere eliminate realizzando dei campioni di Itterbio bosonico nello stato di isolante di Mott intrappolato all'interno di un reticolo ottico con un singolo atomo per ogni sito reticolare. Risulta quindi fondamentale per questo scopo indagare le proprietà di scattering bosoniche.

In questo lavoro di tesi, la cui realizzazione è avvenuta nell'ambito dell'esperimento dedicato allo studio di gas degeneri di Itterbio attualmente in corso presso il dipartimento di Fisica ed Astronomia dell'Università di Firenze, è stata innanzitutto effettuata una caratterizzazione spettroscopica ad alta risoluzione della transizione  ${}^1S_0 \rightarrow {}^3P_0$  in un campione di  ${}^{174}\text{Yb}$  bosonico intrappolato in un reticolo ottico tridimensionale in regime di Lamb-Dicke. Per prima cosa sono stati osservati e identificati i vari picchi di spettroscopia associati all'occupazione dei siti reticolari da parte di una o più particelle. Successivamente, andando a modificare il confinamento in reticolo, è stato

---

possibile ricavare le energie corrispondenti ai vari processi d'interazione, a partire dalle quali è stato possibile estrapolare le lunghezze di scattering associate ai diversi stati atomici.

Infine, sono stati ricavati i coefficienti di decadimento, fin'ora sconosciuti, per gli atomi nello stato eccitato  $e$  nei diversi processi collisionali  $e - g$  ed  $e - e$ .

Parallelamente alle misure sperimentali, in questo progetto di tesi è stato progettato e realizzato un sistema laser che, a partire da una sorgente infrarossa con lunghezza d'onda di 1112 nm e potenza 4.5 W permette di ricavare radiazione laser visibile a 556 nm con una potenza di 3.4 W, attraverso generazione di seconda armonica in una cavità risonante. Questa sorgente verrà integrata al setup sperimentale del laboratorio per effettuare misure su campioni fermionici che sfruttano la radiazione verde a 556 nm non solo nei processi di raffreddamento ed intrappolamento, ma anche per realizzare transizioni Raman che accoppino stati di spin diverso realizzando nuove tipologie di dimensione sintetica [19, 20].

Il lavoro di tesi è così organizzato:

- nel capitolo 1 vengono introdotti alcuni concetti fondamentali, in particolare vengono illustrate le caratteristiche fondamentali dell'atomo di Itterbio, vengono esaminati gli aspetti principali della fisica degli atomi intrappolati e trattati brevemente i processi di interazione di un sistema atomico con una radiazione coerente;
- nel capitolo 2 vengono descritte le parti fondamentali del setup sperimentale, tra cui il sistema da vuoto e le sorgenti laser usate, e le procedure seguite per ottenere e manipolare un gas degenere di Itterbio;
- nel capitolo 3 vengono presentate le misure sperimentali su campioni ultrafreddi di Itterbio bosonico realizzate all'interno di questo lavoro di tesi.

A questi primi tre capitoli, inerenti alla spettroscopia di precisione su gas di Itterbio, segue la trattazione relativa alla realizzazione sperimentale di un nuovo sistema laser per la manipolazione del campione:

- nel capitolo 4 vengono presentate le basi teoriche dell'ottica non lineare, con particolare riferimento alla generazione di seconda armonica, e delle cavità ottiche risonanti;
- nel capitolo 5, infine, viene trattata la progettazione e realizzazione della nuova sorgente laser a 556 nm che andrà in futuro ad integrare il setup sperimentale.



# Capitolo 1

## Concetti fondamentali

In questo capitolo vengono presentati alcuni concetti fondamentali nel campo degli atomi ultrafreddi, oggetto del nostro studio. Per prima cosa si esaminano le caratteristiche fondamentali dell'atomo di Itterbio, lo schema dei livelli e le principali transizioni sfruttate per manipolarlo (sezione 1.1). In seguito vengono introdotti gli aspetti principali della fisica degli atomi intrappolati con particolare attenzione ai reticoli ottici e alla condizione di *tight-binding* (sezione 1.2). Infine, vengono illustrati brevemente i processi d'interazione di un sistema atomico con una radiazione coerente a singola e doppia frequenza (sezione 1.3).

### 1.1 Caratteristiche principali dell'atomo di Itterbio

L'Itterbio è un metallo raro, fortemente diamagnetico, collocato nella tavola periodica come XIV elemento della serie dei lantanidi. La sua massa atomica è 173.04 u. I punti di fusione e di ebollizione sono rispettivamente 824 °C e 1196 °C e lo rendono il metallo con il più piccolo intervallo di temperatura corrispondente alla fase liquida [26]. Con numero atomico  $Z$  pari a 70, possiede molti isotopi: in natura ne sono stati identificati 7 stabili e 27 radioattivi. In tabella 1.1 sono riportate alcune caratteristiche degli isotopi stabili conosciuti, i quali sono sia bosonici, con numero di massa  $A$  pari, che fermionici, con numero di massa dispari.

L'atomo di Itterbio ha una configurazione elettronica del tipo  $[\text{Xe}]4f^{14}6s^2$  e presenta una struttura dei livelli molto simile a quella dell'Elio e dei metalli alcalino terrosi, come ad esempio il Calcio e lo Stronzio. Avendo due elettroni nell'orbitale più esterno i suoi livelli energetici si possono dividere, tenendo conto del momento di spin elettronico, in stati di singoletto ( $S = 0$ ) e stati di

Isotopo	Abbondanza (%)	Spin Nucleare	$\mu_I$
$^{168}\text{Yb}$	0.126	0	
$^{170}\text{Yb}$	3.023	0	
$^{171}\text{Yb}$	14.216	1/2	+0.4919
$^{172}\text{Yb}$	21.754	0	
$^{172}\text{Yb}$	16.098	5/2	-0.6776
$^{174}\text{Yb}$	31.896	0	
$^{176}\text{Yb}$	12.887	0	

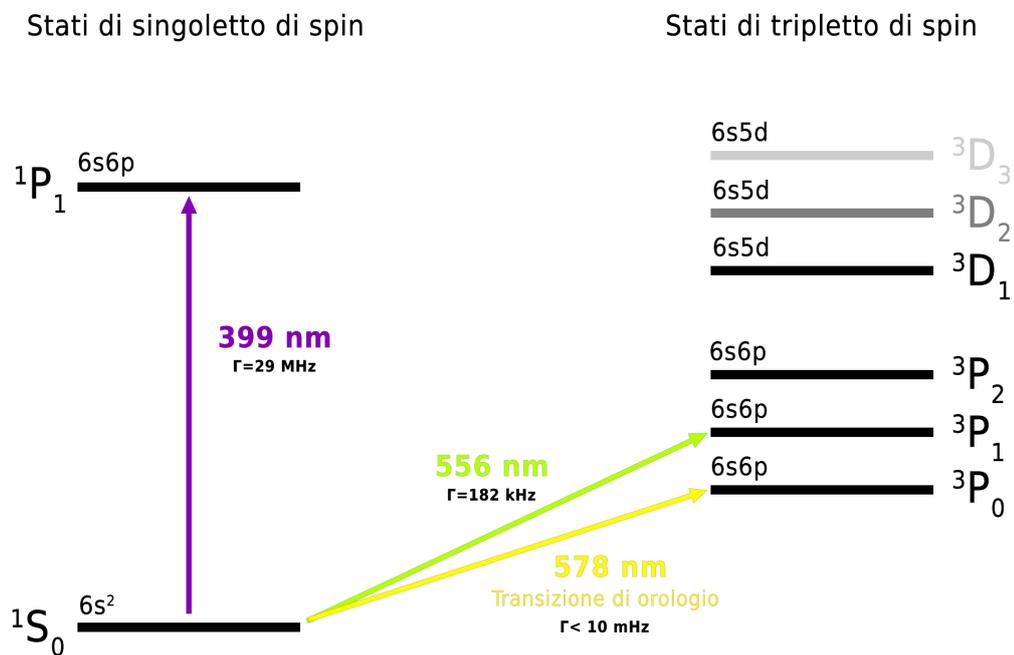
Tabella 1.1: Principali proprietà nucleari dei sette isotopi stabili dell'Itterbio. Le abbondanze atomiche sono prese da [27].

tripletto ( $S = 1$ ), come mostrato in figura 1.1. Le transizioni tra i due gruppi di livelli prendono il nome di "transizioni di intercombinazione". Queste non sarebbero permesse in quanto violano la regola di selezione  $\Delta S \neq 0$ , tuttavia questa regola è rigorosa solo nell'approssimazione di accoppiamento  $LS$ , cioè nell'ipotesi che il termine di spin-orbita dell'hamiltoniana atomica sia trascurabile rispetto al termine di repulsione elettronica coulombiana. Per atomi con  $Z > 30$  il termine di spin-orbita risulta però confrontabile con quello di repulsione elettronica e, in questo caso, lo spin  $S$  non può più essere considerato un buon numero quantico. La condizione  $\Delta S = 0$  non è più rigorosa e la transizione diventa quindi debolmente permessa. Ciò fa sì che queste transizioni abbiano una larghezza di riga considerevolmente minore rispetto alle transizioni ottiche permesse, che le rende particolarmente utili per andare a manipolare gli atomi di Itterbio.

In una prima fase dell'esperimento gli atomi di Itterbio vengono rallentati utilizzando la transizione  $|^1S_0\rangle \rightarrow |^1P_1\rangle$  caratterizzata da una lunghezza d'onda di 398.9 nm [28] e da una larghezza di riga naturale  $\Gamma = 2\pi \times 29$  MHz [29], a cui corrisponde una vita media nel livello eccitato di circa 4.5 ns. La radiazione viola viene utilizzata per rallentare un fascio atomico di Itterbio proveniente da un forno mediante *Zeeman slower*, in quanto la forza imprimibile ad un atomo è proporzionale alla larghezza di riga della transizione sfruttata. Inoltre, lo stesso fascio viene utilizzato per effettuare l'*imaging* sugli atomi ultrafreddi. La transizione di intercombinazione  $|^1S_0\rangle \rightarrow |^3P_1\rangle$ , caratterizzata da una lunghezza d'onda di 555.8 nm [28] e larghezza di riga  $\Gamma = 2\pi \times 182$  kHz, viene invece sfruttata nel raffreddamento ed intrappolamento in una trappola magneto-ottica (MOT) in quanto la minima temperatura raggiungibile è dell'ordine di  $\hbar\Gamma$ .

Infine, un ruolo particolarmente importante è rivestito dalla transizione di intercombinazione  $|^1S_0\rangle \rightarrow |^3P_0\rangle$ . Essa si distingue dalle altre in quanto dop-

piamente proibita, non solo viola la conservazione dello spin  $\Delta S \neq 0$ , ma anche la conservazione del momento angolare totale  $J$ , la quale vieta transizioni che connettano due stati aventi entrambi il numero quantico  $J$  uguale a 0. Tuttavia, con un meccanismo analogo a quello visto per le transizioni di intercombinazione, questa diventa debolmente permessa nel momento in cui  $J$  a sua volta non risulta più un buon numero quantico. Ciò accade negli atomi fermionici con spin nucleare non nullo grazie all'interazione iperfine tra il momento magnetico nucleare e il momento angolare totale degli elettroni. Nel caso invece degli atomi bosonici lo spin nucleare nullo impedisce la presenza di una struttura iperfine, tuttavia è possibile indurre il mescolamento dei livelli  $^3P_0$  e  $^3P_1$  tramite l'applicazione di un campo magnetico esterno. In entrambi i casi, trattandosi di una transizione doppiamente proibita, la  $|^1S_0\rangle \rightarrow |^3P_0\rangle$  è caratterizzata da una larghezza di riga estremamente ridotta e ciò la rende ideale come riferimento per la realizzazione di orologi ottici e proprio per questo prende il nome di "transizione di orologio". Una trattazione più approfondita dei meccanismi che permettono di eccitare questa transizione, per le due tipologie di atomi, è riportata in sezione 3.1.1.



**Figura 1.1:** Schema dei primi livelli eccitati dell'Itterbio e delle principali transizioni ottiche sfruttate nel nostro esperimento.

## 1.2 Reticoli ottici

L'interazione radiazione-materia è fondamentale per indagare e manipolare sistemi atomici e molecolari. L'idea che sta alla base di qualunque processo è la conservazione dell'energia del sistema e della quantità di moto. Proprio a causa di quest'ultima risulta evidente che, per scambiare un momento con la materia, la luce deve applicare su di essa delle forze, che possono quindi essere impiegate per modificare il moto del centro di massa degli atomi.

Consideriamo un sistema atomico a due livelli investito da una radiazione monocromatica. La forza esercitata dalla luce sull'atomo può essere espressa con la relazione:

$$F = \frac{\hbar}{2} \left( \frac{\mathbf{k}_L \Gamma \frac{\Omega^2}{2}}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + \frac{\Omega^2}{2}} - \frac{\delta \frac{\nabla \Omega^2}{2}}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + \frac{\Omega^2}{2}} \right) \quad (1.1)$$

dove  $k_L = |\mathbf{k}_L| = \frac{2\pi}{\lambda}$  è il numero d'onda della radiazione incidente,  $\Omega = \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}}{\hbar}$  è la frequenza di Rabi della transizione,  $\delta$  è il *detuning* della radiazione rispetto alla transizione atomica e  $\Gamma$  è la larghezza naturale della transizione [30]. La forza descritta è data dalla somma di due contributi: una forza dissipativa, detta "pressione di radiazione", associata al trasferimento di impulso dalla radiazione all'atomo a seguito di processi di assorbimento, ed una forza conservativa, detta "forza di dipolo", legata all'interazione tra il campo elettrico e il dipolo elettrico atomico indotto.

La forza di dipolo è ampiamente sfruttata in fisica atomica per la realizzazione di trappole ottiche. Ad essa può essere associato il potenziale [30]

$$V_{dip} = \frac{\hbar \delta}{2} \log \left( 1 + \frac{\frac{\Omega^2}{2}}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \right) \quad (1.2)$$

che, sviluppando al primo ordine il logaritmo assumendo un *detuning* molto grande ( $\delta \gg \Omega, \Gamma$ ), si può approssimare con

$$V_{dip} \simeq \frac{\hbar \Omega^2}{4\delta}. \quad (1.3)$$

Questa espressione può esser ottenuta ricorrendo al modello degli stati vestiti nel quale gli atomi e il campo incidente vengono considerati come un unico sistema descritto da un'unica hamiltoniana. Diagonalizzando questa hamiltoniana si ottengono gli autostati del sistema che risultano dipendenti dall'intensità della radiazione e dal suo *detuning*. In particolare, in condizione di *detuning* grande ( $\delta \gg \Omega$ ), si ottiene per l'energia una variazione  $\Delta E$  rispetto a quella degli autostati del sistema imperturbato, corrispondente esattamente al potenziale dell'espressione (1.3). Questo prende il nome di

*light shift*, o *ac-Stark shift*.

Come si vede dalla (1.3) a *detuning* negativi corrisponde uno *shift* negativo dell'energia (*red shift*), di conseguenza gli atomi saranno soggetti ad un minimo di potenziale in corrispondenza del massimo dell'intensità. Questo fatto permette di realizzare trappole ottiche per atomi neutri sfruttando fasci di radiazione coerente focalizzati [9]. In particolare, se la radiazione presenta una modulazione periodica nello spazio, si crea una struttura detta *reticolo ottico*, in quanto, dato che gli atomi si dispongono in corrispondenza dei minimi di potenziale, la configurazione che si crea è analoga a quella di un reticolo cristallino.

I reticoli ottici sono particolarmente utili ed impiegati nella fisica degli atomi ultrafreddi, ciò dipende dal fatto che, agendo su intensità, lunghezza d'onda ed angolo d'incidenza dei fasci focalizzati, è possibile controllare numerosi parametri del sistema atomico intrappolato, come ad esempio lo stato di moto degli atomi, l'energia di interazione tra particelle dello stesso sito o il tempo di *tunneling* tra siti adiacenti. In particolare, il confinamento degli atomi in reticoli profondi permette di condurre misure di spettroscopia estremamente precise con eccitazione di transizioni di orologio in assenza di effetto Doppler e di rinculo, come vedremo nella sezione 3.1.

### 1.2.1 Potenziali periodici ottici

Il modo più semplice di realizzare una radiazione con intensità modulata periodicamente nello spazio è quello di creare un'onda stazionaria per sovrapposizione di due fasci laser contropropaganti. Consideriamo di sovrapporre due fasci gaussiani contropropaganti lungo la direzione  $z$ , con vettore d'onda  $k$ , *waist*  $w_0$ , lunghezza di Rayleigh  $z_R$  e stessa polarizzazione.

Il potenziale di dipolo che si genera è dato da [11]:

$$V = V_0 e^{\frac{-2r^2}{w_0^2(z)}} \cos^2(kz) \simeq sE_r \cos^2(kz) + \frac{1}{2}m\omega_r^2 r^2 + \frac{1}{2}m\omega_z^2 z^2 \quad (1.4)$$

dove  $r$  è la distanza dal centro del fascio gaussiano e la profondità del potenziale  $V_0 = sE_r$  è espressa come multiplo dell'energia di rinculo  $E_r = \hbar^2 k^2 / 2m$  attraverso il parametro adimensionale  $s$ .

Il potenziale può essere approssimato come la somma di una componente periodica lungo la direzione di propagazione dei fasci con altri due termini armonici che descrivono il confinamento spaziale lungo le direzioni radiale e di propagazione, caratterizzati rispettivamente dalle frequenze di trappola armonica  $\omega_r = \sqrt{\frac{4E_r}{mw_0^2}}\sqrt{s}$  e  $\omega_z = \sqrt{\frac{2E_r}{mz_R^2}}\sqrt{s}$ . Tuttavia, in presenza di fasci collimati, questi ultimi due termini possono essere trascurati in prima approssimazione ed il potenziale si riduce al termine oscillante con periodicità

corrispondente a  $\lambda/2 = \pi/k$ .

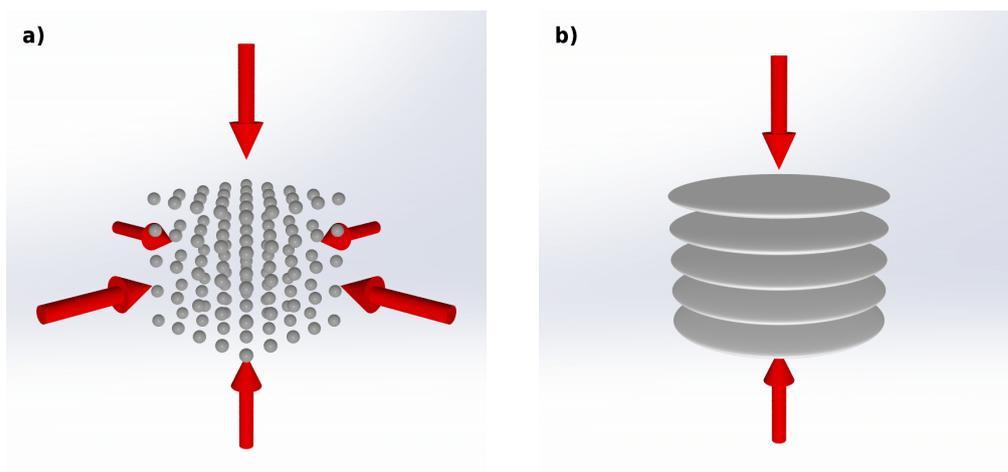
Per reticoli ottici profondi la frequenza di oscillatore armonico associata a ciascun sito reticolare corrisponde a [11]:

$$\omega = \frac{2E_r}{\hbar} \sqrt{s} . \quad (1.5)$$

Per creare un potenziale periodico nelle tre dimensioni spaziali è necessario aggiungere altre due coppie di fasci diretti lungo le altre direzioni, in modo da creare la sovrapposizione di tre onde stazionarie ortogonali tra loro. In questo caso il potenziale risultante, assumendo che tutti i fasci abbiano la stessa ampiezza e lo stesso vettore d'onda, può essere descritto dall'espressione:

$$V(x, y, z) = sE_r (\sin^2(kx) + \sin^2(ky) + \sin^2(kz)) . \quad (1.6)$$

Un importante vantaggio offerto dai reticoli ottici è quello di poter selezionare la dimensionalità del sistema da investigare. Ad esempio l'uso di un reticolo profondo 1D permette di dividere una nube atomica in una pila di *pancakes* bidimensionali. Oppure, come vedremo nei prossimi capitoli, l'utilizzo di reticoli 3D ci permetterà di realizzare una trappola "zero-dimensionale" nella quale effettuare misure di spettroscopia d'orologio su atomi non interagenti, prive di effetti di rinculo e di allargamento, e di indagare le collisioni a due corpi tra atomi in stati elettronici diversi.



**Figura 1.2:** Rappresentazione schematica di reticoli ottici: **a)** reticolo 3D; **b)** reticolo 1D (*pancakes*).

### 1.2.2 Struttura a bande e funzioni di Bloch

Consideriamo il problema di una particella di massa  $m$  soggetta al potenziale (1.6). L'hamiltoniana del sistema può essere scritta come

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + sE_r(\sin^2(kx) + \sin^2(ky) + \sin^2(kz)) . \quad (1.7)$$

L'operatore è separabile e perciò la soluzione del problema agli autovalori può essere scritta come prodotto delle soluzioni ottenibili risolvendo l'equazione di Schrödinger stazionaria unidimensionale

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + sE_r \sin^2(kx) \right) \psi = E\psi . \quad (1.8)$$

Poiché l'hamiltoniana è periodica, le sue autofunzioni possono essere scritte, in virtù del teorema di Bloch [31], come:

$$\psi_{n,q}(x) = e^{iqx} u_{n,q}(x) \quad (1.9)$$

dove  $u_{n,q}(x)$  è una funzione periodica con la stessa periodicità  $d = \pi/k$  del potenziale:  $u_{n,q}(x+d) = u_{n,q}(x)$ . Le funzioni di Bloch sono caratterizzate dal quasimpulso  $q$ , che è limitato alla prima zona di Brillouin:  $-k < q < k$ . Le varie bande sono rappresentate dall'indice  $n$ .

L'equazione di Schrödinger (1.8) può anche essere ricondotta all'equazione di Mathieu

$$\left( \frac{d^2}{d\tilde{x}^2} + (\tilde{a} - 2\tilde{r} \cos(2\tilde{x})) \right) \psi(\tilde{x}) = 0 \quad (1.10)$$

imponendo  $\tilde{x} = kx$ ,  $\tilde{a} = \frac{E}{E_r} - \frac{s}{2}$  e  $\tilde{r} = -\frac{s}{4}$ .

Le funzioni  $\psi(\tilde{x})$ , soluzioni dell'equazione (1.10), prendono il nome di funzioni di Mathieu, formano un set ortonormale completo e sono caratterizzate da una forma del tipo

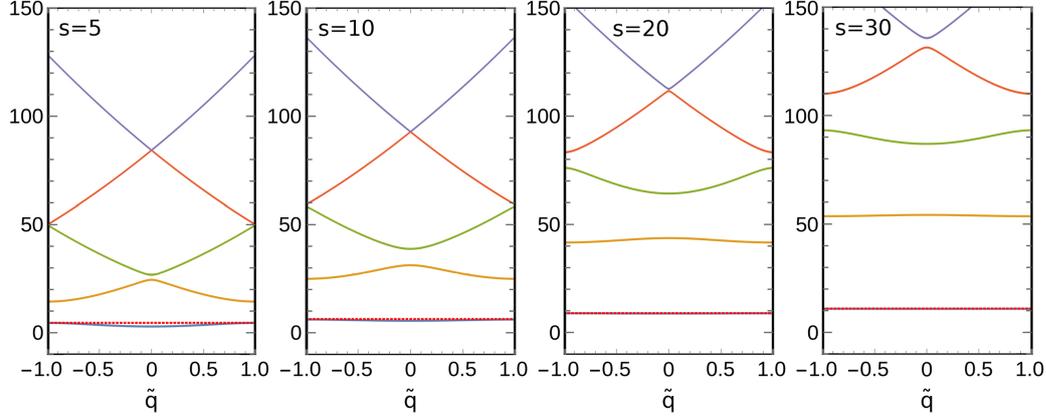
$$\psi(\tilde{x}) = e^{i\tilde{q}\tilde{x}} f(\tilde{x}) \quad (1.11)$$

con  $f(\tilde{x})$  funzione con la stessa periodicità del reticolo. A seconda della parità di  $f(\tilde{x})$  le funzioni di Mathieu si dividono in pari,  $S(\tilde{a}, \tilde{r}, \tilde{x})$ , e dispari,  $C(\tilde{a}, \tilde{r}, \tilde{x})$ . I parametri  $\tilde{a}$  prendono, invece, il nome di valori caratteristici delle funzioni di Mathieu.

I valori dell'energia dei livelli, che possono essere ricavati a partire dai valori caratteristici  $\tilde{a}$ , definiscono, al variare di  $\tilde{q}$ , la struttura a bande del reticolo. Il parametro  $\tilde{q}$  può essere visto come il quasimpulso  $q$  diviso per  $k$ .

Fissata la profondità di reticolo, per ciascuna delle bande  $n$  è possibile definire una larghezza di banda, corrispondente all'intervallo compreso tra l'energia massima e l'energia minima della banda:

$$\Delta E_n = E_{max}(n) - E_{min}(n) . \quad (1.12)$$



**Figura 1.3:** Struttura a bande di un reticolo 1D per diverse profondità di reticolo  $V_0 = sE_r$ . Al crescere di  $s$  la larghezza di banda diminuisce mentre l'energy gap fra di esse aumenta. Si può anche osservare come la prima banda tenda al livello di energia di oscillatore armonico, la cui frequenza, descritta dall'espressione (1.5), è riportata in grafico con la linea rossa tratteggiata.

Questa grandezza decresce all'aumentare della profondità di reticolo fino ad annullarsi per  $s \rightarrow \infty$ .

In figura 1.3 è mostrata la prima zona di Brillouin della struttura a bande di un reticolo unidimensionale, infinitamente esteso, in funzione del parametro  $\tilde{q}$ , per diversi valori di  $s$ . Si può osservare come, all'aumentare della profondità di reticolo, la larghezza delle bande diminuisca ed il gap fra di esse aumenti. Si può vedere anche che, per  $s \rightarrow \infty$ , la prima banda tende al livello di energia di oscillatore armonico ed in questo caso quindi il gap di energia può essere approssimato con  $\hbar\omega$ , dove  $\omega$  è la frequenza di oscillatore armonico definita dall'espressione (1.5).

A bassa temperatura gli atomi in ciascun sito reticolare potranno limitarsi ad occupare solo il primo livello vibrazionale. L'unica possibilità che avranno di muoversi da un sito reticolare al primo vicino sarà data dall'ampiezza di probabilità di *tunneling*. Gli autostati di singola particella nelle bande più basse corrispondono alle funzioni di Bloch con quasimpulso  $q$  e con energia descritta da

$$E_0(q) = \frac{3}{2}\hbar\omega - 2J(\cos(q_x d) + \cos(q_y d) + \cos(q_z d) + \dots) \quad (1.13)$$

dove il parametro  $J > 0$  è il guadagno in energia cinetica dovuto al *tunneling* tra siti primi vicini ed si trascurano processi di *tunneling* tra siti maggior-

mente distanti.

In questa approssimazione, considerando il caso monodimensionale, questo parametro dipende dall'energia cinetica della particella in una banda indicata dall'indice  $n$ , in particolare risulta proporzionale alla larghezza della banda stessa, attraverso la relazione:

$$J_n = \frac{|E_n(1) - E_n(0)|}{4}. \quad (1.14)$$

### 1.2.3 Regime di *tight-binding*

All'aumentare della profondità del reticolo la funzione d'onda atomica risulterà sempre più localizzata in corrispondenza di un singolo sito reticolare. Per questo motivo risulta conveniente introdurre un nuovo set di autofunzioni localizzate sulla singola buca reticolare, dette funzioni di Wannier [31]. Nel caso di un reticolo monodimensionale esse sono definite attraverso un'espansione in serie di Fourier delle funzioni di Bloch:

$$w_n(x - ld) = A \int_{-\frac{\pi}{d}}^{\frac{\pi}{d}} e^{-i(qld + \theta_{n,q})} \psi_{n,q}(x) dq \quad (1.15)$$

con  $A$  costante di normalizzazione,  $d$  periodo del reticolo,  $l$  numero intero e  $\theta_{n,q}$  fattore di fase legato alle funzioni di Bloch. Quest'ultimo introduce un'indeterminazione sulle funzioni di Wannier, in quanto la loro definizione dipenderà dal set di fattori di fase scelti per definire le funzioni di Bloch. Ciò può essere risolto andando ad imporre che le nostre funzioni di Wannier siano quelle massimamente localizzate sul sito reticolare, ovvero quelle per le quali la varianza dell'operatore posizione risulti minima [32]:

$$\Delta x^2 = \langle w_n(x) | x^2 | w_n(x) \rangle - \langle w_n(x) | x | w_n(x) \rangle^2. \quad (1.16)$$

Le funzioni di Wannier sono un set ortonormale e completo di funzioni localizzate, la cui sovrapposizione, se riferite a bande o siti reticolari diversi, è nulla, come esplicitato dalla relazione di completezza

$$\langle w_{n'}(x - l'd) | w_n(x - ld) \rangle = \delta_{n'n} \delta_{l'l}. \quad (1.17)$$

Nel caso di un reticolo cubico l'estensione della trattazione al caso tridimensionale risulta banale, infatti, essendo il potenziale d'interazione separabile, le funzioni d'onda di Wannier possono essere scritte come:

$$w_{n_x n_y n_z}(x, y, z) = w_{n_x}(x) w_{n_y}(y) w_{n_z}(z) \quad (1.18)$$

con  $n_x$ ,  $n_y$  e  $n_z$  indici di banda per le tre direzioni spaziali.

L'introduzione delle funzioni di Wannier risulta particolarmente utile nel formalismo di seconda quantizzazione dell'hamiltoniana del sistema. Anche nel caso di potenziali profondi, pur costituendo un set ortonormale, queste funzioni non sono autostati dell'hamiltoniana (1.7). Possono tuttavia essere sfruttate per esprimere l'operatore di campo corrispondente all'autofunzione di Bloch  $\psi_{n,k}(\mathbf{r})$ :

$$\hat{\psi}_{n,k}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{l},n} w_n(\mathbf{r} - \mathbf{l} \cdot \mathbf{d}) \hat{a}_{\mathbf{l},n} \quad (1.19)$$

dove il vettore  $\mathbf{l} = (l_x, l_y, l_z)$  identifica il sito reticolare,  $\mathbf{d}$  indica il passo ed abbiamo introdotto l'operatore  $\hat{a}_{\mathbf{l},n}$  di distruzione di una particella che è associata al corrispondente stato di Wannier.

Posso a questo punto riscrivere l'hamiltoniana per una particella libera in un potenziale periodico nella forma compatta

$$\hat{H} = - \sum_{\mathbf{l}',\mathbf{l},n} J_n(\mathbf{l}' - \mathbf{l}) \hat{a}_{\mathbf{l}',n,\sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{l},n,\sigma} \quad (1.20)$$

dove il termine di *tunneling* tra due siti reticolare indicati da  $\mathbf{l}'$  e  $\mathbf{l}$  è dato da

$$J_n(\mathbf{l}' - \mathbf{l}) = \sum_{\sigma} \int d\mathbf{r} w_n^*(\mathbf{r} - \mathbf{l}' \cdot \mathbf{d}) \left[ \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right] w_n(\mathbf{r} - \mathbf{l} \cdot \mathbf{d}) . \quad (1.21)$$

Si può dimostrare [11] che la dipendenza del parametro di *tunneling* dalla profondità del reticolo è all'incirca esponenziale, di conseguenza può essere fortemente modificato andando a variare di poco l'intensità del fascio di reticolo.

Nel caso di un sistema di particelle interagenti, come quello che sarà utilizzato nei nostri esperimenti, l'hamiltoniana va corretta introducendo un termine aggiuntivo. Limitandoci ad un sistema di bosoni e considerando unicamente un'interazione di contatto per atomi nella prima banda, nel formalismo di seconda quantizzazione otteniamo il contributo:

$$\hat{H}_{int} = U_{int} \sum_{\mathbf{l}} \hat{a}_{\mathbf{l}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{l}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{l}} \hat{a}_{\mathbf{l}} . \quad (1.22)$$

Assumendo di essere nel regime ultrafreddo, possiamo assumere unicamente un'interazione di contatto a due corpi, per la quale, sviluppando al primo ordine l'ampiezza di scattering, si ha

$$U_{int} = \frac{4\pi\hbar^2}{m} a \int w^4(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (1.23)$$

dove  $a$  è la lunghezza di scattering in onda s.

## 1.3 Interazione radiazione-materia

Fin'ora ci siamo concentrati sull'interazione tra una radiazione laser e un campione atomico in termini dei gradi di libertà esterni dell'atomo. Tuttavia, uno degli aspetti fondamentali dell'interazione radiazione-materia riguarda proprio l'eccitazione dei gradi di libertà interni del sistema atomico, sia per studi fondamentali di spettroscopia, che per applicazioni nel campo della metrologia di frequenza o della simulazione quantistica. L'utilizzo di una luce coerente, con frequenza prossima ad una risonanza atomica, permette infatti di accoppiare tra di loro stati elettronici diversi o stati di spin. Ciò è possibile sia sfruttando una singola radiazione (transizioni a singolo fotone), sia inviando sul campione due fasci simultanei (transizioni a doppio fotone).

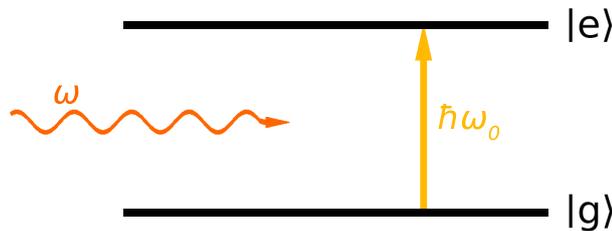
### 1.3.1 Transizioni a singolo fotone tra stati elettronici

Il caso più semplice che possiamo analizzare è quello di un sistema a due livelli interagente con una radiazione coerente monocromatica, come quello realizzato dagli stati  $^1S_0$  e  $^3P_0$  dell'atomo di Itterbio accoppiati da un laser quasi-risonante con la transizione d'orologio (vedi sezione 1.1).

Indichiamo con  $|g\rangle$  lo stato fondamentale e con  $|e\rangle$  lo stato eccitato, con energie rispettivamente  $\hbar\omega_g$  e  $\hbar\omega_e$ . Il generico stato atomico potrà essere scritto come sovrapposizione dei due stati:

$$|\psi\rangle = a_g|g\rangle + a_e|e\rangle . \quad (1.24)$$

La differenza in energia tra i due stati definisce la frequenza di risonanza  $\omega_0 = \omega_e - \omega_g$ .



**Figura 1.4:** Schema del sistema a due livelli, separati dall'energia  $\hbar\omega_0$ , investito da una radiazione di frequenza  $\omega$ .

L'hamiltoniana del sistema imperturbato può allora essere scritta come:

$$H = \hbar\omega_g|g\rangle\langle g| + \hbar\omega_e|e\rangle\langle e| = \hbar\omega_0|e\rangle\langle e| \quad (1.25)$$

dove, nell'ultimo passaggio, lo zero di energia è stato ridefinito in corrispondenza dello stato fondamentale.

Consideriamo ora di far interagire il sistema con un campo elettrico classico

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{e}} \frac{1}{2} E_0(\mathbf{r}) (e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}) = \hat{\mathbf{e}} E_0(\mathbf{r}) \cos(\omega t) \quad (1.26)$$

con polarizzazione  $\hat{\mathbf{e}}$ , frequenza  $\omega$  ed ampiezza  $E_0(\mathbf{r})$ . Nel limite in cui l'ampiezza del campo vari spazialmente su lunghezze maggiori della dimensione atomica, l'interazione fra atomo e campo può essere descritta dall'hamiltoniana d'interazione di dipolo

$$H_{dip} = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) . \quad (1.27)$$

L'hamiltoniana complessiva del sistema, in rappresentazione matriciale, assume allora la forma:

$$H = \begin{bmatrix} 0 & \hbar \frac{\Omega^*}{2} (e^{-i\omega t} + h.c.) \\ \hbar \frac{\Omega^*}{2} (e^{-i\omega t} + h.c.) & \hbar \omega_0 \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

dove abbiamo introdotto la frequenza di Rabi

$$\Omega \equiv \frac{\langle e | \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_0 | g \rangle}{\hbar} = \frac{e \boldsymbol{\mu}_{eg} \cdot \mathbf{E}_0}{\hbar} \quad (1.29)$$

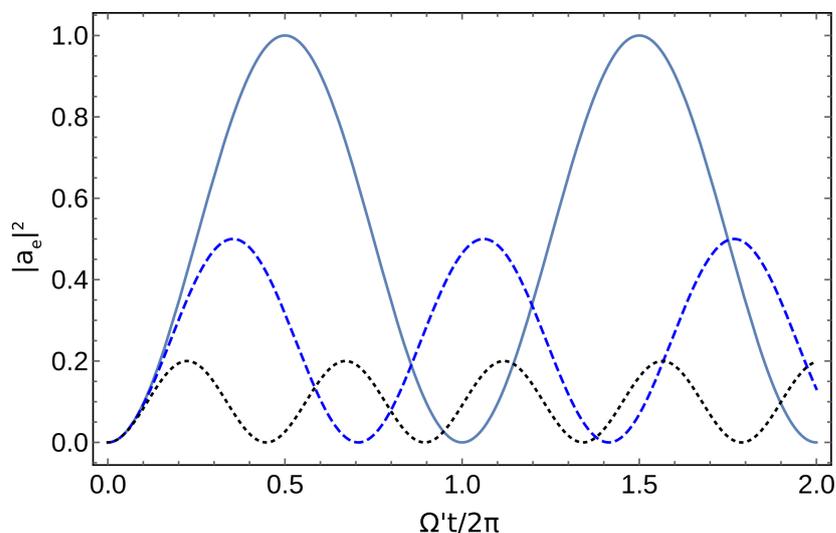
che parametrizza la forza dell'accoppiamento con la radiazione elettromagnetica.

Nota l'hamiltoniana del sistema possiamo scrivere le equazioni di Schrödinger dipendenti dal tempo per i coefficienti  $a_g$  ed  $a_e$ , precedentemente introdotti, che descrivono l'ampiezza dello stato fondamentale e di quello eccitato. Queste possono essere facilmente risolte andando ad applicare la *Rotating Wave Approximation* e seguendo la trattazione in [15] e, considerando un sistema inizialmente nello stato fondamentale, permettono di scrivere le popolazioni dei due stati come:

$$\begin{cases} |a_g(t)|^2 = \cos^2 \frac{\Omega' t}{2} + \frac{\delta^2}{\Omega'^2} \sin^2 \frac{\Omega' t}{2} \\ |a_e(t)|^2 = \frac{|\Omega|^2}{\Omega'^2} \sin^2 \frac{\Omega' t}{2} \end{cases} \quad (1.30)$$

dove abbiamo introdotto la frequenza di Rabi generalizzata  $\Omega' = \sqrt{\delta^2 + |\Omega|^2}$  per tener conto del *detuning*  $\delta = \omega - \omega_0$  tra la frequenza della radiazione e quella di risonanza.

In figura 1.5 viene mostrato l'andamento della popolazione del livello eccitato per diversi valori del *detuning*  $\delta$ . Come si può osservare, in condizione di risonanza  $\delta = 0$ , la popolazione oscilla in modo sinusoidale tra 0 e 1.



**Figura 1.5:** Oscillazioni di Rabi della popolazione dello stato eccitato  $|a_e(t)|^2$ , descritta dall'equazione 1.30, per un sistema a due livelli investito da una radiazione monocromatica vicina alla risonanza. L'andamento è riportato per diversi valori del *detuning*:  $\delta = 0$  (linea azzurra continua),  $\delta = \Omega$  (linea blu tratteggiata),  $\delta = 2\Omega$  (linea nera a puntini).

Questo comportamento viene indicato come "oscillazioni di Rabi". Da esse è possibile identificare la durata dell'impulso di radiazione risonante in corrispondenza del quale la popolazione viene completamente trasferita dallo stato fondamentale a quello eccitato; esso corrisponde a  $t = \frac{\pi}{2\Omega}$  e prende il nome di  *$\pi$ -pulse*.

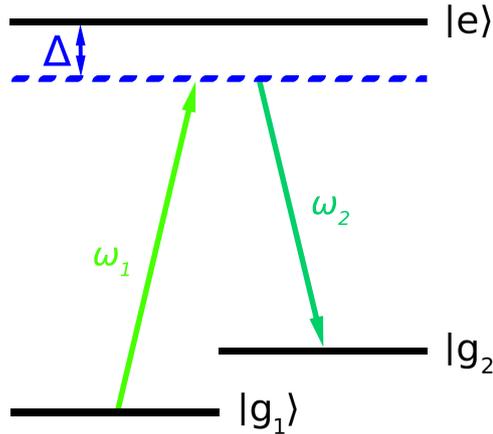
Come vedremo più avanti nel corso delle nostre misure l'identificazione di questo impulso è stata determinante per poter poter analizzare di dinamiche temporali dello stato eccitato del nostro sistema.

### 1.3.2 Transizioni a doppio fotone tra stati di spin

Un modo diverso di produrre una transizione tra stati atomici, a cui ricorrere quando i livelli di interesse non sono accoppiati in modo diretto dal campo di radiazione (ad esempio, se i due livelli sono due stati di spin dello stesso livello elettronico), è quello di far interagire il campione con due fotoni simultanei, realizzando così una transizione Raman. Ciò è possibile sfruttando due diversi fasci laser in contemporanea, con frequenza rispettivamente  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , così da dar luogo ad un campo elettrico con due componenti che può

essere scritto come:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \cos(\omega_1 t) + \mathbf{E}_2 \cos(\omega_2 t) . \quad (1.31)$$



**Figura 1.6:** Schema del sistema a tre livelli sul quale viene eccitata una transizione Raman a due fotoni inviando una radiazione a doppia frequenza  $\omega_1$  e  $\omega_2$ . La linea tratteggiata indica il livello virtuale al quale gli atomi vengono accoppiati, separato in frequenza dallo stato  $|e\rangle$  dal *detuning*  $\Delta$ .

La transizione tra i due livelli, che indichiamo con  $|g_1\rangle$  e  $|g_2\rangle$ , interessa anche un terzo livello atomico, che indichiamo in figura 1.6 con  $|e\rangle$ . Esso non è direttamente coinvolto nel processo in quanto gli atomi non vengono mai realmente eccitati in questo stato e qui sta la differenza fondamentale rispetto ad un processo con due transizioni a singolo fotone. Per garantire questo è necessario che le frequenze della radiazione incidente non coincidano con quelle delle transizioni  $|g_1\rangle \rightarrow |e\rangle$  e  $|g_2\rangle \rightarrow |e\rangle$ , ma se ne discostino di una quantità  $\Delta$  non trascurabile.

Consideriamo adesso l'effetto prodotto dall'interazione del sistema con la componente del campo elettrico a frequenza  $\omega_1$ . Essa eccita la transizione dallo stato  $|g_1\rangle$  allo stato  $|e\rangle$  come se si trattasse di un'interazione a singolo fotone, di conseguenza, come visto precedentemente, è possibile associare a questo processo la frequenza di Rabi  $\Omega_1$ , definita in termini di  $E_1$  dalla relazione (1.29). Allo stesso modo, considerando l'interazione del sistema con la componente a frequenza  $\omega_2$  si introduce  $\Omega_2$ .

Sviluppando la trattazione per il sistema atomico interagente con la radiazione a doppia frequenza [33], attraverso un'eliminazione adiabatica dello stato

e si ricava una dinamica effettiva nel sottospazio formato dai livelli  $g_1$  e  $g_2$ , e si ottiene per la popolazione dello stato  $|g_2\rangle$  l'andamento descritto dalla seconda equazione del sistema (1.30). Di conseguenza, la transizione Raman a due fotoni risulta equivalente ad una transizione a singolo fotone  $|g_1\rangle \rightarrow |g_2\rangle$  con frequenza di Rabi  $\Omega_{eff}$  descritta dalla relazione:

$$\Omega_{eff} = \frac{\Omega_2 \Omega_1}{2\Delta}. \quad (1.32)$$

Risulta molto importante notare la differenza tra la transizione Raman a due fotoni ed un processo dato da due transizioni a singolo fotone. In un processo a due fasi è molto rilevante la possibilità di avere emissione spontanea dallo stato intermedio reale con conseguente perdita di atomi. Questo effetto può risultare non trascurabile anche nei processi Raman a seconda del *detuning* tra il livello virtuale e lo stato eccitato. Se esso risulta troppo piccolo, infatti, la popolazione può essere eccitata nello stato reale  $|e\rangle$  ed il processo a singolo fotone diventa dominante, distruggendo la coerenza del processo a due fotoni.

Consideriamo invece il caso in cui  $\Delta \gg \Gamma$ , con  $\Gamma$  larghezza di riga della transizione dal livello  $g_1$  allo stato eccitato, e assumiamo che i due fasci Raman abbiano la stessa ampiezza, in modo che sia  $\Omega_1 \simeq \Omega_2 \simeq \Omega$  e di conseguenza  $\Omega_{eff} \simeq \Omega^2/2\Delta$ . Il *rate* di scattering per la transizione è dato approssimativamente da  $\Gamma\Omega^2/\Delta^2$ . Il numero di fotoni emessi per emissione spontanea durante un  $\pi$ -pulse Raman risulta allora

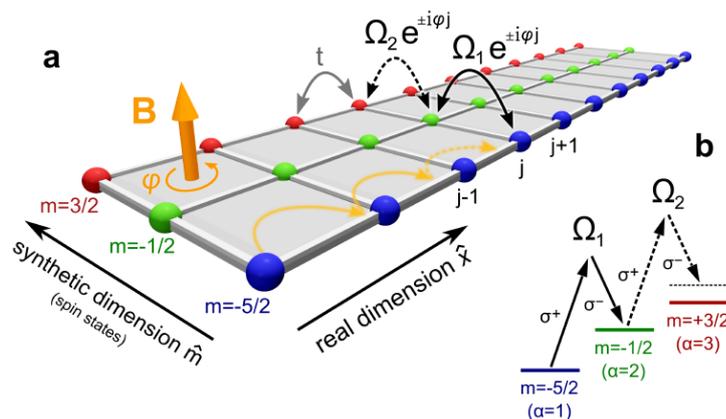
$$R_{scatt} t_\pi \simeq \frac{\Gamma\Omega^2}{\Delta^2} \frac{\pi\Delta}{\Omega^2} \simeq \frac{\pi\Gamma}{\Delta}. \quad (1.33)$$

Di conseguenza si può osservare che per  $\Delta \gg \Gamma$  l'emissione spontanea è trascurabile.

Un ulteriore vantaggio di sfruttare un processo Raman, rispetto ad eccitare direttamente la transizione con un processo a singolo fotone, è quello di poter trasferire un impulso notevole (e controllabile) all'atomo se si sfruttano per l'eccitazione due fasci con direzione di propagazione diversa. Ad esempio, se consideriamo la transizione tra due sottolivelli di spin dello stato fondamentale di un atomo, il momento trasferito per fasci Raman contro-propaganti è dell'ordine di  $\hbar(k_1 - k_2) \simeq 2\hbar k_1$  con  $k_2 \simeq -k_1$ , mentre sarebbe praticamente trascurabile per una transizione a microonde/radiofrequenza a singolo fotone. Come conseguenza di questo, considerando dei livelli con tempo di vita molto lungo, la selettività in velocità degli atomi trasferiti è estremamente alta, infatti la larghezza di riga della transizione corrisponde a  $\gamma \simeq 2k_1\delta\nu$  con  $\delta\nu$  *spread* della velocità. Questo può essere sfruttato, ad esempio, negli esperimenti di interferometria atomica oppure per misure ad

alta risoluzione della distribuzione dell'impulso di un insieme di atomi [30]. I processi Raman stimolati risultano anche estremamente utili per il raffreddamento laser di campioni atomici. La selettività del processo permette di eccitare una specifica classe di velocità e tramite pompaggi ottici eliminare gli atomi più caldi relativi alle code di una distribuzione di velocità gaussiana riportandoli al centro della curva [30].

Negli esperimenti realizzati sull'Itterbio fermionico presso il dipartimento di Fisica ed Astronomia dell'Università di Firenze le transizioni Raman rivestono una particolare importanza, in quanto permettono di accoppiare le varie componenti di spin dello stato fondamentale di atomi di  $^{173}\text{Yb}$ . In questa specie, infatti, la presenza di uno spin nucleare non nullo produce dei sottolivelli di spin e con il loro accoppiamento si introduce la possibilità di sfruttare la così detta "dimensione sintetica".



**Figura 1.7:** Esempio di applicazione delle dimensioni sintetiche: "Campo di gauge sintetico in dimensione sintetica" [19]. **a)** Gli atomi fermionici ultraraffreddati sono confinati all'interno di un reticolo ibrido costituito da un reticolo ottico lungo la direzione reale  $\hat{x}$  con *tunneling*  $t$  e dall'*hopping* tra stati di spin diverso, indotto dalla radiazione laser, lungo la direzione sintetica  $\hat{m}$ . **b)** Schema degli stati di spin dell'isotopo  $^{173}\text{Yb}$  e transizioni Raman usate.

Gli esperimenti sono condotti mantenendo gli atomi intrappolati in un reticolo ottico 1D, in presenza di un processo di *tunneling* tra siti reticolari vicini, come abbiamo visto nella sezione precedente. In questo modo è possibile dar luogo a due processi dinamici differenti: da un lato il *tunneling*, dipendente dall'energia cinetica degli atomi, dall'altro l'evoluzione di spin della popolazione, prodotto dall'accoppiamento Raman. Si tratta di due processi coerenti che possono essere descritti matematicamente con lo stesso

formalismo basato sull'hamiltoniana di *tight-binding* introdotta nell'equazione (1.20). I diversi stati di spin risultano assimilabili ai diversi siti di un reticolo. Di conseguenza, in entrambi i casi, l'effetto risultante è quello di osservare il passaggio delle particelle tra stati vicini, reali nel caso del reticolo ottico e "sintetici" nel caso degli stati di spin. In questo caso quindi possiamo considerare il sistema come un reticolo 2D ibrido, mostrato in figura 1.7, che può essere sfruttato per produrre un campo di gauge sintetico. Ciò è stato già realizzato presso i laboratori del dipartimento di Fisica ed ha permesso di simulare la fisica di un sistema cristallino bidimensionale in presenza di un campo magnetico sintetico molto intenso e studiare le proprietà fondamentali del sistema, come le proprietà delle correnti chirali di bordo [19].

Dato che l'atomo di  $^{173}\text{Yb}$  ha momento intrinseco nucleare pari a  $\frac{5}{2}$ , gli stati di spin accessibili sono  $(2I + 1) = 6$  e quindi, nella direzione sintetica, si possono avere fino a 6 siti reticolari. Tuttavia, il setup sperimentale attualmente in uso, in particolare la sorgente a disposizione per produrre i fasci Raman, limita le possibilità del sistema consentendo di accoppiare solo tre degli stati di spin disponibili. Per questo motivo, al fine di poter eccitare tutte le transizioni possibili e di sfruttare la dimensione sintetica al massimo delle sue possibilità, all'interno di questo progetto di tesi è stata condotta la progettazione e realizzazione di una nuova sorgente laser da implementare nell'apparato sperimentale preesistente, la cui trattazione riguarderà la seconda parte di questo elaborato, in particolare il capitolo 5.



# Capitolo 2

## Setup sperimentale e procedure

Nel presente capitolo vengono illustrati brevemente il setup sperimentale e le procedure, sviluppate precedentemente a questo lavoro di tesi, utilizzate per raffreddare e intrappolare un gas atomico di Itterbio. In particolare vengono descritte brevemente le componenti principali del sistema da vuoto (sezione 2.1) ed i setup dei sistemi laser utilizzati (sezione 2.2). Infine vengono presentate e descritte le fasi fondamentali della procedura per realizzare, manipolare ed osservare il gas atomico degenere (sezione 2.3). Una trattazione più approfondita di questi argomenti può essere trovata in Ref. [34].

Gli elementi aggiunti al setup durante questo progetto di tesi saranno descritti in dettaglio nei capitoli 3 e 5, insieme alle misure sperimentali che ne hanno richiesto l'introduzione.

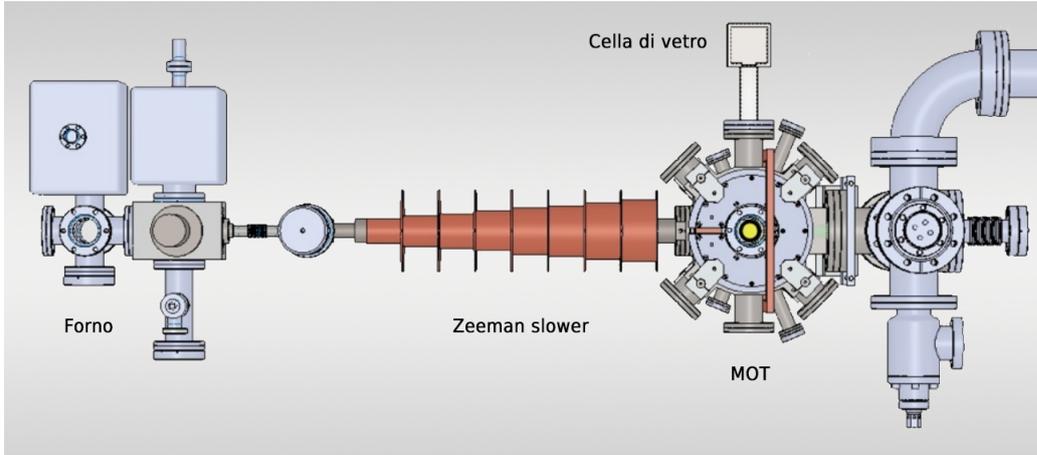
### 2.1 Setup sperimentale

#### 2.1.1 Sistema da vuoto

In condizioni di temperatura e pressione standard l'Itterbio è in fase solida e presenta un punto di fusione a 824°C, come visto in sezione 1.1, di conseguenza è necessario sfruttare un sistema di riscaldamento che permetta di sviluppare vapori di questa specie in quantità sufficiente da poter essere intrappolati. Per questo motivo un campione di Itterbio di 7 g puro al 99.9 % è messo in un forno a temperatura media di 500 °C. La sua pressione di vapore, che risulta essere circa  $10^{-2}$  Torr, genera un fascio atomico che viene collimato tramite un sistema di micro-tubi. La velocità media degli atomi nel fascio può essere stimata considerando la distribuzione di velocità

$$f(v_z) = \frac{m^2 v_z^2}{2(k_B T)^2} e^{-\frac{m v_z^2}{2k_B T}} \quad (2.1)$$

da cui si ottiene per la velocità media  $v_m = \sqrt{3k_B T/m} \simeq 330$  m/s. All'uscita dal forno gli atomi vengono rallentati dalla velocità termica a poche decine di m/s (vedi sezione 2.3.1) tramite *Zeeman slower* così da poter essere catturati in una trappola magneto-ottica (MOT, vedi sezione 2.3.2). Il residuo di campo magnetico dello *Zeeman slower* nella MOT viene bilanciato sfruttando una bobina di compensazione. Lo schema del setup sperimentale del sistema da vuoto è illustrato in figura 2.1.



**Figura 2.1:** Schema del setup sperimentale del sistema da vuoto.

### Risonatore ottico

All'interno della camera di MOT è montata una cavità ottica in vuoto ad alta *finesse*, la quale permette di amplificare l'intensità di un laser di trappola accoppiato al modo fondamentale di cavità, in modo da intrappolare gli atomi in maniera efficiente e pre-raffreddarli prima che vengano trasportati otticamente in una cella di vetro (vedi sezione successiva). Questa cavità Fabry-Perot è realizzata con due fissaggi metallici sui quali sono montati due specchi sferici con raggio di curvatura  $r_c = 2$  m, caratterizzati da una riflettività interna  $R = 99.98\%$ , da cui risulta una *finesse* teorica pari a  $\mathcal{F} \simeq 1600$ . La lunghezza della cavità è fissata a  $L = 9$  cm da cui risulta un *free spectral range* (FSR) di 1.67 GHz. La geometria della cavità è stata scelta opportunamente per avere un fascio di dimensioni maggiori possibili in modo da avvicinarsi a quelle della MOT, compatibilmente però con la profondità di trappola necessaria per essere superiore alla temperatura  $T_{MOT}$  della MOT stessa. In risposta a queste necessità è stato scelto un *waist* del fascio pari a  $w_0 = 300 \mu\text{m}$ . La *finesse* misurata risulta  $\mathcal{F} \simeq 1850$  a cui corrisponde

una profondità di trappola di  $V_0/k_B \simeq 800 \mu\text{K} \gtrsim 10 T_{MOT}$  con una potenza incidente di  $P_{in} = 1.8 \text{ W}$ .

### Cella di vetro

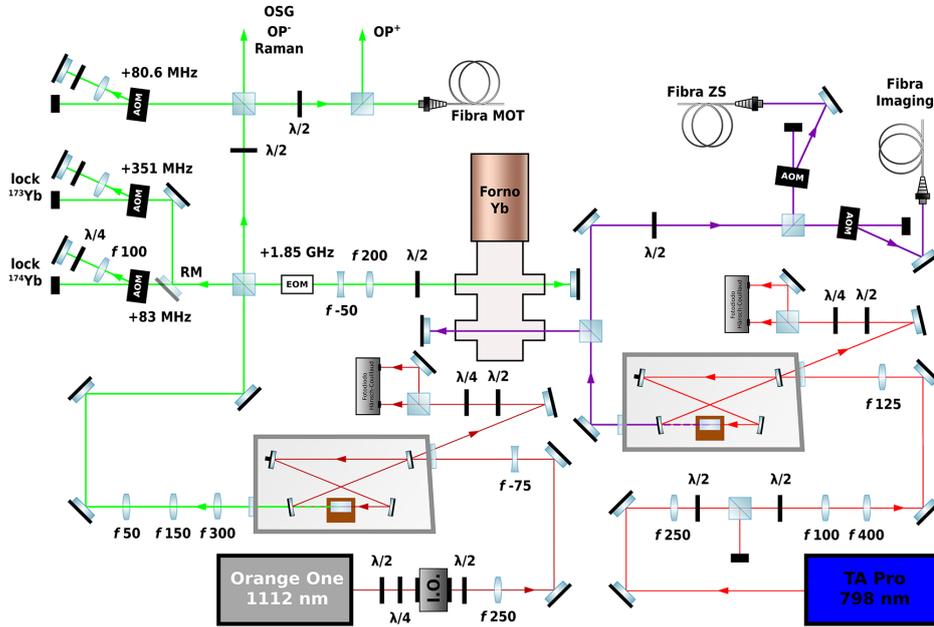
L'ultimo elemento del sistema da vuoto è la cella in vetro in cui gli atomi vengono trasportati otticamente dalla camera di MOT, lungo una distanza di 26 cm. Si tratta di una cella a forma di parallelepipedo con dimensioni esterne ( $60 \times 60 \times 18$ ) mm e spessore delle pareti di 5 mm. A differenza della camera metallica questa cella presenta una maggiore accessibilità ottica, necessaria per manipolare ed analizzare il campione di Itterbio. La dimensione ridotta della cella nella direzione verticale, lungo la quale viene realizzato l'*imaging* (di cui parleremo in sezione 2.3.6), è stata scelta appositamente per ridurre la distanza di lavoro e permettere quindi di implementare il sistema con un obiettivo ad alta apertura numerica.

## 2.2 Sistemi Laser

Tutte le transizioni rilevanti dell'Itterbio si trovano nel range del visibile (578 nm, 556 nm, 399 nm, come visto in sezione 1.1). A queste lunghezze d'onda è difficile trovare in commercio laser ad alta potenza e bassa larghezza di riga, per questo motivo tutte le radiazioni di nostro interesse sono state prodotte sfruttando la generazione di seconda armonica (SHG), la quale ha permesso di produrre luce visibile a partire da sorgenti infrarosse ad alta potenza facilmente reperibili in commercio. Per incrementare l'efficienza di SHG sono state scelte delle cavità di duplicazione *bow-tie* (descritte in sezione 4.4). Altre sorgenti a 1064 nm e 759 nm sono state scelte perché molto lontane dalle risonanze dell'Itterbio così da poter sfruttare la forza di dipolo per produrre trappole ottiche di dipolo e reticoli ottici. Una descrizione più approfondita di questi sistemi laser può essere trovata in [34, 37, 38, 39, 40, 41].

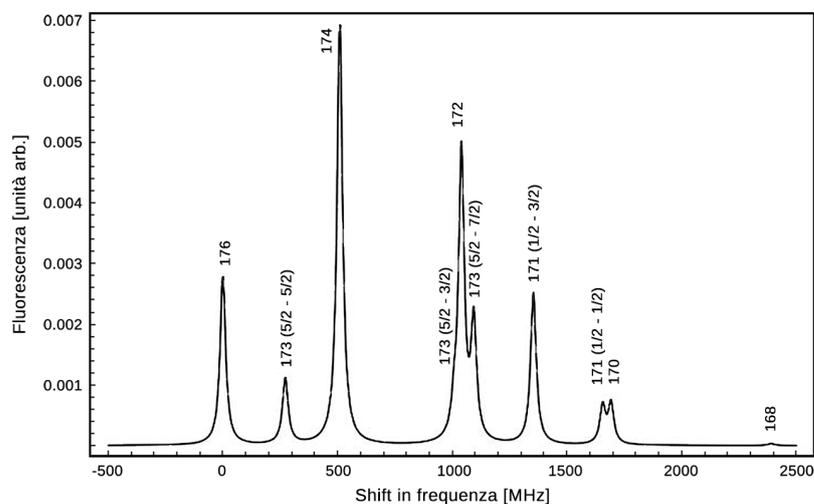
### 2.2.1 Laser a 399 nm

La radiazione laser a 399 nm, agganciata alla transizione dell'Itterbio  $|^1S_0\rangle \rightarrow |^1P_1\rangle$  è utilizzata sia per rallentare gli atomi nello *Zeeman slower* (sezione 2.3.1) sia per realizzare l'*imaging* (sezione 2.3.6) sul gas degenere. La sorgente è un laser a diodo amplificato accoppiato in fibra TOPTICA TA PRO con potenza in uscita di 1.1 W a 798 nm. Il setup sperimentale è mostrato in figura 2.2.



**Figura 2.2:** Schema dei sistemi laser a 339 nm e 556 nm. La luce visibile è generata da due cavità di duplicazione SHG partendo da due sorgenti rispettivamente a 798 nm e 1112 nm. Per entrambi i laser una piccola parte della luce riflessa dalla cavità è raccolta ed utilizzata per generare il segnale d'errore per la stabilizzazione in frequenza. Inoltre, parte della luce viene usata per fare spettroscopia su un fascio atomico prodotto nel forno secondario, in modo da avere un riferimento per la frequenza. Lo specchio removibile (indicato con RM) sul cammino della luce verde serve a cambiare l'aggancio della frequenza sulla risonanza dell'isotopo bosonico  $^{174}\text{Yb}$  e di quello fermionico  $^{173}\text{Yb}$ . Il resto della luce è divisa in diversi cammini destinati ai vari utilizzi illustrati.

La luce è duplicata in frequenza da un cristallo non lineare di Triborato di Litio (LBO) lungo 1.5 mm, tagliato per *phase matching* di tipo I, stabilizzato, tramite una cella Peltier, alla temperatura di  $55^\circ\text{C}$ . Come anticipato, per incrementare l'efficienza del processo, il cristallo è posto all'interno di una cavità *bow-tie* costituita da due specchi piani e due specchi sferici con raggio di curvatura  $r_{c1} = 60$  mm e  $r_{c2} = 100$  mm. La cavità ha un *free spectral range* di 749 MHz e *fineness*  $\mathcal{F} \simeq 100$ . Per avere un'uscita stabile in frequenza la risonanza della cavità è agganciata alla frequenza della sorgente laser TA PRO con un trasduttore piezoelettrico (PZT), montato su uno degli specchi piani, sfruttando il metodo Hänsch-Couillard. Per migliorare l'isolamento termico e acustico, al fine di incrementare la stabilità del



**Figura 2.3:** Spettro in frequenza della transizione  $|^1S_0\rangle \rightarrow |^1P_1\rangle$  per i diversi isotopi di Itterbio [35].

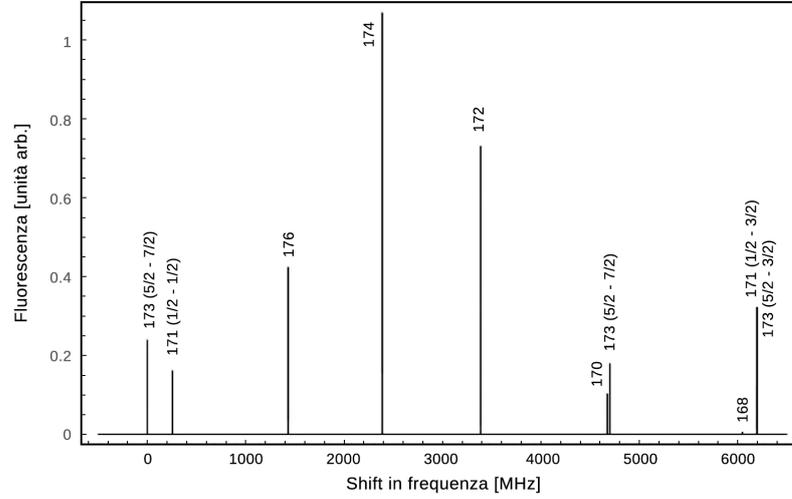
sistema, la cavità è posizionata in una scatola di alluminio nella quale viene realizzato il vuoto. In uscita dalla cavità di ottiene così un fascio stabile di 450 mW a 399 nm.

Dopo la duplicazione una parte della radiazione viene separata ed utilizzata per fare spettroscopia su un campione atomico di Itterbio in modo da permettere l'aggancio della frequenza sulla transizione  $|^1S_0\rangle \rightarrow |^1P_1\rangle$  tramite un feedback elettronico sul laser. Il campione di Itterbio usato in questo caso è realizzato in un secondo forno con caratteristiche analoghe a quello del setup principale. Gli atomi vengono indagati inviando un fascio di spettroscopia in direzione trasversa a quella del fascio atomico e raccogliendo il segnale di fluorescenza. Per la transizione a 399 nm non è necessario utilizzare la spettroscopia di saturazione in quanto la larghezza di riga  $\Gamma = 2\pi \times 29$  MHz supera l'allargamento Doppler del profilo trasverso del fascio atomico (per maggiori approfondimenti vedi [41]). Variando la frequenza del laser è possibile posizionarsi in un punto desiderato dello spettro della transizione  $|^1S_0\rangle \rightarrow |^1P_1\rangle$  [35], riportato in figura 2.3, dove si possono distinguere sia i picchi corrispondenti agli isotopi bosonici sia le diverse componenti della struttura iperfine dei fermioni. Per l'Itterbio fermionico  $^{173}\text{Yb}$  si sceglie la transizione chiusa  $F = 5/2 \rightarrow F' = 7/2$  al fine di evitare pompaggi ottici in *dark state*. Il picco corrispondente non risulta particolarmente ampio, tuttavia a causa dell'allargamento della riga, è praticamente coincidente con quello molto più evidente del bosone  $^{172}\text{Yb}$ , come si può vedere in figura 2.3. È possibile effettuare l'aggancio sfruttando questa transizione.

### 2.2.2 Laser a 556 nm

La radiazione laser a 556 nm, agganciata alla transizione dell'Itterbio  $|^1S_0\rangle \rightarrow |^3P_1\rangle$  è utilizzata per realizzare la trappola magneto-ottica (sezione 2.3.2). Il setup sperimentale è sostanzialmente analogo a quello visto per il laser a 399 nm, ed è riportato in figura 2.2. La sorgente in questo caso è un laser infrarosso in fibra a 1112 nm Menlo System ORANGE ONE, che viene inviato su un cristallo non lineare di Tantalato di Litio ( $\text{LiTaO}_3$ ) lungo 10 mm posizionato in una cavità *bow-tie* con specchi sferici con raggio di curvatura  $r_c = 100$  mm. Il cristallo è *periodically poled* con periodo  $9.12 \mu\text{m}$ , è dotato di coating antiriflesso per la luce a 1112 nm e stabilizzato termicamente a  $20^\circ\text{C}$ . Il FSR della cavità è 567 MHz e la *finesse* misurata  $\mathcal{F} = 67$ . Anche questa cavità è contenuta in una scatola di alluminio in cui viene fatto il vuoto per migliorarne la stabilità. Agganciando la frequenza del laser con il metodo Hänsch-Couillard si ottiene un'uscita di 1.050 W a 556 nm partendo da 2 W di luce a 1112 nm. Anche per questo laser la frequenza di emissione viene stabilizzata prendendo come riferimento la spettroscopia effettuata su un campione di Itterbio in direzione trasversa a quella del fascio atomico. In questo caso però, trattandosi di una transizione di intercombinazione, la larghezza della riga pari a  $\Gamma = 2\pi \times 182$  kHz è troppo piccola per avere un segnale di fluorescenza sufficiente. Si rende quindi necessario effettuare una spettroscopia di saturazione in assorbimento, per avere un segnale migliore ed eliminare al tempo stesso l'allargamento Doppler, non più trascurabile rispetto alla larghezza naturale della riga (per maggiori approfondimenti vedi [41]). Come si può vedere in figura 2.4 [36] con questa tecnica il miglior rapporto segnale-rumore (SNR) si ottiene per l'isotopo  $^{174}\text{Yb}$ , che, come abbiamo visto, è il più abbondante e risulta privo di struttura iperfine. Per esperimenti sul bosone  $^{174}\text{Yb}$  la frequenza della radiazione a 556 nm viene spostata di  $-166$  MHz sfruttando un modulatore acusto-ottico (AOM) in doppio passaggio in modo da avere un fascio *red-detuned* per la MOT. Nel caso fermionico invece, risulta comunque conveniente agganciarsi sul segnale del  $^{174}\text{Yb}$  in quanto il picco della transizione iperfine  $F = 5/2 \rightarrow F' = 7/2$  per la specie  $^{173}\text{Yb}$  ha un SNR molto minore. Per fare questo la frequenza del fascio sul ramo di spettroscopia viene spostata sfruttando un AOM in doppio passaggio e un modulatore elettro-ottico (EOM) che introducono complessivamente una variazione esattamente pari allo *shift* isotopico  $\Delta_{174-173} = 2386$  MHz. In questo modo pur essendo agganciato sul picco del bosone il laser risulta esattamente detunato di  $-166$  MHz rispetto alla transizione del fermione.

Per le misure su atomi fermionici parte della radiazione a 556 nm viene impiegata per separare le varie componenti di spin, sfruttando l'effetto "Op-



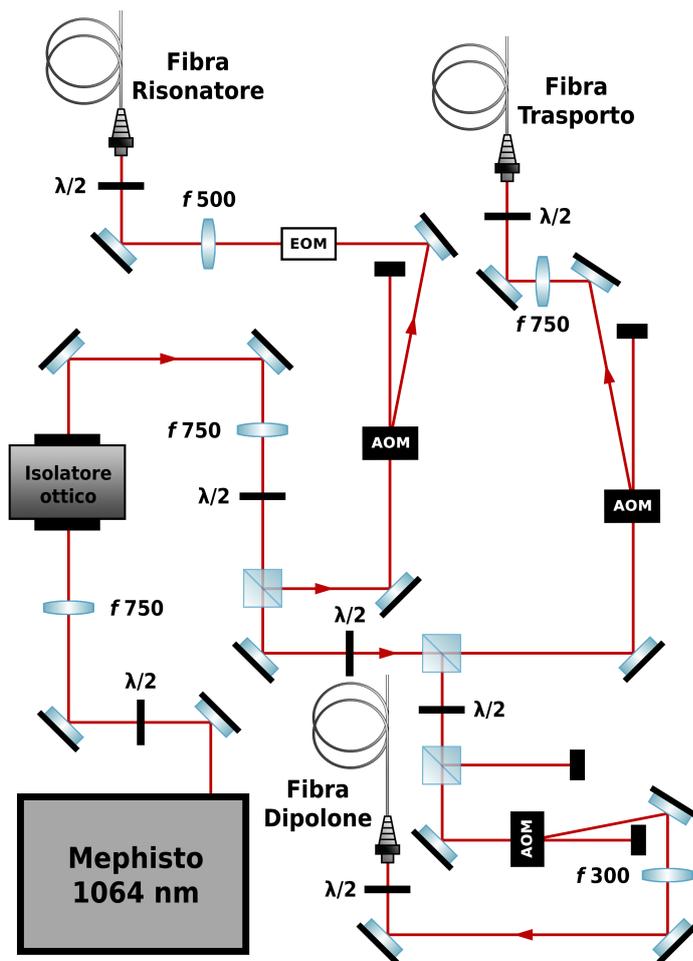
**Figura 2.4:** Spettro in frequenza della transizione di intercombinazione  $|^1S_0\rangle \rightarrow |^3P_1\rangle$  per i diversi isotopi di Itterbio [36].

tical Stern-Gerlach" (OSG), e per manipolarle attraverso pompaggi ottici (OP) e transizioni Raman [38]. Ciò introduce la necessità di incrementare la potenza della luce verde e per questo motivo, nell'ambito di questo progetto di tesi, è stata realizzata la nuova sorgente a 556 nm descritta nel capitolo 5.

### 2.2.3 Laser a 1064 nm

La radiazione laser a 1064 nm è impiegata per intrappolare gli atomi nel risonatore ottico all'interno della camera di MOT, per trasportare gli atomi otticamente nella cella di vetro ed, infine, per realizzare una trappola ottica di dipolo (sezioni 2.3.3 e 2.3.4). La sorgente usata è un Nd:Yag Mephisto MOPA 25, caratterizzato da una potenza massima di uscita di 25 W e da una larghezza di riga inferiore a 100 kHz. La frequenza del laser può essere modificata andando a regolare un PZT, per correzioni rapide (circa 10 kHz di *bandwidth*), e la temperatura del *seed*, per correzioni lente e ad ampio *range* (1 Hz *dbandwidth*, 3 GHz/°C). Il setup sperimentale di questo laser è mostrato in figura 2.5. Al termine di ciascuno dei tre rami del setup i fasci sono mandati sull'esperimento tramite delle fibre laser ad alta potenza. Per agganciare la frequenza del laser alla cavità Fabry-Perot in vuoto viene utilizzato un classico schema Pound-Drever-Hall (PDH) [42]. Il segnale d'errore viene processato da due controlli PI (proporzionale-integrale): il primo agisce sul PZT del laser ed è quindi responsabile delle correzioni veloci, mentre il secondo regola la temperatura realizzando le correzioni a bassa frequenza e,

quindi, la compensazione dei *drift* lenti del laser. Dato che la potenza del risonatore viene variata durante l'esperimento per fare un primo raffreddamento evaporativo, la potenza del segnale sul fotodiodo di PDH è stabilizzata usando un ulteriore AOM, in modo da avere la stessa ampiezza del segnale d'errore indipendentemente dalla potenza del ramo del risonatore.



**Figura 2.5:** Schema ottico del sistema laser a 1064 nm. La luce è divisa in tre rami, uno che va alla cavità risonante ad alta *finesse* (Risonatore), uno che genera il fascio per spostare gli atomi dalla MOT al centro della cella di vetro (Trasporto) ed infine l'ultimo che realizza la trappola ottica di dipolo (Dipolone) che intersecando il fascio di trasporto genera la trappola ottica di dipolo incrociata (vedi 2.3.4). La divisione delle potenze tra i tre cammini è realizzata sfruttando delle lamine e dei *beam splitter* polarizzatori.

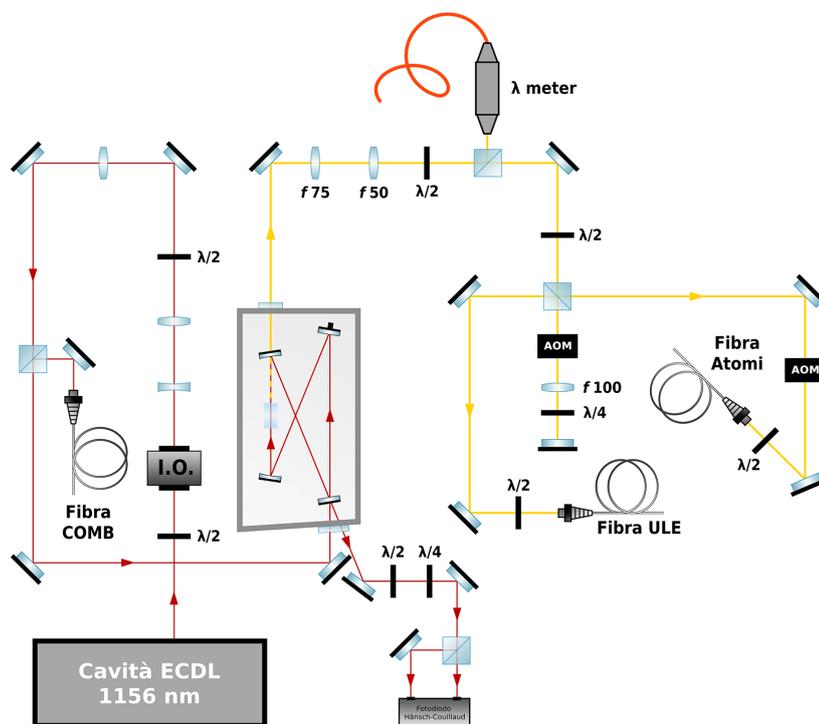
### 2.2.4 Laser a 759 nm

La radiazione a 759 nm è usata per produrre un reticolo ottico tridimensionale sugli atomi (sezione 2.3.5), la sua trattazione teorica è stata approfondita in sezione 1.2. Questa specifica lunghezza d'onda, detta *lunghezza d'onda magica*, è stata scelta perché induce lo stesso *light shift* sullo stato metastabile  $^3P_0$  e sullo stato fondamentale, lasciando così invariata la frequenza della transizione  $|^1S_0\rangle \rightarrow |^3P_0\rangle$  (vedi sezione 3.1.2). Per produrre questa radiazione laser viene utilizzato un classico setup commerciale costituito da una sorgente laser Coherent VERDI 18 che emette luce a 532 nm in singolo modo usata per pompare un laser a Titanio-Zaffiro (Coherent MBR 110). Con questo setup è possibile ottenere 3.5 W di luce a 759 nm, la quale viene divisa in tre diversi cammini ottici, ciascuno dei quali implementato con un AOM e una fibra ottica, per produrre sull'esperimento i reticoli ottici lungo tre direzioni ortogonali. Inoltre, una piccola frazione della luce è accoppiata in una cavità Fabry-Perot per controllare l'emissione a singolo modo del MBR.

### 2.2.5 Laser a 578 nm

Per eccitare la transizione  $|^1S_0\rangle \rightarrow |^3P_0\rangle$  è necessaria una radiazione gialla a 578 nm che sia caratterizzata da una larghezza di riga estremamente ridotta, dell'ordine di 50 Hz. Una descrizione estesa di tutte le fasi necessarie per realizzare questa sorgente può essere trovata in [37, 38, 43].

Per produrre la radiazione in esame è stato scelto di utilizzare ancora una volta la duplicazione di frequenza partendo quindi da un laser infrarosso. La sorgente a 1156 nm, usata in questo caso, è costituita da un laser a *quantum dot* montato in una cavità estesa (ECDL) di 12 cm in configurazione Littrow. Il fascio laser uscente dalla cavità ha una potenza di circa 200 mW e viene innanzitutto collimato per mezzo di un sistema di lenti. Parte del fascio  $\simeq 5\%$  è prelevata tramite un *beam splitter* (BS) e mandata, attraverso una fibra ottica, ad un *frequency comb* per misurare la frequenza della radiazione infrarossa. Il restante 95% viene duplicato in frequenza mandandolo su un cristallo non lineare di Niobato di Litio ( $\text{LiNbO}_3$ ), posizionato in una cavità *bow-tie* con specchi sferici con raggio di curvatura  $r_c = 100$  mm. Il cristallo è *periodically poled* con periodo  $8.9 \mu\text{m}$  e stabilizzato termicamente a  $65^\circ\text{C}$ . Il FSR della cavità è 545 MHz e la *finesse* misurata  $\mathcal{F} \simeq 100$ . Anche questa cavità è contenuta in una scatola di alluminio in cui viene fatto il vuoto per migliorarne la stabilità. Agganciando, anche in questo caso, la frequenza del laser con il metodo Hänsch-Couillard si ottiene un'uscita di 60 mW di luce gialla partendo da  $\simeq 150$  mW di radiazione infrarossa.



**Figura 2.6:** Schema ottico del sistema laser utilizzato per generare luce a 578 nm. La luce visibile è generata da una cavità di duplicazione SHG partendo da una sorgente infrarossa a 1156 nm. Come per gli altri casi una parte della luce IR riflessa dalla cavità è raccolta per generare il segnale d'errore necessario per la stabilizzazione in frequenza. Parte della radiazione viene inviata tramite una fibra ad un *frequency comb* per misurarne la frequenza. La luce gialla, in uscita dalla cavità, viene invece divisa in due rami: uno di stabilizzazione, che aggancia il laser ad uno dei modi di una cavità ad altissima *finesse* ULE, ed uno di spettroscopia, che tramite una fibra fa arrivare la radiazione sugli atomi.

La radiazione a 578 nm, uscente dalla cavità, viene impiegata sia sull'esperimento come luce di spettroscopia, sia per stabilizzare il laser su un modo di una cavità in vetro ULE (*Ultra Low Expansion*) ad altissima *finesse* ( $\mathcal{F} \simeq 170000$ ). Per fare questo il fascio viene diviso in due rami, rispettivamente di spettroscopia e di stabilizzazione, da un *beam splitter* preceduto da una lamina  $\lambda/2$  che permette di regolare la frazione di luce mandata sui due rami. Il ramo di spettroscopia termina con una fibra utilizzata per portare la luce gialla sul banco ottico dell'esperimento. L'ingresso della fibra è preceduto da un AOM che permette di regolare finemente la frequenza della

luce di spettroscopia. Lungo il ramo di stabilizzazione, invece, si trova un AOM in doppio passaggio che consente di modificare la frequenza del fascio, portandola ad un valore vicino a quello di uno dei modi della cavità ULE. L'aggancio ad uno dei modi della cavità è realizzato con il metodo Pound-Drever-Hall [42].

Per la stabilizzazione della frequenza del laser, sulla base del segnale d'errore, è stato sviluppato un sistema che sfrutta due attuatori controllati per mezzo di altrettanti controllori PID: un piezoelettrico che consente di spostare finemente il reticolo della cavità estesa modificando così la lunghezza fisica della cavità stessa e un EOM *broadband* posto internamente alla cavità estesa tra la sorgente laser a 1156 nm e il reticolo di diffrazione, che consente di variare in modo fine e veloce il cammino ottico. Il primo opera principalmente per correggere la componente a basse frequenze del segnale di errore (fino a 200 Hz), il secondo si occupa invece della correzione della componente ad alte frequenze con una banda di aggancio di 500 kHz.

L'uso combinato di due attuatori per la stabilizzazione del segnale consente di ottenere una radiazione a 578 nm con larghezza di riga inferiore ai 50 Hz su scale di tempo della decina di secondi. Tuttavia, a lungo termine la cavità non risulta un buon riferimento in frequenza a causa di fluttuazioni termiche e meccaniche, e soprattutto dell'invecchiamento del vetro di cui è costituita. È per questo motivo che parte della luce prodotta dall'emettitore infrarosso viene inviata al *frequency comb*, usualmente stabilizzato sul segnale GPS a 10 MHz, che permette di controllare la frequenza del laser e, se necessario, variarla finemente. Per limitare invece le fluttuazioni, la cavità ULE è stabilizzata termicamente alla temperatura che minimizza il coefficiente di espansione termica del vetro, è posizionata su un supporto opportunamente studiato per minimizzare le vibrazioni meccaniche ed alloggiata con esso in una camera da vuoto, al fine di garantire isolamento acustico, termico e anche di evitare fluttuazioni di densità dell'aria che potrebbero comportare una variazione dell'indice di rifrazione dell'aria stessa tra i due specchi modificando il cammino ottico della luce. Inoltre, per migliorare ulteriormente la stabilità termica, la camera da vuoto è posizionata all'interno di una scatola di materiale isolante la cui temperatura interna è a sua volta stabilizzata. Malgrado l'impiego di questi accorgimenti, a causa dell'invecchiamento della cavità, la radiazione emessa rimane soggetta ad un lieve spostamento in frequenza lineare nel tempo per periodi dell'ordine dell'ora, per questo motivo è necessario in fase di misura stimare il *drift* ed impostare tramite software una correzione della frequenza di modulazione dell'AOM posto sul ramo di spettroscopia in modo da avere una compensazione automatica dello spostamento. Purtroppo, osservando il *drift* per tempi più lunghi, è stato osservato un andamento oscillatorio caratterizzato da un periodo dell'ordine del gior-

no che si sovrappone allo spostamento lineare di invecchiamento. Queste fluttuazioni limitano la possibilità di compensare il *drift* in modo automatico per tempi superiori a  $20 \div 30$  minuti. Di conseguenza, per misure più lunghe, è necessario controllare ed eventualmente correggere periodicamente la frequenza del laser prendendo come riferimento proprio la risonanza della transizione di orologio  $|^1S_0\rangle \rightarrow |^3P_0\rangle$ .

## 2.3 Procedura sperimentale

In questa sezione vengono descritte brevemente le fasi fondamentali della procedura sperimentale utilizzata per ottenere e manipolare una nuvola di gas degenere di Itterbio bosonico o fermionico. Una descrizione più approfondita si può trovare in Ref. [34].

### 2.3.1 Zeeman Slower

La prima fase del ciclo sperimentale consiste nel rallentamento del fascio atomico proveniente dal forno tramite *Zeeman slower*. In questo processo un fascio laser contro-propagante, risonante con la transizione  $|^1S_0\rangle \rightarrow |^1P_1\rangle$ , esercita una pressione di radiazione tale da ridurre la velocità degli atomi da  $\simeq 330$  m/s a  $\simeq 20$  m/s, sufficiente per essere intrappolabili nella MOT. Gli atomi, durante il rallentamento, sono mantenuti in risonanza con la radiazione grazie alla presenza di una serie di bobine che generano un campo magnetico inhomogeneo  $B_{ZS}$  in quale induce uno *shift Zeeman* tale da compensare la diminuzione della velocità. La transizione a 399 nm è particolarmente adatta a questo processo in quanto ha una larghezza naturale della riga  $\Gamma = 2\pi \times 29$  MHz che permette di avere un valore elevato per la decelerazione massima  $a_{max} = \hbar k_L \Gamma / 2m$ .

### 2.3.2 Trappola magneto-ottica

La trappola magneto-ottica è costituita da un campo magnetico di quadrupolo e tre coppie di fasci laser contropropaganti a 556 nm risonanti con la transizione  $|^1S_0\rangle \rightarrow |^3P_1\rangle$ . Con questo schema è possibile indurre una forza dipendente dalla posizione che permette di richiamare gli atomi verso il centro della trappola dove il campo magnetico è nullo. A causa della sua ridotta larghezza di riga la transizione usata permette di raggiungere una temperatura Doppler più bassa ( $k_B T_D = \hbar \Gamma / 2$ ) ma, nelle nostre condizioni sperimentali, permette di intrappolare solo atomi con velocità massima pari a 10 m/s. Dato che lo *Zeeman slower* rallenta gli atomi solo fino a 20 m/s,

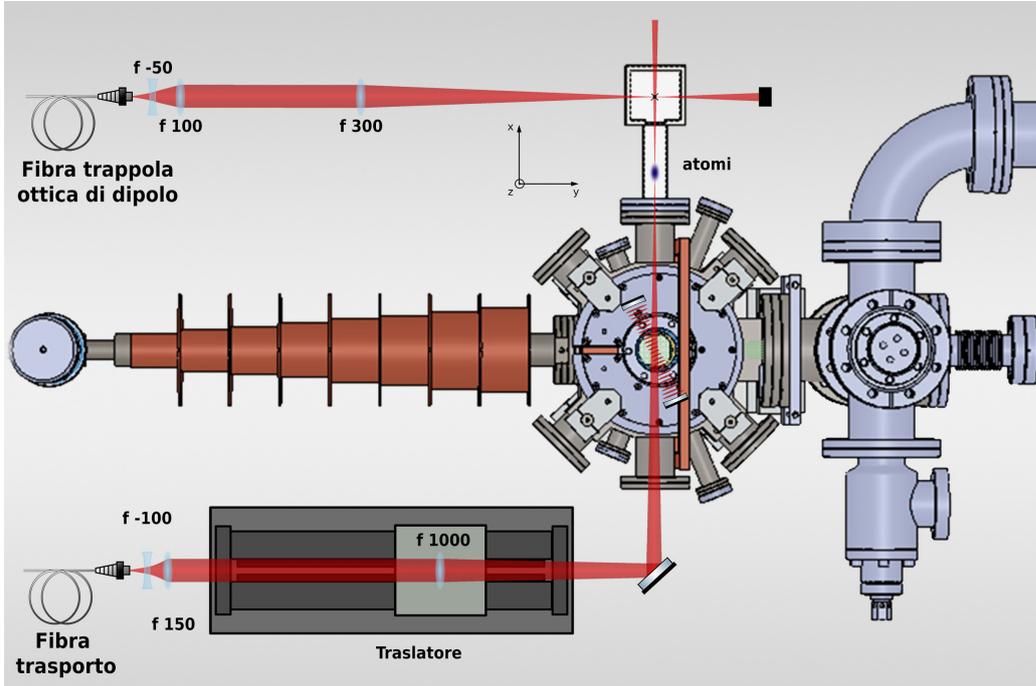
per incrementare la velocità di cattura, la luce laser di MOT viene modulata aggiungendo  $N_b = 18$  *sideband red-detuned* separate tra loro da 600 kHz. In questo modo si riescono ad intrappolare  $N_{at} \simeq 1 \cdot 10^8$  atomi di  $^{173}\text{Yb}$  e  $N_{at} \simeq 1 \cdot 10^9$  atomi di  $^{174}\text{Yb}$ . Dopo un tempo di caricamento di 20 ms le *sideband* vengono spente e la frequenza e l'intensità della *carrier* vengono ottimizzate per minimizzare la temperatura del campione. Si ottiene così una temperatura  $T \simeq 25 \mu\text{K}$  per l'isotopo fermionico e  $T \simeq 80 \mu\text{K}$  per l'isotopo bosonico. Questi valori sono molto superiori rispetto alla temperatura Doppler teoricamente raggiungibile  $T_D = 4.3 \mu\text{K}$ , poiché la densità della MOT è abbastanza elevata da permettere meccanismi collisionali di riscaldamento, tuttavia risultano sufficienti a permettere un efficiente trasferimento degli atomi nel risonatore ottico.

### 2.3.3 Risonatore ottico

All'interno della camera da vuoto dov'è realizzata la MOT è anche contenuta la cavità ad alta *finesse* descritta in sezione 2.1.1, nella quale viene inviata la radiazione a 1064 nm per realizzare un intrappolamento ottico di dipolo. Dopo la fase di raffreddamento ed intrappolamento magneto-ottico, la potenza in cavità viene incrementata fino ad ottenere una trappola di profondità  $V_0/k_B \simeq 800 \mu\text{K}$ , molto maggiore rispetto alla temperatura di MOT, ed in grado quindi di trattenere gli atomi con un'efficienza di trasferimento dell'80%. Per ottimizzare il processo la MOT viene precedentemente compressa e spostata sfruttando tre bobine di compensazione in modo da coincidere in dimensione e posizione con il *waist* del fascio in cavità. Una volta caricati nel reticolo ottico, realizzato dal modo fondamentale di cavità, gli atomi subiscono un primo raffreddamento evaporativo abbassando la profondità di trappola a  $V_0/k_B \simeq 60 \mu\text{K}$ . Ne risulta così un campione di  $N_{at} \simeq 1 \cdot 10^7$  atomi ad una temperatura  $T \simeq 5 \mu\text{K}$ .

### 2.3.4 Trasporto e trappola dipolare

Per trasportare gli atomi all'interno della cella di vetro ad elevato accesso ottico, il campione viene caricato in una trappola ottica di dipolo (ODT), con profondità  $V_0/k_B \simeq 90 \mu\text{K}$ , realizzata con il fascio laser di trasporto a 1064 nm (vedi sezione 2.2.3) fortemente focalizzato. L'efficienza di trasferimento è del 30% circa. Il fuoco del fascio di trasporto può essere traslato meccanicamente dal centro del risonatore al centro della cella per mezzo di una lente montata su un carrello a cuscinio d'aria, come mostrato in figura 2.7. Durante questo processo la potenza nella cavità viene abbassata in modo adiabatico e la nuvola atomica, mantenendosi nel minimo del potenziale realizzato dal



**Figura 2.7:** Rappresentazione schematica del sistema di trasporto e intrappolamento del campione atomico. La nube di Itterbio viene caricata nella trappola realizzata sfruttando la cavità ad alta *finesse*, all'interno della camera di MOT. Successivamente gli atomi vengono caricati in una trappola ottica di dipolo realizzata con il fascio laser di trasporto focalizzato con una lente di focale  $f = 1000$ . Questa lente è montata su un supporto posizionato su un traslatore meccanico a cuscinetto d'aria che permette di spostare il fuoco del fascio di 26 cm lungo la direzione  $\hat{x}$ , dal centro del risonatore al centro della cella. Giunti a questo punto un altro fascio a 1064 nm viene inviato sulla cella lungo la direzione  $\hat{y}$ , realizzando in questo modo la trappola incrociata ODT in cui gli atomi vengono trattenuti e raffreddati per raffreddamento evaporativo.

fascio di trasporto, può essere spostata con un'efficienza di circa 66% con un incremento della temperatura del campione del 30%.

Una volta giunti nella cella di vetro gli atomi vengono investiti da un ulteriore fascio focalizzato a 1064 nm, in direzione ortogonale a quella del trasporto. In questo modo si ottiene una trappola di dipolo incrociata nella quale avviene l'ultima fase di raffreddamento evaporativo. La profondità della trappola viene abbassata gradualmente fino ad ottenere per l'isotopo fermionico  $^{173}\text{Yb}$  un gas di Fermi con  $N_{at} \simeq 1 \cdot 10^5$  atomi a temperatura  $T \simeq 0.2T_F$  (con  $T_F$  dell'ordine dei 200 nK), e per l'isotopo bosonico  $^{174}\text{Yb}$  un condensato di

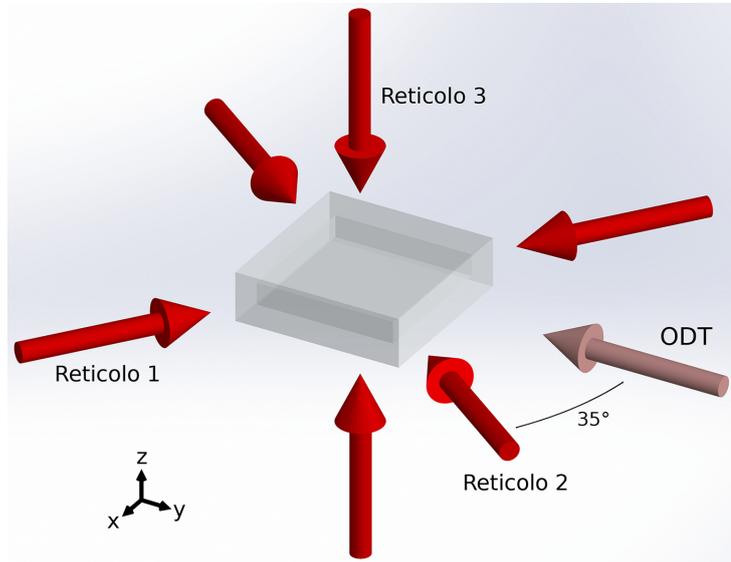
Bose-Einstein (BEC) di  $N_{at} \simeq 2 \cdot 10^5$  atomi. La trappola incrociata ODT è caratterizzata, nei due casi, dalle frequenze di trappola riportate in tabella 2.1.

	$\nu_x$ [Hz]	$\nu_y$ [Hz]	$\nu_z$ [Hz]
$^{173}\text{Yb}$	53.8	99.5	90.3
$^{174}\text{Yb}$	72.6	92.8	86.3

Tabella 2.1: Frequenze della trappola ODT per l'ititebio fermionico  $^{173}\text{Yb}$  e bosonico  $^{174}\text{Yb}$ .

### 2.3.5 Reticoli ottici

Nella cella di vetro la nube atomica può essere intrappolata in un reticolo ottico (OL) 3D. Esso consiste in tre fasci retroriflessi linearmente polarizzati alla lunghezza d'onda magica di 759.35 nm (vedi sezione 2.2.4). Un fascio è diretto lungo il piano verticale, mentre gli altri due, ortogonali tra loro, si trovano sul piano orizzontale, con uno dei due a  $35^\circ$  rispetto all'asse del fascio della ODT, come mostrato in figura 2.8. La potenza dei fasci è regolata agen-



**Figura 2.8:** Schema del reticolo ottico 3D realizzato con tre fasci retroriflessi di luce a 759 nm ortogonali tra loro. La direzione del fascio diretto di Reticolo 2 è ruotata di  $35^\circ$  rispetto a quella della radiazione della trappola ottica di dipolo (asse  $\hat{y}$ ).

do sugli AOM prima delle fibre. La profondità del reticolo è espressa come multiplo dell'energia di rinculo del reticolo  $s = V_0/E_R$  con  $E_r = \hbar^2 k_L^2/2m$  e può essere calibrata inducendo una modulazione in ampiezza (AM) risonante del fascio di reticolo [44]. La profondità massima raggiungibile corrisponde a  $s = 40$ . Una volta caricato il reticolo la trappola di dipolo viene spenta in modo adiabatico, lasciando gli atomi intrappolati nel solo reticolo. In questo passaggio quasi la metà degli atomi viene persa, lasciando, nel caso bosonico, un campione di circa  $120 \times 10^3$  atomi.

### 2.3.6 Imaging

Per rivelare il campione atomico si usa la tecnica dell'*absorption imaging* [45]. Un fascio di luce risonante d'intensità  $I_0$  viene inviato sul campione che lo assorbe andando a diminuire l'intensità della radiazione trasmessa  $I_t$  in accordo con la relazione di Lambert-Beer:

$$I_t(x, y) = I_0(x, y)e^{-\sigma n_c(x, y)} \rightarrow n_c(x, y) = -\frac{1}{\sigma} \log\left(\frac{I_t(x, y)}{I_0(x, y)}\right) \quad (2.2)$$

dove  $\sigma = 3\lambda^2/2\pi$  è la *cross section* della radiazione risonante e  $n_c(x, y) = \int n(x, y, z)dz$  è l'integrale della densità atomica lungo la direzione del fascio. Il fascio trasmesso viene rilevato con una CCD che cattura l'immagine dell'ombra del campione atomico che ha assorbito la radiazione risonante. Considerando la struttura a pixel della camera la densità corrispondente a ciascun elemento  $(i, j)$  può essere calcolata tramite:

$$n_c(i, j) = -\frac{S}{\sigma} \log\left(\frac{P_{ij} - B_{ij}}{F_{ij} - B_{ij}}\right) \quad (2.3)$$

dove  $S$  è l'area di un singolo pixel, tenendo conto dell'ingrandimento del sistema ottico utilizzato per indirizzare la luce sulla CCD, e  $P_{ij}$ ,  $F_{ij}$ ,  $B_{ij}$  sono le intensità rilevate in tre acquisizioni successive, corrispondenti rispettivamente alla luce trasmessa dagli atomi  $I_t$ , alla luce di *imaging* in assenza di atomi  $I_0$  ed al fondo acquisito in assenza del fascio di *imaging*. Il segnale così ottenuto viene poi analizzato per mezzo di un software.

L'attuale processo di *imaging*, vista la transizione sfruttata ( $|^1S_0\rangle \rightarrow |^1P_1\rangle$ ), consente di determinare la popolazione atomica nello stato fondamentale  $|^1S_0\rangle$  ma non quella dei livelli metastabili, tra cui  $|^3P_0\rangle$ . Per ricavare le popolazioni nel livello eccitato metastabile è necessario, quindi, implementare il sistema con un laser che permetta il pompaggio ottico verso lo stato fondamentale, come vedremo in sezione 3.4.

## Capitolo 3

# Spettroscopia con transizione di orologio su un BEC di $^{174}\text{Yb}$

In questo capitolo vengono presentate le misure sperimentali su gas ultrafreddi di Itterbio bosonico  $^{174}\text{Yb}$  realizzate all'interno di questo lavoro di tesi. Per prima cosa viene introdotta una breve trattazione teorica sulla transizione di *clock*, caratterizzata da larghezza di riga estremamente ridotta, ed i meccanismi che consentono di eccitarla nel caso fermionico e bosonico, e vengono analizzate le condizioni che permettono di sfruttarla per misure di spettroscopia molto precise riducendo al minimo i fenomeni di allargamento (sezione 3.1). Successivamente vengono presentate le misure di spettroscopia effettuate su campioni di  $^{174}\text{Yb}$  eccitando la transizione  $^1S_0 \rightarrow ^3P_0$  (sezione 3.2). A partire dai dati sperimentali è stato possibile ricavare una misura delle lunghezze di scattering associate ai vari processi di interazione osservati (sezione 3.3). Infine, viene illustrata la misura dei coefficienti di decadimento relativi alle collisioni inelastiche  $e-g$  ed  $e-e$ , per la quale è stato necessario implementare un metodo per poter misurare gli atomi nello stato eccitato metastabile  $^3P_0$ , introducendo una nuova sorgente laser a 1389 nm (sezione 3.4).

### 3.1 Condizioni per la spettroscopia di *clock*

#### 3.1.1 Eccitazione della transizione $^1S_0 \rightarrow ^3P_0$

Come abbiamo anticipato la transizione  $^1S_0 \rightarrow ^3P_0$ , essendo doppiamente proibita, è caratterizzata da una larghezza di riga estremamente ridotta, che la rende ideale come riferimento per la realizzazione di orologi ottici, da cui prende il suo nome di transizione di *clock*. Il meccanismo che ne

permette l'eccitazione è legato al fatto che essa diventa debolmente permessa nel momento in cui  $J$  non è più un buon numero quantico. Ciò si verifica spontaneamente negli atomi fermionici, grazie allo spin nucleare non nullo, e può essere indotto in quelli bosonici applicando un campo magnetico esterno, come illustrato di seguito.

### Caso fermionico

Nel caso fermionico la presenza di uno spin nucleare  $I$  ( $I = 1/2$  per  $^{171}\text{Yb}$  e  $I = 5/2$  per  $^{173}\text{Yb}$ ) non nullo dà luogo ad un momento magnetico nucleare  $\mu_I$  che, interagendo con il campo magnetico generato dagli elettroni appartenenti alle shell incomplete in corrispondenza del nucleo, provoca uno *shift* dell'energia descrivibile con un'hamiltoniana del tipo:

$$H_{hfs} = -\boldsymbol{\mu}_I \cdot \mathbf{B}_{el} = \mu_N g_I (\mathbf{I}_N \cdot \mathbf{B}_{el}) \quad (3.1)$$

dove  $\mu_N$  è il magnetone nucleare,  $g_I$  è il fattore giromagnetico nucleare e  $\mathbf{B}_{el}$  è il campo magnetico generato dagli elettroni. Calcolando il campo magnetico generato da  $Z$  elettroni si ottiene [46] per l'hamiltoniana iperfine l'espressione:

$$H_{hfs} = 2\mu_B \mu_N g_I \left( \mathbf{I}_N \cdot \sum_{i=1}^Z \left\{ \frac{\mathbf{l}_i - \mathbf{s}_i}{r^3} + \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_i)\mathbf{r}}{r^5} + \frac{8\pi}{3} \delta(\mathbf{r}) \mathbf{s}_i \right\} \right) \quad (3.2)$$

dove  $\mu_B$  è il magnetone di Bohr, mentre  $\mathbf{s}_i$  e  $\mathbf{l}_i$  sono rispettivamente lo spin e il momento angolare orbitale dell' $i$ -esimo elettrone.

In analogia con la trattazione dell'interazione spin-orbita (di cui abbiamo parlato in sezione 1.1), in presenza della perturbazione  $H_{hfs}$  il momento angolare  $J$  non è più un buon numero quantico ed è necessario introdurre il momento angolare totale  $\mathbf{F}$ :

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{J} . \quad (3.3)$$

In aggiunta a quanto visto precedentemente, ciò produce un ulteriore mixing tra gli stati con lo stesso momento angolare totale e di conseguenza lo stato metastabile  $|^3P_0\rangle$  potrà essere espresso con la combinazione lineare

$$|^3P_0\rangle = \alpha|^3P_0^0\rangle + \beta|^3P_1^0\rangle + \gamma|^1P_1^0\rangle \quad (3.4)$$

dove con l'apice  $^0$  sono indicati gli autostati del sistema imperturbato.

A questo punto grazie al mixing con lo stato  $|^1P_1^0\rangle$  il nuovo stato può decadere verso lo stato fondamentale  $|^1S_0\rangle$  attraverso una transizione di dipolo elettrico. Seguendo la trattazione in Ref.[47] è possibile ottenere l'espressione che descrive il rate di decadimento per emissione spontanea di uno stato atomico per interazione di dipolo elettrico, da cui si possono stimare le larghezze di riga della transizione di orologio per vari isotopi fermionici, che corrisponde a  $\Gamma = 2\pi \times 7$  mHz nel caso del  $^{171}\text{Yb}$  ed a  $\Gamma = 2\pi \times 6$  mHz nel caso del  $^{173}\text{Yb}$ .

### Caso bosonico

A causa dell'assenza di uno spin nucleare, nel caso del bosone  $J$  continua ad essere un buon numero quantico e non è possibile, in linea di principio, eccitare la transizione d'orologio. Tuttavia, l'applicazione di un campo magnetico esterno consente di mescolare una frazione controllabile dello stato  ${}^3P_1$  con quello  ${}^3P_0$  permettendo così l'eccitazione della transizione di singolo fotone  $|{}^1S_0\rangle \rightarrow |{}^3P_0\rangle$  anche per gli isotopi bosonici [48].

Consideriamo di applicare un campo magnetico  $\mathbf{B}$  che accoppi i due stati separati tra loro da una frequenza  $\Delta$ , corrispondente allo splitting di struttura fine (circa 20 THz in Yb). L'hamiltoniana che descrive l'interazione tra un campo magnetico statico e un atomo è descritta da

$$H_Z = \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} \quad (3.5)$$

dove  $\mathbf{B}$  è il campo magnetico e  $\boldsymbol{\mu}$  è il momento di dipolo magnetico dell'atomo. Per un campo magnetico diretto lungo l'asse  $z$  l'espressione si può scrivere come

$$H_Z = \mu_B B (L_z + 2S_z) \quad (3.6)$$

dove  $\mu_B$  è il magnetone di Bohr e  $L_z$  e  $S_z$  sono rispettivamente la proiezione del momento magnetico orbitale e del momento magnetico di spin lungo la direzione dell'asse  $z$ .

In accordo con la teoria perturbativa la presenza di questo termine nell'hamiltoniana va a modificare lo stato di tripletto che al primo ordine perturbativo diventa

$$|{}^3P_0\rangle = |{}^3P_0^0\rangle + \frac{\langle {}^3P_0^0 | H_Z | {}^3P_1^0 \rangle}{\Delta} |{}^3P_1^0\rangle = |{}^3P_0^0\rangle + \frac{\Omega_B}{\Delta} |{}^3P_1^0\rangle \quad (3.7)$$

dove l'apice  $^0$  indica gli autostati del sistema imperturbato,  $\Delta$  è la differenza in frequenza tra i livelli e  $\Omega_B = \frac{\langle {}^3P_0^0 | H_Z | {}^3P_1^0 \rangle}{\hbar}$  è l'elemento di matrice che descrive l'accoppiamento con il campo magnetico.

Grazie a questo mixing la transizione  $|{}^1S_0\rangle \rightarrow |{}^3P_0\rangle$  diventa parzialmente permessa e ciò consente di accoppiare i due stati. Infatti, in presenza di un campo elettrico  $\mathbf{E}$  risonante, lo stato  ${}^3P_1^0$  è accoppiato allo stato fondamentale con la frequenza di Rabi

$$\Omega_L = \frac{\langle {}^3P_1^0 | \mathbf{d} \cdot \mathbf{E} | {}^1S_0 \rangle}{\hbar} \quad (3.8)$$

dove  $\mathbf{d}$  è l'operatore di dipolo elettrico. A seguito del mixing tra gli stati è quindi possibile andare ad eccitare la transizione  $|{}^1S_0\rangle \rightarrow |{}^3P_0\rangle$ . La frequenza di Rabi per questa transizione di orologio può essere scritta allora come

$$\Omega = \frac{\langle {}^3P_0 | \mathbf{d} \cdot \mathbf{E} | {}^1S_0 \rangle}{\hbar} = \frac{\Omega_L \Omega_B}{\Delta}. \quad (3.9)$$

Alla transizione, ora debolmente permessa, è associata una larghezza di riga pari a [48]

$$\Gamma = \Gamma_0 \frac{\Omega_L^2/4 + \Omega_B^2}{\Delta^2} \quad (3.10)$$

dove  $\Gamma_0$  è la larghezza naturale della transizione  $|^1S_0\rangle \rightarrow |^3P_1^0\rangle$ . L'allargamento della riga, per valori sperimentali tipici  $I = 10 \text{ mW/mm}^2$  e  $B = 100 \text{ G}$ , risulta dell'ordine di  $10 \text{ }\mu\text{Hz}$ .

L'espressione della frequenza di Rabi può essere anche riscritta in termini dei campi applicati

$$\Omega = \alpha |\mathbf{B}| \sqrt{I} \quad (3.11)$$

dove  $I$  è l'intensità del laser di clock e  $\alpha = 186 \text{ Hz}/(\text{T}\sqrt{\text{mW/cm}^2})$  per l'itterbio. Per valori sperimentali tipici  $I = 10 \text{ mW/mm}^2$  e  $B = 100 \text{ G}$  si ottiene quindi una frequenza di Rabi dell'ordine di  $2\pi \times 200 \text{ Hz}$ .

A differenza degli isotopi fermionici, dove c'è uno *shift Zeeman* lineare della transizione di *clock* (a causa del momento magnetico differenziale non nullo), negli isotopi bosonici il termine lineare è assente e il termine dominante è quadratico nel campo magnetico applicato. Questo effetto è legato alla correzione allo stato imperturbato introdotta dal termine aggiuntivo dell'hamiltoniana (3.6). Al secondo ordine perturbativo ne risulta uno *shift* dato da [48]

$$\Delta_2 = \frac{|\langle ^3P_0 | H_Z | ^3P_1 \rangle|^2}{\Delta} = -\frac{\Omega_B^2}{\Delta}. \quad (3.12)$$

### 3.1.2 *Light shift* differenziali e lunghezza d'onda magica.

Nei nostri esperimenti l'eccitazione della transizione d'orologio nei campioni atomici di Itterbio avviene all'interno di reticoli ottici realizzati sfruttando coppie di fasci contro-propaganti non risonanti con le transizioni atomiche. Tuttavia, in queste condizioni, la presenza di un campo elettrico non risonante produce sui livelli atomici uno *shift* di energia dipendente dall'intensità del campo stesso e dallo stato atomico, come abbiamo visto in sezione 1.2. Ciò fa sì che, per atomi intrappolati all'interno di un reticolo ottico, i livelli fondamentale ed eccitato risentano di *shift* diversi e che, di conseguenza, una transizione atomica dallo stato fondamentale sia soggetta ad uno spostamento dato da:

$$\Delta E_{eg}(\omega) = \delta_g(\omega) - \delta_e(\omega) \quad (3.13)$$

dove  $\delta_g(\omega)$  e  $\delta_e(\omega)$  indicano rispettivamente il *light shift* dello stato fondamentale e di quello eccitato in funzione della frequenza della radiazione incident-

te. Lo *shift* differenziale può essere espresso in funzione della polarizzabilità atomica, definita come [28]

$$\alpha_\nu(\omega) = \frac{2}{3\hbar} \sum_{k \neq \nu} \left( \frac{\omega_k - \omega_\nu}{(\omega_k - \omega_\nu)^2 - \omega^2} |\langle \nu | \mathbf{d} | k \rangle|^2 \right) \quad (3.14)$$

dove  $\nu$  indica il livello atomico e  $\mathbf{d}$  è l'operatore momento di dipolo. In termini della polarizzabilità il *light shift* differenziale (1.3) risulta:

$$\Delta E_{eg}(\omega) = \frac{1}{4} (\alpha_g(\omega) - \alpha_e(\omega)) E_0^2 \quad (3.15)$$

dove  $E_0$  è il modulo del campo elettrico applicato<sup>1</sup>.

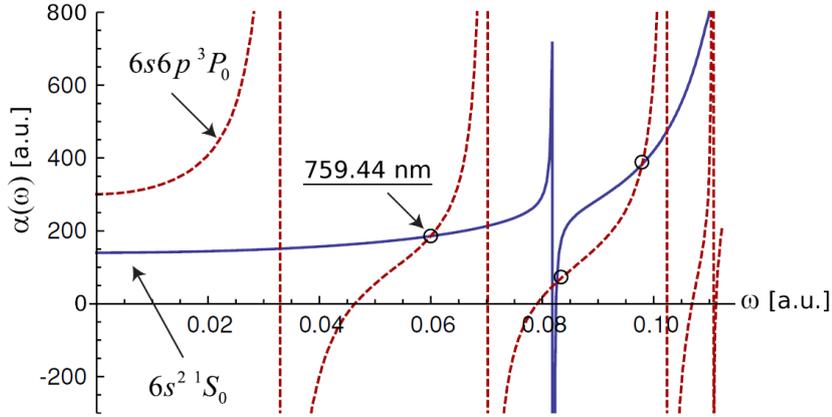
Questo spostamento diventa molto importante se si vuole andare ad indagare transizioni molto strette, come nel nostro caso. Inoltre, va tenuto conto del fatto che i reticoli vengono realizzati in corrispondenza del *waist* di fasci laser focalizzati su dimensioni tipiche delle centinaia di  $\mu\text{m}$ , e ciò fa sì che atomi che si trovano in siti reticolari diversi possano essere soggetti a *light shift* differenziali diversi a seconda della loro distanza dal centro del fascio. Un ulteriore effetto può essere legato a piccole fluttuazioni temporali dell'intensità dei fasci che introduce nel *light shift* una dipendenza anche dal tempo.

Risulta quindi necessario, per effettuare misure precise, minimizzare il fenomeno del *light shift* differenziale. Per fare questo si possono sfruttare le *lunghezze d'onda magiche* per le quali le polarizzabilità dei due livelli legati dalla transizione risultano uguali in modulo e segno:  $\alpha_g(\omega) = \alpha_e(\omega)$ .

Nel caso dell'Itterbio, per la transizione di orologio  $|^3P_0\rangle \rightarrow |^1S_0\rangle$ , oggetto delle nostre misure, questa condizione è soddisfatta per tre lunghezze d'onda nel visibile: a circa 450 nm, 550 nm e 750 nm [28], come si può vedere anche in figura 3.1. Quest'ultima risulta lontana dalle risonanze dell'atomo e, per questo motivo, è stata scelta per realizzare il reticolo ottico 3D nel quale gli atomi vengono intrappolati. Inoltre, come ulteriore vantaggio, è relativamente semplice realizzare luce laser ad alta potenza in corrispondenza di questa lunghezza d'onda, ad esempio utilizzando un laser a Titanio-Zaffiro. Il valore esatto della lunghezza d'onda magica è stato stimato in [28] e corrisponde a 759.44 nm.

---

<sup>1</sup>Si può dimostrare che l'espressione 3.15 è equivalente alla 1.3, ma estende la trattazione ad un sistema a più livelli ed esplicita la polarizzabilità atomica.



**Figura 3.1:** Polarizzabilità atomica dei livelli  $^1S_0$  (blu) e  $^3P_0$  (rosso) dell'Itterbio in funzione della frequenza (in unità atomiche) [28]. I punti segnati corrispondono alle frequenze per le quali le due curve si intersecano e il *light shift* differenziale risulta nullo.

### 3.1.3 Regime di Lamb-Dicke

La caratteristica principale delle transizioni di orologio consiste nella larghezza di riga naturale estremamente ridotta. Tuttavia, per poterla sfruttare è necessario minimizzare tutti gli effetti che possano portare un allargamento della transizione, tra i quali quello sicuramente più influente è l'allargamento Doppler.

La condizione ottimale per limitare questi effetti è quella di realizzare le misure su atomi ben confinati, in modo che le transizioni che portano ad un cambiamento dello stato di moto dell'atomo siano inibite. Ciò si verifica quando la funzione d'onda dell'atomo si può considerare ben localizzata all'interno di un sito reticolare, ovvero quando la distribuzione spaziale dell'atomo è molto piccola rispetto alla lunghezza d'onda della radiazione laser:  $\delta x \ll \lambda$ . Questa condizione prende il nome di regime di Lamb-Dicke ed è all'origine della soppressione dell'allargamento Doppler delle transizioni di atomi confinati in reticolo e degli effetti di rinculo.

Consideriamo per semplicità un atomo a due livelli  $|g\rangle$  ed  $|e\rangle$ , con energie rispettivamente  $\hbar\omega_g$  e  $\hbar\omega_e$ , confinato all'interno di un reticolo ottico 1D ed investito da una radiazione di frequenza  $\omega_L$  e numero d'onda  $k$ . Nell'ipotesi di reticolo profondo, assumendo la funzione d'onda confinata all'interno di un sito reticolare, si può considerare in buona approssimazione ciascun sito come un singolo potenziale di oscillatore armonico, che assumiamo caratterizzato dalla frequenza di trappola  $\omega_T$ .

Si può dimostrare [49] che in questo caso l'hamiltoniana totale del sistema è

data da:

$$H = -\hbar\Delta|e\rangle\langle e| + \hbar\omega_T\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar\Omega}{2}\left[e^{i\eta(\hat{a}^\dagger+\hat{a})}|e\rangle\langle g| + e^{-i\eta(\hat{a}^\dagger+\hat{a})}|g\rangle\langle e|\right] \quad (3.16)$$

dove  $\Delta = \omega_L - (\omega_e - \omega_g)$  è il detuning,  $\Omega$  è la frequenza di Rabi per l'atomo a riposo non confinato,  $\hat{a}^\dagger$  e  $\hat{a}$  sono gli operatori di creazione e distruzione dell'oscillatore armonico e  $\eta$  è il parametro di Lamb-Dicke definito come:

$$\eta = \frac{kx_T}{\sqrt{2}} = k\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_T}} = \sqrt{\frac{E_r}{\hbar\omega_T}} \quad (3.17)$$

con  $x_T$  lunghezza di oscillatore armonico e  $E_r = \hbar^2k^2/2m$  energia di rinculo. Gli autostati di questa hamiltoniana sono dati dalla sovrapposizione dei prodotti degli stati interni ed esterni dell'atomo:

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} (c_{gn}|g\rangle|n\rangle + c_{en}|e\rangle|n\rangle) \quad (3.18)$$

dove  $|n\rangle$  indica il livello n-esimo di oscillatore armonico.

Sostituendo questa funzione d'onda nell'equazione di Schrödinger con hamiltoniana (3.16) si ottiene un set di equazioni differenziali per  $c_{gn}$  e  $c_{en}$  nelle quali la frequenza di Rabi  $\omega$  viene rimpiazzata da [49]

$$\Omega_{mn} = \Omega\langle m|e^{i\eta(\hat{a}^\dagger+\hat{a})}|n\rangle. \quad (3.19)$$

Nel limite in cui  $\eta \ll 1$ , ovvero  $E_r \ll \hbar\omega_T$ , l'esponenziale può essere sviluppato al primo ordine in  $\eta$ . In questo modo la probabilità della transizione dallo stato  $m$  allo stato  $n$  risulta:

$$P_{m \rightarrow n} \propto \left| \langle m|1 + \eta(\hat{a}^\dagger + \hat{a})|n\rangle \right|^2 = \left| \delta_{m,n} + \eta(\sqrt{n+1}\delta_{m,n+1} + \sqrt{n}\delta_{m,n-1}) \right|^2. \quad (3.20)$$

Il primo termine dell'espressione ottenuta descrive le transizioni tra stati interni senza variazioni dello stato di moto del centro di massa dell'atomo. Gli altri due contributi presenti al primo ordine rappresentano i processi di assorbimento di un fotone in cui si eccita o diseccita anche lo stato di oscillatore armonico. A questo processo, per la conservazione dell'energia, è associato uno spostamento di riga pari a  $\pm\hbar\omega$ . Come si vede però, queste transizioni sono inibite del fattore  $\eta$  che abbiamo considerato  $\ll 1$  e, nel limite in cui  $\eta \rightarrow 0$ , ovvero nel caso di una buca di potenziale infinitamente profonda, risultano completamente soppresse. Le transizioni  $|n\rangle \rightarrow |n \pm 1\rangle$ , quando presenti, prendono il nome di *sidebands*. Esse possono presentare una larghezza di riga maggiore rispetto alla transizione  $|n\rangle \rightarrow |n\rangle$ , in cui lo stato di

moto non cambia e la frequenza di transizione corrisponde alla differenza di energia imperturbata fra i 2 livelli. Ciò è dovuto al fatto che la profondità di reticolo dipende dall'intensità luminosa del fascio che lo genera e dipende quindi dalla distanza dal *waist* del fascio. A seconda della posizione, quindi, siti reticolari diversi avranno profondità leggermente diverse e, di conseguenza, una spaziatura diversa tra i livelli di oscillatore armonico. Ciò fa sì che mentre le transizioni che coinvolgono solo la parte elettronica mantengono la stessa frequenza, quelle che interessano anche la parte di moto risentano della diversa spaziatura fra i livelli di oscillatore armonico di siti reticolari diversi, ed abbiano così frequenze di risonanza diverse a seconda della posizione nel reticolo, producendo in questo modo un profilo di riga allargato.

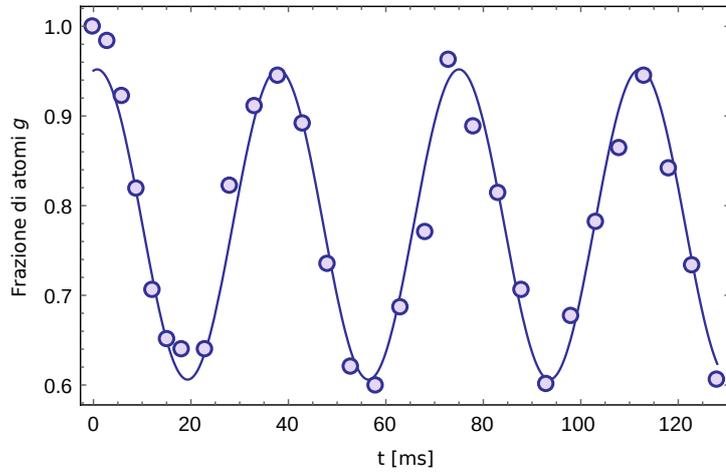
Nel caso della transizione di orologio  $^1S_0 \rightarrow ^3P_0$  nell'Itterbio  $^{173}\text{Yb}$  e  $^{174}\text{Yb}$  la larghezza di riga è molto minore rispetto alla separazione tra le *sidebands* e queste possono essere risolte spettralmente.

## 3.2 Spettroscopia con transizione d'orologio

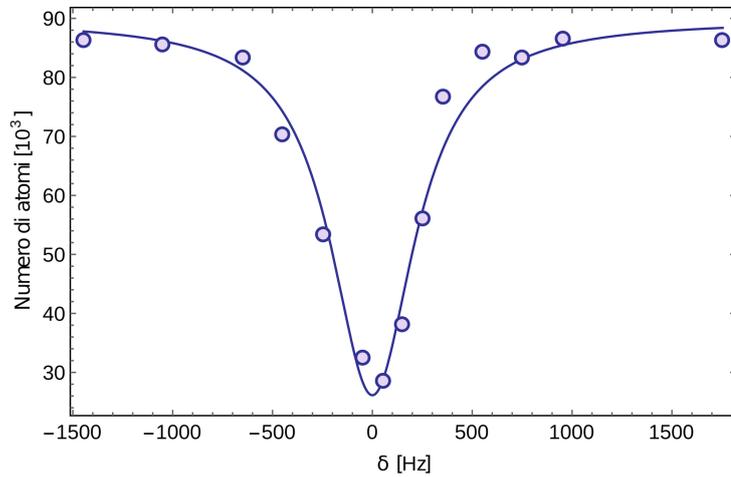
Il campione atomico, esaminato in questo progetto di tesi, consiste in un condensato di Bose-Einstein di circa  $120 \times 10^3$  atomi realizzato nella trappola ottica di dipolo e caricato nel reticolo ottico 3D secondo la procedura descritta nella sezione 2.3. Su di esso viene effettuata la spettroscopia di *clock*, inviando un impulso di luce gialla a 578 nm, con polarizzazione  $\pi$ , risonante con la transizione di orologio. L'intensità e il *waist* del fascio possono essere regolati andando a sfruttare percorsi ottici diversi per mandare la radiazione sul campione. L'eccitazione nel reticolo è effettuata in regime di Lamb-Dicke, con profondità di reticolo tipicamente tra  $s = 15$  e  $s = 35$ . La direzione scelta per il laser di *clock* nel setup sperimentale coincide con quella di uno dei fasci di reticolo, per questo, per garantire la condizione di Lamb-Dicke, è sufficiente che il solo reticolo co-propagante sia abbastanza profondo.

La larghezza di riga del nostro laser di *clock*, stimata intorno a poche decine di Hz [50] sulla scala temporale delle oscillazioni atomiche, determina il limite inferiore alla risoluzione degli spettri presentati nelle prossime pagine.

La figura 3.2 riporta le oscillazioni di Rabi della popolazione atomica. Il numero di atomi  $g$  nello stato fondamentale dopo l'eccitazione di *clock* è riportato in funzione della durata dell'impulso. L'oscillazione, caratterizzata da una frequenza pari a  $\Omega = 2\pi \times (26.9 \pm 0.2)$  Hz, mostra un tempo di coerenza dell'interazione atomo-laser molto lungo, che supera i 100 ms. Per acquisire gli spettri di risonanza sono stati utilizzati impulsi di *clock* di durata compresa tra 250 ms e 1,5 s. Si osserva a questo punto la quantità di



**Figura 3.2:** Oscillazioni di Rabi dopo l'eccitazione selettiva dei siti singolarmente occupati di un campione di  $^{174}\text{Yb}$  in un reticolo ottico 3D profondo. Il numero di atomi  $g$  rimasti dopo l'eccitazione con l'impulso di *clock* è riportato in funzione della durata dell'impulso. Lo svuotamento incompleto osservato in corrispondenza del  $\pi$ -pulse (dopo circa 20 ms) può essere associato alla presenza di siti reticolari multiplamente occupati, che non vengono eccitati (come discusso più in dettaglio in sezione 3.2.1).

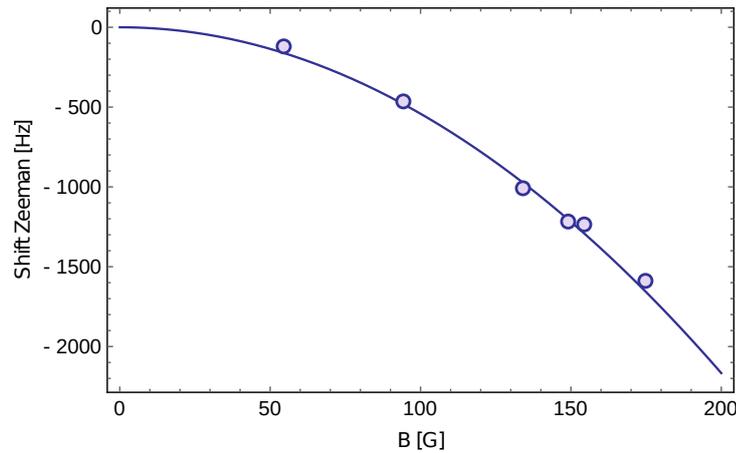


**Figura 3.3:** Tipico spettro di risonanza di un campione di atomi di  $^{174}\text{Yb}$  eccitato con un impulso di orologio della durata di 250 ms in presenza di un campo magnetico esterno di 175 G. L'origine dell'asse orizzontale è stata scelta in corrispondenza del centro del picco di spettroscopia. La linea continua rappresenta il fit lorentziano sui dati sperimentali.

atomi rimasta nello stato fondamentale in funzione della frequenza del laser, in questo modo il segnale di spettroscopia appare come una diminuzione del numero di atomi.

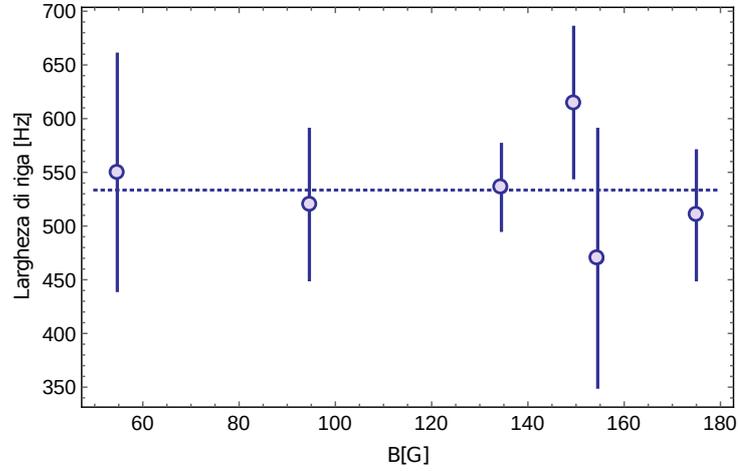
In figura 3.3 è riportato un tipico spettro acquisito applicando un campo magnetico esterno di 175 G ed eccitando il campione con un impulso di *clock* della durata di 250 ms. La linea continua rappresenta il fit lorentziano sui dati sperimentali, da cui risulta una larghezza di riga di  $(510 \pm 60)$  Hz.

Si è deciso, per prima cosa, di indagare la transizione al variare del campo magnetico esterno. La transizione è stata eccitata con un impulso di durata 250 ms ed intensità dell'ordine di  $10 \text{ mW/mm}^2$ , per vari valori di campo magnetico compresi tra 50 e 175 G. In figura 3.4 sono riportate le posizioni dei centri dei picchi di risonanza in funzione del campo magnetico. I dati raccolti sono stati fittati con una parabola pura, in accordo con l'andamento teorico descritto dall'espressione (3.12). Dal fit si ottiene un valore dello *shift Zeeman* quadratico pari a  $\delta z = -(0.054 \pm 0.002) \text{ Hz/G}^2$ , il quale risulta in accordo con il valore trovato in Ref.[51] pari a  $\delta z = -(0.0612 \pm 0.010) \text{ Hz/G}^2$ .



**Figura 3.4:** *Shift Zeeman* quadratico del picco di risonanza di un campione di  $^{174}\text{Yb}$  eccitato con una transizione di *clock* al variare del campo magnetico esterno applicato. Sui valori sperimentali è stato fatto un fit con una parabola pura. Gli errori sui dati, ottenuti dai fit lorentziani degli spettri, sono dell'ordine di 10 Hz e risultano visibili in quanto più piccoli dei punti in grafico.

Le risonanze osservate hanno mostrato tutte una larghezza di riga pari a circa 500 Hz che non è risultata dipendente dal campo magnetico applicato, come si può vedere in figura 3.5. Ciò ha fatto intuire la presenza di una sotto struttura del picco nascosta dall'allargamento in potenza.



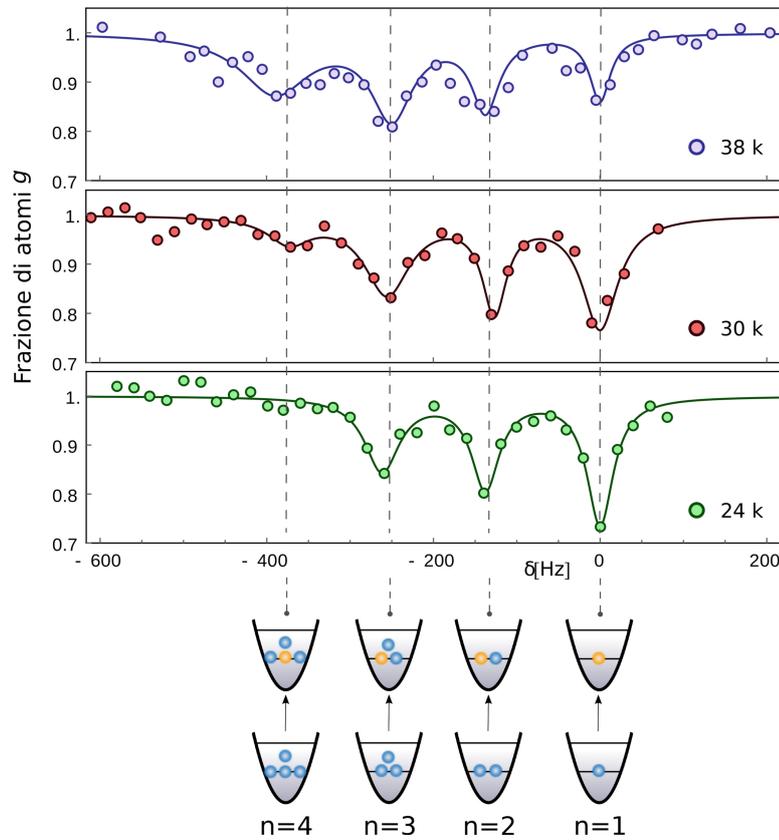
**Figura 3.5:** Larghezza di riga dei picchi di risonanza osservati per vari valori del campo magnetico esterno. I valori riportati sono stati ottenuti dai fit lorentziani degli spettri e mostrano un andamento costante.

### 3.2.1 Spettroscopia con numero di occupazione risolto

Per indagare la sotto struttura è stato necessario ridurre l'accoppiamento dei livelli, che rende la transizione debolmente permessa, abbassando il valore del campo magnetico esterno (54.7 G) e l'intensità della radiazione di *clock* risonante ( $\sim 1 \text{ mW/mm}^2$ ). In questo modo è stato possibile aumentare la risoluzione spettroscopica ed osservare vari picchi che abbiamo associato a processi in cui un singolo atomo  $g$ , in un sito reticolare occupato da  $n$  atomi<sup>2</sup>, viene eccitato allo stato  $e$ . Rappresentiamo questi processi con la notazione  $|(n)g\rangle \rightarrow |(n-1)ge\rangle$ .

Nelle figure 3.6 e 3.7a sono riportati degli esempi di spettri acquisiti su un campione di  $\sim 5 \times 10^4$  atomi intrappolati nel retico 3D con profondità  $s = 30$ . Tra i picchi ottenuti abbiamo associato quello a più alta energia con il processo  $|g\rangle \rightarrow |e\rangle$  dei siti singolarmente occupati. Per identificarlo sono stati effettuati due diversi esperimenti nei quali è stato cambiato rispettivamente il numero totale di atomi nel campione ed il numero di atomi nei siti multiplamente occupati.

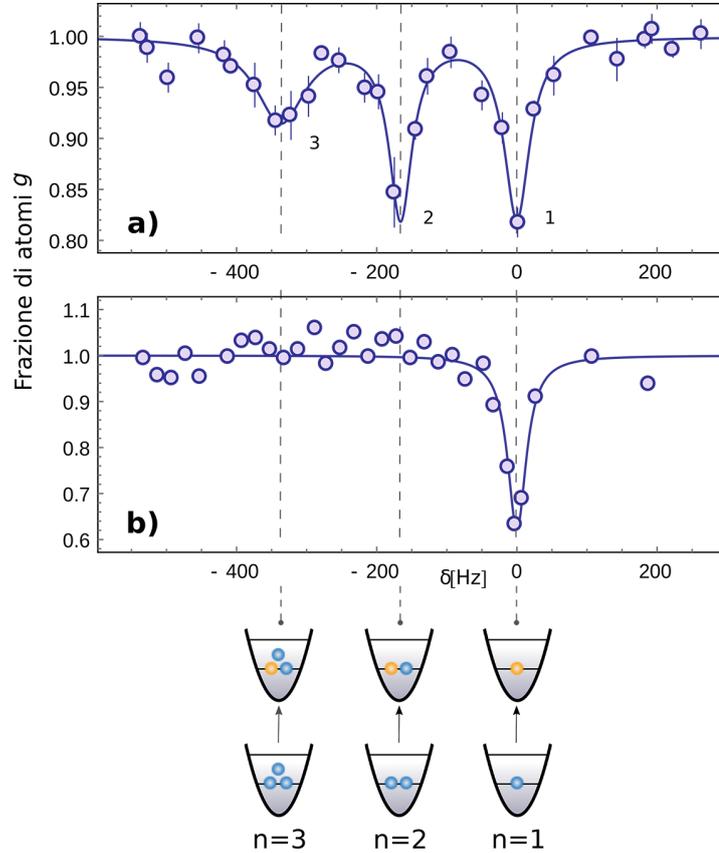
<sup>2</sup>Nella sezione precedente abbiamo indicato con  $n$  il livello di oscillatore armonico, da qui in avanti, invece, il livello di oscillatore armonico rimane sempre quello iniziale mentre con  $|n\rangle$  indichiamo lo stato di un atomo in un sito reticolare occupato da  $n$  atomi.



**Figura 3.6:** Spettroscopia di *clock* di un campione di atomi di  $^{174}\text{Yb}$  in un reticolo ottico 3D effettuata su campioni con diverso numero di atomi. Tutti i grafici riportano la frazione di atomi  $g$  rimasti dopo l'eccitazione della transizione di *clock*. L'origine dell'asse orizzontale è stata scelta in corrispondenza della posizione del picco di risonanza a più alta energia. Al diminuire del numero di atomi l'area sotto i picchi di risonanza più bassi diminuisce, in favore del picco più a destra, permettendo così di identificare l'eccitazione dei siti singolarmente occupati con il picco di risonanza a più alta energia.

Nel primo esperimento, i cui risultati sono riportati in figura 3.6, la spettroscopia è stata fatta su campioni con numero di atomi diverso ottenuto variando il tempo di attesa in reticolo prima di eccitare la transizione. Col diminuire del numero di atomi del campione la frazione di atomi nei picchi di risonanza più a sinistra si riduce a favore di quella del picco a destra. Ciò ha permesso di attribuire questi picchi alle transizioni  $|(n)g\rangle \rightarrow |(n-1)ge\rangle$  con  $n > 1$ . Infatti, al diminuire del numero di atomi del campione, diminuisce anche il numero di atomi in ciascun sito reticolare, con un conseguente

aumento della frazione di atomi in siti singolarmente occupati.

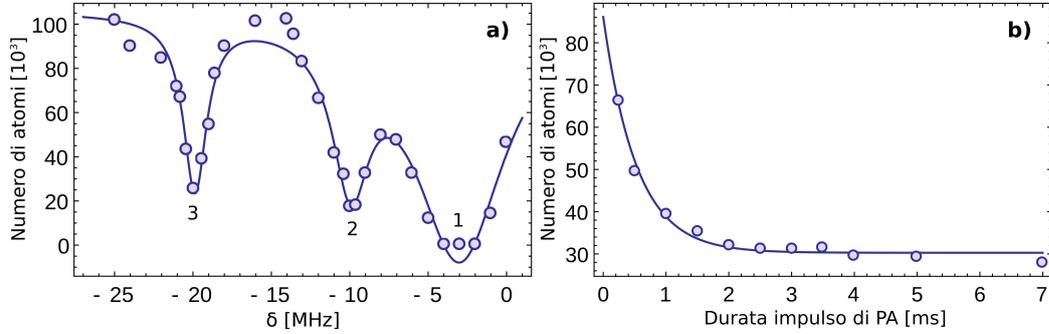


**Figura 3.7:** Spettroscopia di *clock* di un campione di atomi di  $^{174}\text{Yb}$  in un reticolo ottico 3D. **a)** Tipico spettro con i diversi picchi di risonanza, circa equispaziati, che noi attribuiamo ad uno *shift* dell'energia d'interazione dipendente dal numero di particelle contenute in ciascun sito reticolare. L'origine dell'asse orizzontale è stata scelta in corrispondenza della posizione del picco di risonanza a più alta energia. **b)** Spettroscopia di *clock* effettuata dopo l'applicazione di un impulso di fotoassociazione (PA), il quale rimuove gli atomi dai siti multiplamente occupati permettendo di identificare il picco relativo ai siti singolarmente occupati, ai quali corrisponde la transizione  $g - e$ , rimasta invariata.

Nel secondo esperimento, i cui risultati sono mostrati in figura 3.7, è stato mandato sugli atomi, prima della spettroscopia, un impulso di fotoassociazione (PA), realizzato con la radiazione a 556 nm, detunata verso il rosso rispetto alla transizione  $^1S_0 \rightarrow ^3P_1$ . L'impulso PA associa gli atomi in mole-

cole, in questo modo permette di rimuoverli dai siti multiplamente occupati lasciando un campione con solo siti singolarmente occupati.

Per selezionare la frequenza ottimale dell'impulso è stato precedentemente osservato lo spettro di fotoassociazione, riportato in figura 3.8a. Esso permette di identificare i valori del *detuning*, rispetto alla frequenza di MOT, in corrispondenza dei quali gli atomi vengono eccitati, con conseguente diminuzione del numero osservato. Tra i valori della frequenza corrispondenti ai picchi ottenuti è stata scelta quella con *detuning* maggiore, per evitare di riscaldare il campione con una radiazione prossima alla risonanza. Una volta fissata la frequenza è stata stimata anche la durata ottimale dell'impulso di fotoassociazione. In figura 3.8b è riportato il numero di atomi in funzione della durata dell'impulso di PA.

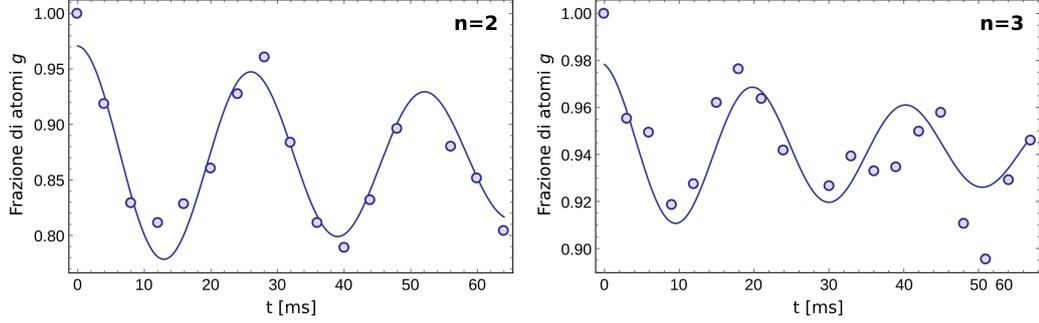


**Figura 3.8:** Fotoassociazione di un campione di atomi di  $^{174}\text{Yb}$  in un reticolo ottico 3D realizzata con un impulso di radiazione a 556 nm. **a)** Spettro di fotoassociazione: il numero di atomi è riportato in funzione del *detuning* della radiazione rispetto alla frequenza di MOT. **b)** Numero di atomi rimasti dopo l'eccitazione con l'impulso di PA in funzione della durata di quest'ultimo. La frequenza della radiazione corrisponde a quella del picco 3.

Alla luce dei risultati appena mostrati, il campione atomico è stato investito, prima della spettroscopia, da un impulso della durata di 5 ms, con frequenza tunata verso il rosso di 20 MHz rispetto a quella della MOT ed intensità pari a  $3 \text{ mW}/\text{mm}^2$ .

Come si vede in figura 3.7b l'unico picco che rimane osservabile è proprio quello ad energia più alta.

Un'ulteriore conferma delle nostre ipotesi è stata ottenuta andando a verificare la frequenza di Rabi corrispondente alle varie risonanze. Trattandosi di siti multiplamente occupati ci si aspettava un valore della frequenza maggiore rispetto a quella dei siti singolarmente occupati. In particolare, la relazione cercata è  $\Omega_n = \sqrt{n}\Omega_1$ . Ciò dipende sostanzialmente dalla simmetria della



**Figura 3.9:** Oscillazioni di Rabi dopo l'eccitazione selettiva dei siti multiplamente occupati ( $\mathbf{n}$  = numero di occupazione) di un campione di  $^{174}\text{Yb}$  in un reticolo ottico 3D profondo. La frazione di atomi  $g$  rimasti dopo l'eccitazione con l'impulso di *clock* è riportato in funzione della durata dell'impulso.

funzione d'onda bosonica.

Consideriamo il caso di un sito singolarmente occupato, lo stato iniziale sarà  $\Psi_i = |g\rangle$  e quello finale  $\Psi_f = |e\rangle$ . In risonanza, l'hamiltoniana d'interazione, considerando la *Rotating Wave Approximation*, risulta

$$H = \frac{\hbar\Omega}{2}(|g\rangle\langle e| + |e\rangle\langle g|) \quad (3.21)$$

da cui calcolando l'elemento di matrice ottengo

$$\langle\Psi_f|H|\Psi_i\rangle = \frac{\hbar\Omega}{2}\langle e|(|g\rangle\langle e| + |e\rangle\langle g|)|g\rangle = \frac{\hbar\Omega}{2}. \quad (3.22)$$

Se ora vado a considerare il caso a due atomi ho come stato iniziale  $\Psi_i = |gg\rangle$  e come stato finale in cui uno dei due atomi è eccitato  $\Psi_f = \frac{1}{\sqrt{2}}(|ge\rangle + |eg\rangle)$ . Se calcolo in questo caso l'hamiltoniana del problema e l'elemento di matrice della transizione ottengo

$$H = \frac{\hbar\Omega_2}{2} \frac{1}{\sqrt{2}}(|gg\rangle\langle eg| + |gg\rangle\langle ge| + |ge\rangle\langle gg| + |eg\rangle\langle gg|) \quad (3.23)$$

$$\langle\Psi_f|H|\Psi_i\rangle = \frac{\hbar\Omega_2}{2} \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + 1) = \frac{\hbar\Omega_2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\hbar\Omega}{2} \quad (3.24)$$

da cui ricavo  $\Omega_2 = \sqrt{2}\Omega$ .

In modo analogo per il caso a tre particelle si ottiene la frequenza  $\Omega_3 = \sqrt{3}\Omega$ .

I valori delle frequenze di Rabi, ottenuti per i picchi a due e tre particelle dalle oscillazioni riportate in figura 3.9, sono in accordo con la relazione

teorica essendo rispettivamente  $\Omega_2 = 2\pi \times (38.3 \pm 0.8) \text{ Hz} = (1.01 \pm 0.03)\sqrt{2}\Omega$  e  $\Omega_3 = 2\pi \times (49 \pm 2) \text{ Hz} = (1.05 \pm 0.05)\sqrt{3}\Omega$ . Ciò ci assicura ulteriormente di aver attribuito le varie risonanze alle giuste transizioni.

### 3.3 Stima delle lunghezze di scattering

#### 3.3.1 Lunghezza di scattering e-g

Una volta identificati i picchi di risonanza nel nostro spettro è stato possibile determinare la lunghezza di scattering  $a_{eg}$  in onda s per  $^{174}\text{Yb}$ . Per determinare questa quantità è stato misurato lo *shift* dell'energia d'interazione  $\Delta U_{eg} = U_{eg} - U_{gg}$ , ottenuto come la differenza di energia tra i centri dei picchi corrispondenti a  $n = 1$  e  $n = 2$  nello spettro di risonanza. La misura è stata effettuata variando la profondità del reticolo ottico 3D, andando così a modificare il numero di atomi e la densità del campione.

In figura 3.10 sono riportati i valori dello *shift* di energia in funzione della profondità del reticolo (punti blu). Sui dati raccolti è stato fatto un fit tenendo conto della relazione tra  $\Delta U_{eg}$  e la lunghezza di scattering  $a_{eg}$ , per due particelle nello stesso sito di un reticolo ottico:

$$\Delta U_{eg} = \frac{4\pi\hbar^2}{m}(a_{eg} - a_{gg}) \int w^4(\mathbf{r})d\mathbf{r} \quad (3.25)$$

dove  $a_{gg}$  è la lunghezza di scattering per due atomi nello stato fondamentale e le  $w(\mathbf{r})$  sono le funzioni di Wannier.

Dal fit è stata ricavata la lunghezza di scattering differenziale

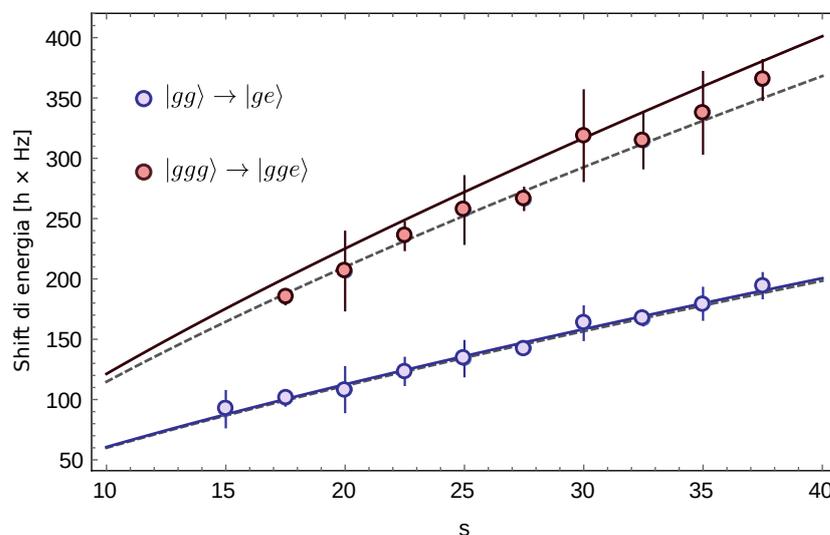
$$a_{eg} - a_{gg} = -(10.19 \pm 0.13) a_0 \quad (3.26)$$

da cui, noto il valore di  $a_{gg} = +(104.9 \pm 1.5) a_0$ , riportato in Ref.[56], è stato possibile ottenere il valore della lunghezza di scattering  $g - e$

$$a_{eg} = +(94.7 \pm 1.6) a_0 . \quad (3.27)$$

In figura 3.10 è riportato anche lo *shift* in energia del picco di a tre particelle  $n = 3$  rispetto a quello a singola particella, al variare della profondità del reticolo ottico (punti rossi). Anche da questi valori è stato possibile ricavare la lunghezza di scattering  $a_{eg}$ .

In prima analisi sono state considerate solo le interazioni a due corpi. In questo modo, l'energia di interazione delle tre particelle nello stato fondamentale corrisponde a  $3U_{gg}$ , mentre quella di due particelle nello stato fondamentale e



**Figura 3.10:** *Shift* dell'energia d'interazione della transizione di *clock* per  $n = 2$  (blu) e  $n = 3$  (rosso) atomi di  $^{174}\text{Yb}$ , relativi alla frequenza di eccitazione dell'interazione a singola particella. La linea blu rappresenta il fit sui dati sperimentali per  $n = 2$  con l'equazione (3.25). La linea rossa rappresenta l'andamento dello *shift* per  $n = 3$  calcolato, a partire dal valore di  $a_{ge}$  ottenuto dal fit precedente, considerando solo le interazioni a due corpi. Le linee tratteggiate rappresentano il fit simultaneo sui due set di dati realizzato tenendo conto della correzione all'energia, per il caso  $n = 3$ , dovuta alle interazioni "efficaci" a tre corpi (vedi anche Ref. [58]). L'accordo dei due fit sul set di dati corrispondenti a  $n=3$  può essere confrontato anche andando a considerare il valore del  $\chi^2$  che risulta pari a 10.8 per la curva continua e 3.5 per quella tratteggiata.

una nello stato eccitato è data da  $U_{gg} + 2U_{eg}$ . Di conseguenza ci si aspettava uno *shift* dell'energia d'interazione pari a

$$\Delta U_{gge} = (U_{gg} + 2U_{eg}) - 3U_{gg} = 2(U_{eg} - U_{gg}) = 2\Delta U_{eg}. \quad (3.28)$$

Tuttavia andando a graficare l'equazione, assumendo come valore di  $a_{eg}$  quello precedentemente ricavato, si ottiene la linea continua rossa in figura 3.10 che si discosta in modo evidente dai dati sperimentali.

Fin'ora è stata seguita una trattazione che considera l'interazione di contatto a due corpi per atomi nella prima banda di un reticolo ottico 3D. Questa è una buona approssimazione finché l'energia d'interazione è molto piccola rispetto al potenziale reticolare. Tuttavia, all'aumentare del numero di occupazione dei siti reticolari, l'energia d'interazione aumenta e la vicinanza delle

bande più alte introduce correzioni non trascurabili. Nel caso di  $n$  bosoni indistinguibili interagenti nello stato vibrazionale più basso di un reticolo ottico 3D è stata già introdotta e osservata sperimentalmente in Ref.[58] una correzione dell'energia di interazione legata alle interazioni elastiche "efficaci" a tre corpi, di cui va tenuto conto anche nel nostro caso.

Si ottiene, in questo modo,

$$\Delta U_{gge} = (U_{gg} + 2U_{eg}) + U_{gge} - (3U_{gg} + U_{ggg}) = 2\Delta U_{eg} + U_{gge} - U_{ggg} . \quad (3.29)$$

Seguendo la trattazione in Ref.[58] per tre particelle nello stesso stato quantistico, al primo ordine perturbativo, si ottiene la correzione all'energia d'interazione

$$\delta U_3(a, s) = \frac{\beta U_2(a, s)^2}{\hbar\omega(s)}, \quad (3.30)$$

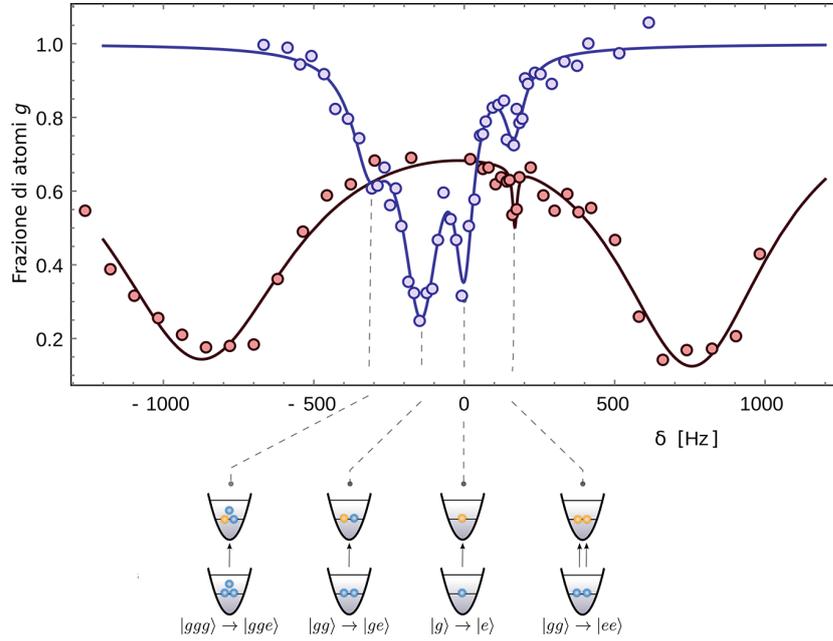
dove  $U_2(a, s)$  è l'energia di interazione a due corpi, che dipende dalla lunghezza di scattering  $a$  e dalla profondità del reticolo  $s$ ,  $\omega(s)/2\pi$  è la frequenza caratteristica del confinamento nel sito reticolare e  $\beta = -1.34$  è una costante. La formula ottenuta ci ha permesso di calcolare la correzione per l'energia d'interazione a tre particelle nello stato fondamentale:  $U_{ggg}$ . Per quanto riguarda, invece, l'energia d'interazione  $U_{gge}$ , le tre particelle interagiscono con lunghezze di scattering diverse e questo caso non rientra nell'analisi teorica di Ref.[58]. In questo caso è stata fatta un'assunzione usando l'equazione (3.30) e considerando come lunghezza di scattering efficace  $a_{gge}$  la media geometrica  $(a_{gg}a_{eg}a_{eg})^{1/3}$ .

A questo punto è stato possibile fare un fit simultaneo dei due set di dati sperimentali (in rosso ed in blu) con l'equazione (3.29), che descrive  $\Delta U_{gge}$  tenendo conto sia delle interazioni a due corpi che di quelle a tre corpi. In questo caso la funzione mostra un buon accordo con i dati sperimentali, come si può vedere dalle linee tratteggiate nella figura 3.10.

Dal fit si è potuta ricavare la lunghezza di scattering differenziale  $a_{eg} - a_{gg} = -(10.08 \pm 0.05) a_0$ , che risulta consistente con il valore precedentemente trovato e, al tempo stesso, supporta l'assunzione di validità dell'approccio di Ref.[58] al caso di tre atomi in stati interni diversi.

### 3.3.2 Lunghezza di scattering e-e

Nei nostri spettri andando ad aumentare l'accoppiamento con la transizione di *clock* è stato possibile osservare la presenza di un ulteriore picco, a più alta energia rispetto a quello di singola particella, con una distanza in frequenza  $\Delta f_{ee} \simeq 160$  Hz nelle misure effettuate con profondità di reticolo  $s = 30$ , come si può vedere dai dati in blu in figura 3.11.



**Figura 3.11:** Spettroscopia d'orologio, a singola frequenza (blu) e a doppia frequenza (rosso), di un campione di  $^{174}\text{Yb}$  intrappolato nel reticolo ottico 3D con  $s = 30$ . Nel primo spettro è possibile osservare, a *detuning* positivo, un debole picco di risonanza corrispondente al processo a due particelle e a due fotoni  $|gg\rangle \rightarrow |ee\rangle$ . L'identificazione di questo picco è confermata dalla presenza di una piccola risonanza alla stessa frequenza nello spettro in rosso, ottenuto inviando sul campione due impulsi contemporanei a frequenze  $f - \delta f$  e  $f + \delta f$ . Notiamo che lo spettro a doppia frequenza è stato acquisito eccitando il campione con un impulso d'intensità maggiore ( $\sim 50 \text{ mW}/\text{mm}^2$ ), in modo da rendere il debole picco a due fotoni più visibile. Per questo motivo la struttura delle due *side-band* a singolo fotone non risultano risolte a causa dell'allargamento per potenza.

Per ottenere questo spettro è stato fissato il campo magnetico esterno a 54.7 G ed è stato inviato sul campione un impulso di *clock* d'intensità  $\sim 10 \text{ mW}/\text{mm}^2$  e durata 1500 ms.

Abbiamo associato questa risonanza all'interazione a due fotoni  $|gg\rangle \rightarrow |ee\rangle$ , nella quale due particelle nello stato fondamentale, intrappolate nello stesso sito reticolare, vengono eccitate nello stato  $|ee\rangle$ .

Per verificare che si trattasse di un'interazione a due fotoni abbiamo effettuato una misura di spettroscopia a doppia frequenza andando ad eccitare il campione simultaneamente con due impulsi di *clock* a frequenza diversa  $f_{+,-} = f \pm \delta f$  con differenza fissata pari a  $\delta f = 800 \text{ Hz}$ .

In figura 3.11 è riportato lo spettro in funzione di  $f$ . Ai lati dello spettro è possibile osservare due repliche dello spettro di assorbimento a singolo fotone, spostate in frequenza rispettivamente di  $+\delta f$  e  $-\delta f$ , come ci si aspettava. Al centro dello spettro si può invece osservare il picco a due fotoni, la cui posizione risulta invariata rispetto a quella della spettroscopia a singola frequenza. Trattandosi di un'eccitazione a due fotoni due particelle nello stato fondamentale e nello stesso sito reticolare possono assorbire simultaneamente due fotoni, con frequenza rispettivamente  $f + \delta f$  e  $f - \delta f$ , così che l'energia totale trasferita al sistema è  $2hf$  esattamente come nel caso di due fotoni assorbiti con eccitazione a singola frequenza.

Una volta identificato il picco è stato possibile determinare lo *shift* dell'energia di interazione  $\Delta U_{ee} = U_{ee} - U_{gg}$  dalla legge di conservazione dell'energia  $2hf_{ee} = \Delta U_{ee}$ , e da questa, in modo analogo a quanto visto nel paragrafo precedente, ricavare la lunghezza di scattering  $a_{ee}$  andando a sfruttare la relazione

$$\Delta U_{ee} = \frac{4\pi\hbar^2}{m}(a_{ee} - a_{gg}) \int w^4(\mathbf{r})d\mathbf{r}. \quad (3.31)$$

La frequenza differenziale del picco a due fotoni è stata stimata mediando i valori ottenuti in diverse misurazioni, a profondità di reticolo media  $s = 29.3 \pm 0.3$ , ed è risultata essere  $f_{ee} = (166 \pm 10)$  Hz. Da qui, calcolando lo *shift* di energia e sfruttando l'equazione (3.31) è stato possibile ricavare la lunghezza di scattering differenziale

$$a_{ee} - a_{gg} = +(21.8 \pm 1.8) a_0. \quad (3.32)$$

Nota  $a_{gg} = +(104.9 \pm 1.5) a_0$  si è potuto ricavare la lunghezza di scattering  $ee$

$$a_{ee} = +(126.7 \pm 2.3) a_0. \quad (3.33)$$

In tabella 3.1 riportiamo un riepilogo delle lunghezze di scattering in onda  $s$  ottenute per i diversi canali di interazione esaminati.

### 3.4 Collisioni inelastiche

Come già osservato in altri esperimenti su atomi a due elettroni eccitati con la transizione di *clock* [22, 23, 25, 24], le collisioni a due corpi  $e - g$  ed  $e - e$  possono avere un carattere fortemente inelastico a causa dell'elevata energia interna degli atomi nello stato  $e$ , che può essere rilasciata nella collisione sotto forma di energia cinetica acquistata dagli atomi, che vengono quindi persi dalla trappola. Conoscere i coefficienti di decadimento associati a questi processi è importante, ad esempio per l'applicazione di questi atomi ad

Canale di scattering	Valore misurato
$a_{gg}$	$+(104.9 \pm 1.5)$
$a_{eg}$	$+(94.7 \pm 1.6)$
$a_{ee}$	$+(126.7 \pm 2.3)$
$a_{eg} - a_{gg}$	$-(10.19 \pm 0.13)$
$a_{ee} - a_{gg}$	$+(21.8 \pm 1.8)$

Tabella 3.1: Riepilogo delle lunghezze di scattering in onda s per i diversi canali di interazione del  $^{174}\text{Yb}$  relativi agli stati  $g = {}^1S_0$  e  $e = {}^3P_0$  (valori espressi in unità di raggio di Bohr  $a_0$ ). Mentre il valore di  $a_{gg}$  era già noto in letteratura (Ref.[56]), i valori di  $a_{eg}$  e  $a_{ee}$  sono stati misurati per la prima volta nel corso di questa tesi.

esperimenti di simulazione quantistica; per questo motivo l'ultima parte delle nostre misure è dedicata alla loro stima.

In questa fase è stato necessario implementare un metodo per poter misurare gli atomi nello stato eccitato metastabile  ${}^3P_0$ . A tale scopo è stata utilizzata una sorgente laser a 1389 nm che ci ha permesso di ripompare gli atomi nello stato metastabile verso il livello  ${}^3D_1$ , dal quale possono decadere verso ciascuno degli  ${}^3P_J$ , con  $J = 0, 1, 2$ . A questo punto gli atomi caduti nel  ${}^3P_1$  possono decadere nello stato fondamentale  ${}^1S_0$  e in questo modo possono essere misurati. Per quanto riguarda gli altri stati, quelli nel  ${}^3P_0$  vengono ripompati per un nuovo ciclo e riescono comunque ad arrivare nel  ${}^3P_1$ , quelli, invece, nel  ${}^3P_2$  sono persi, ma, essendo molto piccolo il *branching ratio* per questo livello<sup>3</sup>, il loro numero è molto limitato e ciò ci permette di avere un'alta efficienza di ripompaggio senza doverli recuperare.

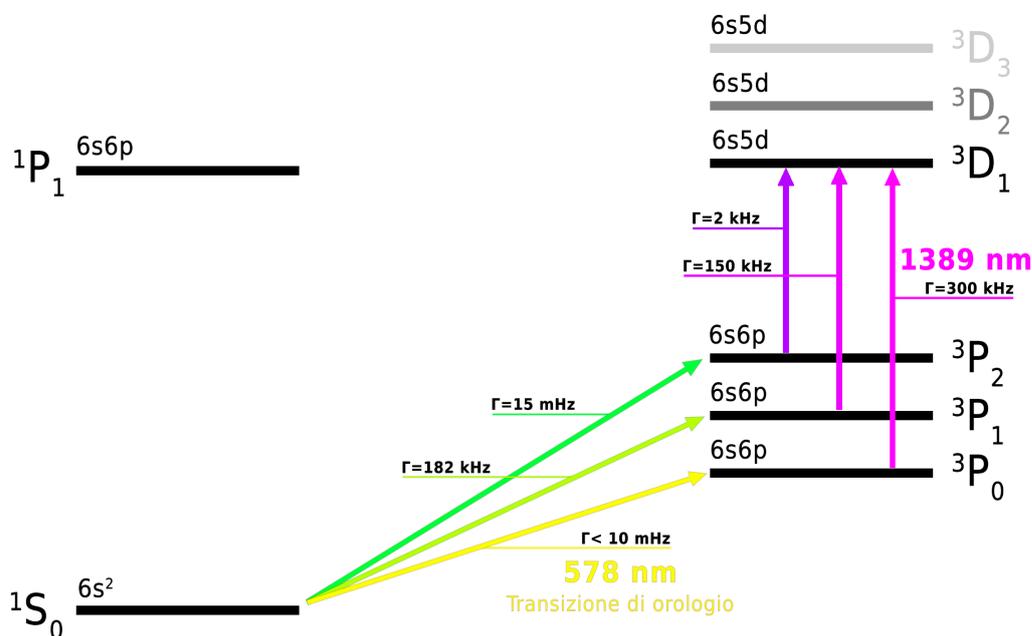
### 3.4.1 Ottimizzazione del processo di repump

La sorgente di *repump* è un laser a diodo NTTElectronics NLK1E5EAAA con uscita in fibra e potenza 10 mW. La frequenza di emissione è regolata con un laser driver agendo sulla corrente di alimentazione e sulla temperatura.

Per sfruttare adeguatamente la radiazione è stato innanzi tutto necessario trovare le condizioni di lavoro per essere in risonanza con la transizione desiderata. La lunghezza d'onda della transizione corrisponde a 1388.71 nm, e di conseguenza la frequenza risulta 215870450 MHz.

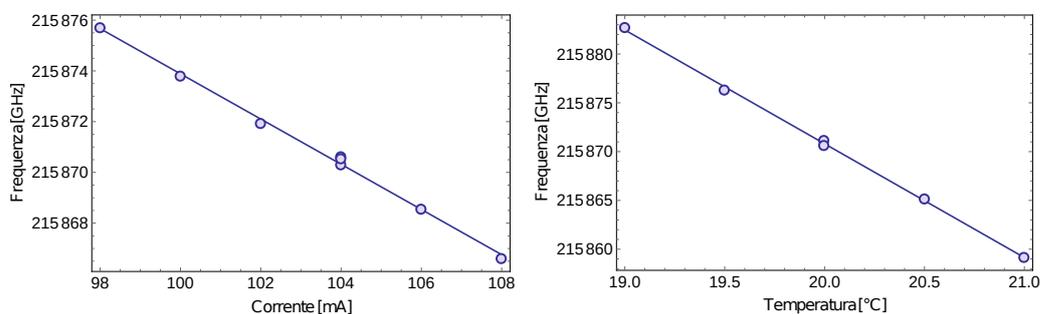
Per prima cosa è stato necessario caratterizzare l'emissione del laser in funzione di corrente e temperatura.

<sup>3</sup>Il *branching ratio* per il decadimento dallo stato  ${}^3D_1$  verso  ${}^3P_{0,1,2}$  è approssimativamente 60:3:1 [57]



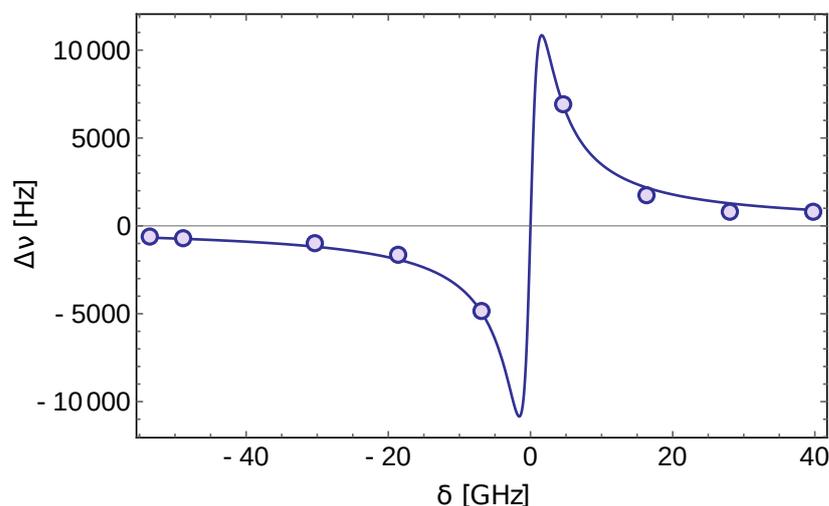
**Figura 3.12:** Schema dei primi livelli eccitati dell'Itterbio e delle principali transizioni ottiche coinvolte nel processo di *repump* per la misura degli atomi nello stato eccitato  $^3P_0$ .

In figura 3.13 è riportato l'andamento della frequenza di emissione, misurata con un  $\lambda$ -meter, in funzione delle due variabili. Tramite un fit lineare è possibile ricavare i parametri per regolare la frequenza agendo su corrente e temperatura.



**Figura 3.13:** Caratterizzazione dell'emissione del laser a diodo a  $1389\text{ nm}$ , utilizzato per il processo di *rempump*, in funzione della corrente e della temperatura.

Il setup del fascio di ripompa è stato realizzato opportunamente in modo tale da investire il campione lungo la direzione di uno dei fasci di reticolo ottico del piano orizzontale e da localizzare il *waist* del fascio al centro del campione stesso.



**Figura 3.14:** Spostamento in frequenza del picco di assorbimento della transizione di *clock* per un campione di atomi di  $^{174}\text{Yb}$  in un reticolo ottico 3D in funzione del *detuning* del laser di *repump*, selezionato modificando la temperatura. La linea continua rappresenta la funzione descritta dall'equazione (3.34), per una scelta opportuna dei parametri, che descrive l'andamento teorico atteso.

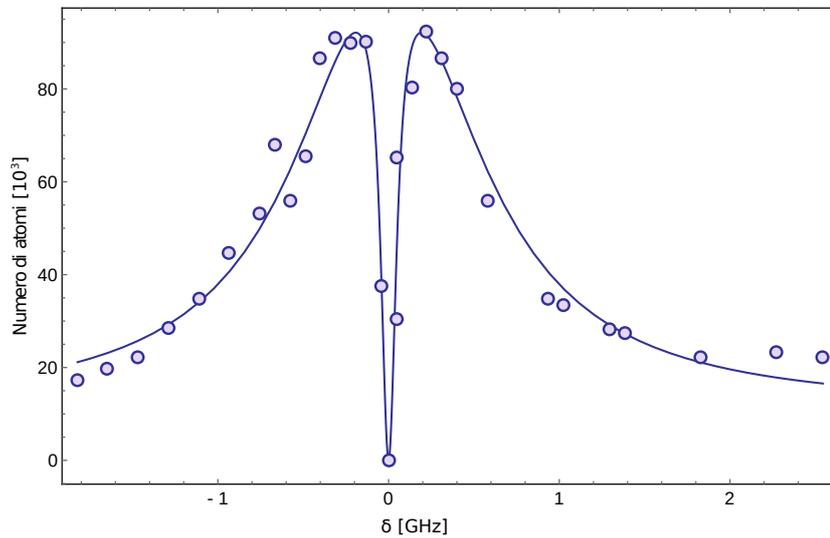
Per provare l'effetto del laser sul campione abbiamo effettuato una prima misura inviando un impulso di *repump* in contemporanea al fascio di spettroscopia di *clock*. La radiazione a 1389 nm, detunata di una certa quantità  $\delta$  rispetto alla frequenza di risonanza produce uno spostamento in energia dei livelli atomici noto come *light shift*, che abbiamo già introdotto nella sezione 3.1.

Questo effetto può essere osservato in figura 3.14, dove è riportato lo spostamento in frequenza del picco di assorbimento della transizione d'orologio in funzione del *detuning* del laser di ripompa, modificato agendo sulla temperatura. I punti sperimentali sono le frequenze di risonanza ottenute da fit di spettri simili a quelli di figura 3.3. Nota l'espressione del potenziale di dipolo in funzione del detuning, vista in equazione (1.2), per lo spostamento in frequenza ci si aspetta un andamento del tipo:

$$\Delta\nu_{clock} = A\delta \log \left[ 1 + \frac{B}{(\delta^2 + C)} \right]. \quad (3.34)$$

In questa misura il controllo sulla temperatura non ci ha permesso di variare finemente la frequenza di emissione e per questo i dati sperimentali sono troppo pochi per permetterci di realizzare un fit. Tuttavia in figura 3.14 è riportato come guida per gli occhi, con la linea continua, l'andamento descritto dall'equazione (3.34), che per un'opportuna scelta dei parametri che mostra un buon accordo con i valori misurati.

Questa prima misura ci ha permesso di localizzare la frequenza di risonanza con una precisione dell'ordine di alcuni GHz, che però non è sufficiente. Quindi abbiamo raffinato la misura facendo una scansione della frequenza su un intervallo più fine variando la corrente (sulla quale il controllo è migliore), ed andando ad osservare l'effetto del laser a 1389 nm sulla transizione di *clock*, mostrato in figura 3.15.



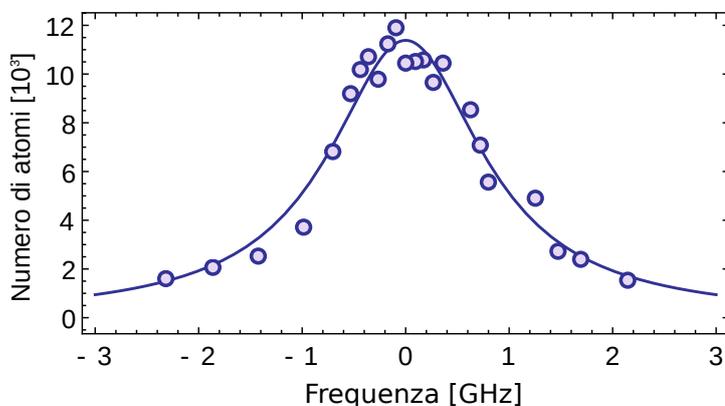
**Figura 3.15:** Spettroscopia di *clock* di un campione di atomi di  $^{174}\text{Yb}$  in un reticolo ottico 3D in presenza della radiazione di ripompa a 1389 nm ottenuto al variare del *detuning* di quest'ultima. La misura è stata effettuata con un impulso giallo d'intensità  $\simeq 10 \text{ mW/mm}^2$  e durata 150 ms in presenza di un campo magnetico di  $\simeq 175 \text{ G}$ . La frequenza del laser di repump è regolata agendo sulla corrente di alimentazione del laser. Sui dati sperimentali è stato fatto un fit con due lorentziane centrate nella risonanza,  $\delta = 0$ .

La misura è stata fatta applicando un campo magnetico di  $\simeq 175 \text{ G}$  ed inviando contemporaneamente l'impulso di ripompa ed un impulso di luce laser a 578 nm di intensità  $\simeq 10 \text{ mW/mm}^2$  e durata 150 ms. Lo spettro è ottenuto mantenendo la radiazione di *clock* alla frequenza di risonanza e variando la frequenza di *repump*, regolando la corrente di alimentazione

del laser. Come si può osservare dalla figura per valori grandi di  $\delta$  l'effetto del laser di *clock* non subisce modifiche e gli atomi vengono in buona parte eccitati al livello  $^3P_0$  dove non possono essere rilevati. Man mano però che la frequenza di ripompa si avvicina al valore di risonanza il fascio provoca un *light shift* della transizione di *clock*, determinando una progressiva riduzione della frazione di atomi eccitati. Infine, in corrispondenza della risonanza, a  $\delta = 0$ , il *light shift* si annulla, come visto già in figura 3.14, di conseguenza la radiazione a 578 nm torna ad essere risonante e ciò produce il *dip* al centro dello spettro.

I dati sperimentali possono essere fittati una funzione empirica data dalla somma di due lorentziane con ampiezze di segno opposto e centrate alla stessa frequenza, corrispondente alla risonanza del laser di *repump*, come riportato in figura.

Una volta ottimizzata la frequenza di *repump* a 1389 nm abbiamo potuto fare una misura degli atomi del livello eccitato ripompanti nello stato fondamentale. Per fare questo abbiamo preso un campione, caricato nel reticolo 3D, con soli siti singolarmente occupati, ottenuto inviando un impulso di PA (come visto nel paragrafo 3.2.1), ed abbiamo applicato un impulso giallo della durata di 30 ms seguito da un impulso di *repump* di 1 ms durante il tempo di volo.



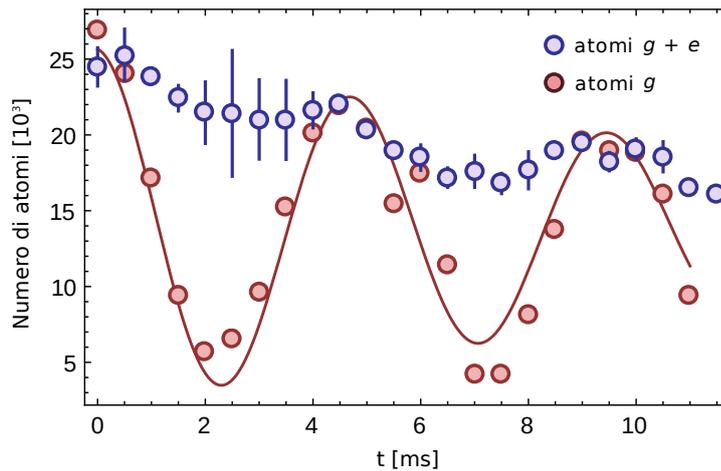
**Figura 3.16:** Misura degli atomi del livello eccitato  $^3P_0$  di un campione di  $^{174}\text{Yb}$  in un reticolo ottico 3D in funzione del *detuning* della radiazione a 1389 nm sfruttata per ripomparli nello stato fondamentale. La misura è stata effettuata su campioni con soli siti singolarmente occupati, ottenuti inviando un impulso di PA, sui quali è stata inviato un impulso giallo della durata di 30 ms seguito da un impulso di *repump* di 1 ms durante il tempo di volo.

Il numero di atomi in funzione della frequenza del fascio a 1389 nm è ripor-

tato in figura 3.16. Sapendo che il numero di atomi nello stato fondamentale prima dell'impulso di clock corrispondeva a  $\sim 27 \times 10^3$  atomi, si può osservare un'efficienza di *repump* intorno al 50%. Dallo spettro in figura si può anche osservare la larghezza di riga del laser di repump che risulta corrispondere a pochi GHz.

Facendo varie prove successive con diverse durate degli impulsi è stato possibile individuare le condizioni ottimali per raggiungere la massima efficienza di *repump* da poter sfruttare per le nostre misure.

L'efficacia del processo di ripomping può essere verificata anche osservando l'effetto dell'impulso a 1389 nm sulle oscillazioni di Rabi della transizione  $^1S_0 \rightarrow ^3P_0$ . In figura 3.17 sono riportate delle oscillazioni di Rabi realizzate con massima potenza del laser di *clock* (13 mW) e con il massimo campo magnetico ottenibile  $\simeq 205$  G. Le misure sono state effettuate su un campione con soli siti singolarmente occupati ottenuto inviando sulla nube atomica un impulso PA.

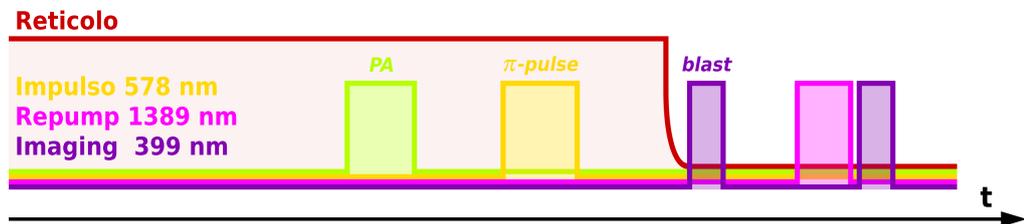


**Figura 3.17:** Oscillazioni di Rabi ottenute eccitando un campione di atomi di  $^{174}\text{Yb}$  in un reticolo ottico 3D con soli siti singolarmente occupati, realizzato inviando un impulso di PA, in assenza ed in presenza del fascio di *repump*. Il numero di atomi *g* rimasti dopo l'eccitazione con l'impulso di *clock* è riportato in funzione della durata dell'impulso. I punti in rosso si riferiscono al set di misure effettuate mantenendo il laser di *repump* tappato. I punti in blu, invece, riportano il numero totale degli atomi in *g* e degli atomi in *e* ripompatisi nello stato fondamentale attraverso un impulso di *repump* della durata di 7.5 ms subito prima dell'*imaging*.

I punti in rosso sono relativi alle oscillazioni di Rabi degli atomi dello stato

fondamentale eccitate mantenendo il *repump* tappato. La frequenza di Rabi risultante è di  $208 \pm 4$  Hz. I dati sperimentali in blu sono ottenuti invece inviando un impulso di *repump* della durata di 7.5 ms dopo l'eccitazione, subito prima dell'*imaging*. Come si può osservare i dati mostrano una buona efficienza di ripompaggio in quanto, in presenza dell'impulso di *repump*, le oscillazioni appaiono quasi completamente sopresse e gli atomi vengono riportati nello stato iniziale. All'aumentare della durata dell'eccitazione di *clock* il numero di atomi sembra decadere, come evidenziato anche dalla linea blu continua in figura, riportata come guida per gli occhi. Tuttavia, in corrispondenza dei massimi dell'oscillazione di Rabi i valori per i due set di dati sono sempre in accordo. Ciò dimostra che l'efficienza di ripompaggio si mantiene costante e che la perdita di atomi risulta indotta da qualcosa di indipendente dal processo. Una possibile causa di questo andamento potrebbe essere la presenza di collisioni inelastiche legate ad un residuo di atomi in siti doppiamente occupati non rimossi dalla PA, che però vengono persi dopo le prime oscillazioni a causa dei decadimenti veloci associati ai processi  $g - e$  ed  $e - e$ , come vedremo in seguito.

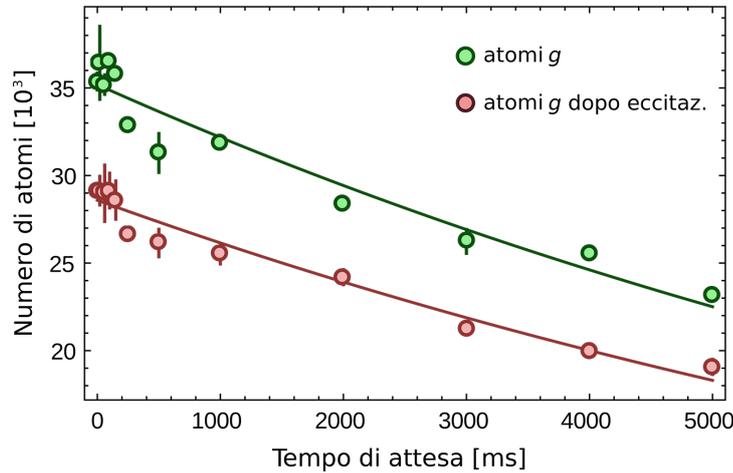
Dalle oscillazioni di Rabi osservate è stato possibile ricavare anche la durata dell'impulso di *clock* corrispondente ad un  $\pi$ -pulse. In questo modo, a partire da un campione caricato nel reticolo 3D con soli siti singolarmente occupati è possibile eccitare con l'impulso  $\pi$  gli atomi nello stato  $e$ . Per essere sicuri di avere solo atomi nello stato fondamentale inviamo un impulso di *blast* di luce di imaging della durata di  $100 \mu\text{s}$  in modo da rimuovere eventuali atomi rimasti nel livello  $g$ , seguito da 2 ms di attesa per permettere agli atomi, scaldati dall'impulso, di diluirsi ed essere non più rivelabili nell'*imaging* finale. A questo punto gli atomi eccitati vengono ripompati nello stato fondamentale inviando il fascio a 1389 nm per pochi ms e dove possono essere misurati facendo, subito dopo, il solito *imaging* sul campione. La sequenza sperimentale usata è schematizzata in figura 3.18. L'efficacia di ripompaggio ottenuta in questo modo è circa del 90%.



**Figura 3.18:** Sequenza sperimentale utilizzata per misurare gli atomi nel livello  $^3P_0$  ripompati nello stato fondamentale sfruttando la radiazione a 1389 nm. Si veda il testo per maggiori dettagli.

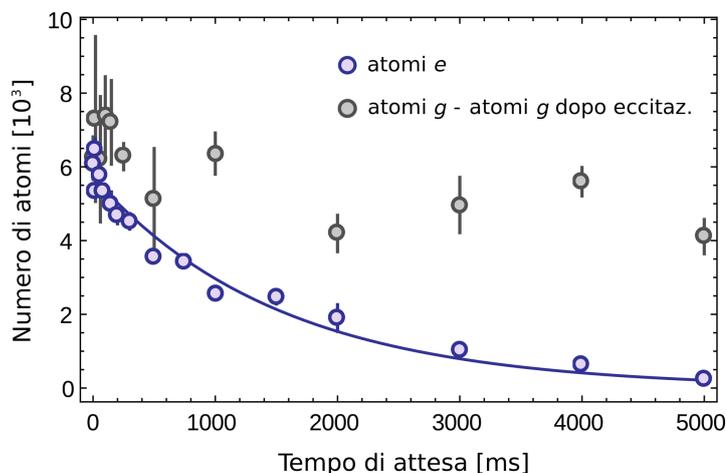
### 3.4.2 Collisioni inelastiche $e - g$

Per prima cosa abbiamo cercato di caratterizzare le collisioni inelastiche  $e - g$  tenendo il campione nel reticolo ottico 3D con una profondità di  $s \simeq 29.7$ . Per indagare al meglio le interazioni a due particelle abbiamo massimizzato il numero di siti doppiamente occupati e minimizzato, allo stesso tempo, il numero degli altri siti multiplamente occupati. Per farlo abbiamo fissato opportunamente il tempo di attesa in trappola e in reticolo. Il campione è stato eccitato con un  $\pi$ -pulse di orologio della durata di 10 ms selettivamente risonante con la transizione  $|gg\rangle \rightarrow |eg\rangle$  ed è stato misurato il numero di atomi negli stati  $e$  e  $g$  al variare del tempo di attesa nel reticolo. I valori misurati per gli stati  $g$  ed  $e$  sono riportati rispettivamente in figura 3.19 e figura 3.20.



**Figura 3.19:** Collisioni inelastiche  $e - g$  analizzate eccitando in modo selettivo la transizione  $|gg\rangle \rightarrow |eg\rangle$  nel reticolo ottico 3D ( $s = 27.5$ ). Il numero di atomi rimasti nello stato fondamentale dopo l'impulso di *clock* (rosso) è confrontato con quello degli atomi  $g$  in assenza di eccitazione (verde), entrambi in funzione del tempo di attesa nel reticolo (il lento decadimento dei punti in verde è determinato dal tempo di vita limitato associato all'intrappolamento degli atomi nel reticolo). Le linee continue sono fit esponenziali dei dati sperimentali.

Il figura 3.19 il numero di atomi nello stato fondamentale (in rosso) è confrontato con quello in assenza dell'impulso di eccitazione verso lo stato  $e$  (in verde). Le linee continue sono fit esponenziali. I tempi di decadimento ricavati dai due fit (rispettivamente  $(11 \pm 1)$  s e  $(11.2 \pm 0.8)$  s) risultano compatibili entro le barre di errore e presumibilmente legati in entrambi i casi al tempo di vita finito degli atomi intrappolati nel reticolo.



**Figura 3.20:** Collisioni inelastiche  $e - g$  analizzate eccitando in modo selettivo la transizione  $|gg\rangle \rightarrow |eg\rangle$  nel reticolo ottico 3D ( $s = 27.5$ ). Il numero di atomi misurati nello stato eccitato (blu) è riportato in funzione del tempo di attesa nel reticolo dopo l'eccitazione della transizione. Questo numero è confrontato con la differenza tra i valori misurati per il numero di atomi nello stato fondamentale in presenza e in assenza dell'impulso d'eccitazione (grigio), il cui valore risulta in buona approssimazione indipendente dal tempo. La linea blu continua è un fit esponenziale dei dati sperimentali.

Gli atomi nello stato eccitato  $e$ , riportati in blu in figura 3.20, mostrano un decadimento su una scala temporale più veloce, dell'ordine del secondo. Questo andamento è confrontato in figura con la differenza tra il numero di atomi nello stato  $g$  in assenza e in presenza dell'impulso di eccitazione (in grigio). A tempi brevi si può osservare che la differenza coincide proprio con il numero di atomi nello stato eccitato, come ci si aspettava. Tuttavia a tempi dell'ordine di 1 s il numero di atomi nello stato  $e$  diminuisce, mentre la differenza tra i due casi visti per gli atomi  $g$  rimane all'incirca costante. Ciò ci suggerisce che il decadimento osservato per gli atomi eccitati non sia legato alle collisioni inelastiche con gli atomi nello stato fondamentale, altrimenti i due andamenti sarebbero stati confrontabili. Il *rate* di decadimento degli atomi nello stato  $e$  può essere stimato facendo un fit esponenziale sui dati raccolti, si ottiene così

$$\gamma = 1/\tau = (0.66 \pm 0.06)\text{s}^{-1}. \quad (3.35)$$

La frequenza ottenuta è confrontabile con il *rate* di *tunneling*  $\sim 1$  Hz alla profondità scelta per il reticolo. Di conseguenza durante la nostra osservazione

gli atomi  $e$  che inizialmente si trovavano in siti reticolari con atomi  $g$  possono essersi spostati in siti vicini con un'altra particella  $e$  e essere così andati persi attraverso collisioni inelastiche  $e - e$ . Tuttavia da questa misura non è possibile estrarre informazioni sui tempi di decadimento per i processi  $e - e$ , in quanto i tempi della dinamica osservata sono profondamente determinati dai tempi del *tunneling* che precede le interazioni.

Dalla misura effettuata è comunque possibile ottenere un limite superiore per il coefficiente di decadimento delle collisioni inelastiche  $e - g$ . Le perdite a due corpi  $e - g$  possono essere descritte dall'equazione

$$\dot{n}_g = -\beta_{eg}n_en_g = -\gamma_{eg}n_g \quad (3.36)$$

dove  $\beta_{eg}$  è il coefficiente di decadimento dipendente dalla densità. Richiedendo che  $\gamma_{eg} = \beta_{eg}n_e \ll \gamma$  e calcolando la densità nei siti reticolari  $n_e$  delle funzioni di Wannier nel reticolo 3D, si ottiene

$$\beta_{eg} \ll 10^{-14} \text{ cm}^3/\text{s} . \quad (3.37)$$

### 3.4.3 Collisioni inelastiche $e - e$

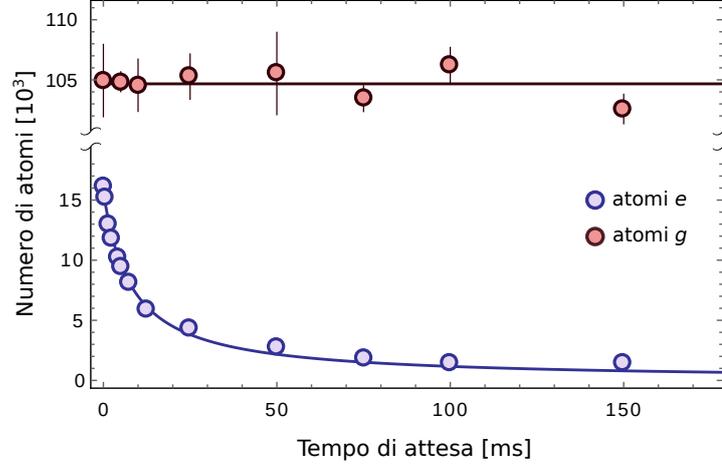
Per determinare il rate di decadimento associato alle collisioni inelastiche  $e - e$  è stato necessario fare una misura diversa. Innanzitutto non è stato possibile eccitare in modo selettivo un numero rilevante di atomi nello stato  $ee$  inviando un  $\pi$ -pulse sul campione, probabilmente a causa della larghezza ridotta del picco di risonanza a due fotoni  $|gg\rangle \rightarrow |ee\rangle$  (osservato in sezione 3.3.2). Si è scelto quindi di utilizzare un approccio diverso andando a modificare la geometria del sistema.

Per queste misure il campione è stato caricato in un reticolo 1D di profondità  $s = 27.5$ , realizzando così una pila di *pancakes* 2D con una frequenza di trappola radiale  $\omega = 2\pi \times 34.5$  Hz. Il campione veniva eccitato con un impulso di *clock* di 10 ms, diretto lungo il piano dei *pancakes* e successivamente ripompato seguendo il procedimento illustrato nel paragrafo precedente.

In figura 3.21 è riportato il numero di atomi negli stati eccitato e fondamentale per vari tempi di attesa in reticolo dopo l'eccitazione. Gli atomi  $e$ , rappresentati in blu, mostrano un decadimento veloce sulla scala dei ms, mentre la popolazione  $g$  rimane costante. Su questa scala temporale sappiamo, dalla misura precedente, che le collisioni  $e - g$  risultano trascurabili, perciò possiamo concludere che il *rate* di decadimento sia unicamente legato alle collisioni inelastiche  $e - e$ .

Le perdite a due corpi  $e - e$  possono essere descritte dall'equazione

$$\dot{n}_e = -\beta_{ee}n_e^2 \quad (3.38)$$



**Figura 3.21:** Numero di atomi  $e$  (blu) e  $g$  (rosso) in funzione del tempo di attesa in un reticolo 1D dopo l'eccitazione con un impulso di *clock*. La linea rossa rappresenta il valore medio degli atomi  $g$ , mentre la linea blu è il risultato del fit sui dati sperimentali di  $e$  realizzato seguendo il modello dell'equazione (3.39), assumendo come valore della densità quello ottenuto dall'equazione (3.40).

la cui soluzione è data da

$$n_e(t) = \left( \frac{1}{n_{e0}} - \beta_{ee}t \right)^{-1} \quad (3.39)$$

dove  $n_e(t)$  è la densità degli atomi  $e$  nei *pancakes*,  $n_{e0}$  è la densità iniziale e  $\beta_{ee}$  è il coefficiente di decadimento a due corpi.

Per ricavare la costante  $\beta_{ee}$  è stato necessario calcolare la densità atomica nei *pancakes*, per questo è stato utilizzato un modello teorico semplificato del nostro problema.

Consideriamo il numero iniziale di atomi nel campione  $N_{g0} \simeq 180 \times 10^3$  e la densità nella trappola ottica di dipolo. Per prima cosa calcoliamo il numero di atomi in ogni *pancake* assumendo che la distribuzione della popolazione non si modifichi durante il caricamento in reticolo.<sup>4</sup> Consideriamo, inoltre, la densità come somma della frazione condensata ( $\sim 20\%$ ) del campione e di quella termica, per la quale la temperatura misurata risulta  $T_P \simeq 45$  nK. Calcoliamo le densità medie in ogni *pancake* e da queste ricaviamo la densità media globale del campione  $n_{g0}$ , prima dell'eccitazione, facendo la media

<sup>4</sup>Questa assunzione è giustificata se la dinamica di perdita è più veloce della dinamica di riequilibrio del campione atomico in seguito alla diminuzione del numero di atomi, che avviene su una scala di tempo associabile al periodo di oscillazione di trappola.

pesata sulla distribuzione.

Assumendo una relazione lineare tra il numero di atomi e la densità, la densità  $n_e(t)$  degli stati  $e$  dopo l'eccitazione di *clock* risulta

$$n_e(t) = \frac{n_{g0}}{N_{g0}} N_e(t) \quad (3.40)$$

dove  $N_e(t)$  è il numero di atomi misurati nello stato eccitato. A questo punto, usando questa relazione, possiamo convertire il numero di atomi misurato in una densità  $n_e(t)$  e fare un fit sui nostri dati sperimentali con l'equazione (3.39), da cui si ricava il coefficiente di decadimento

$$\beta_{ee} = (1.3 \pm 0.7) \times 10^{-11} \text{ cm}^3/\text{s} \quad (3.41)$$

al quale abbiamo attribuito un'incertezza del 50% come una stima conservativa a causa delle molteplici assunzioni del nostro modello teorico.

In figura 3.21 è riportato il fit sui dati sperimentali (linea blu), nel quale le densità atomiche sono state convertite in numero di atomi invertendo la relazione (3.40).

### 3.5 Conclusioni

In questo capitolo sono state riportate le misure di spettroscopia ad alta risoluzione realizzate su campioni ultrafreddi d'Itterbio bosonico  $^{174}\text{Yb}$ , intrappolati in un reticolo ottico 3D ed eccitati sfruttando la transizione d'orologio ultrastretta  $^1S_0 \rightarrow ^3P_0$ . Le caratteristiche metrologiche di quest'ultima ci hanno permesso di analizzare l'occupazione dei vari siti reticolari, ottenendo degli spettri con picchi risolti corrispondenti all'eccitazione dei diversi processi  $|(n)g\rangle \rightarrow |(n-1)ge\rangle$ , con  $n$  numero di atomi per sito reticolare.

Grazie alla nostra risoluzione spettroscopica abbiamo potuto misurare con precisione lo *shift* delle energie di interazione, in funzione della profondità di reticolo, da cui sono state derivate le lunghezze di scattering per le collisioni  $e-g$  ed  $e-e$  in atomi ultrafreddi d'Itterbio  $^{174}\text{Yb}$ , prima sconosciute.

I risultati ottenuti costituiscono un passo importante per lo sviluppo di orologi atomici basati su isotopi bosonici di atomi a due elettroni, i quali, grazie alla bassa sensibilità ai campi magnetici e alla semplicità della struttura interna per l'assenza di spin nucleare, potrebbero rappresentare una vantaggiosa alternativa ai sistemi attuali che sfruttano atomi fermionici. Inoltre, le misure realizzate possono essere molto importanti per le applicazioni nell'ambito della simulazione quantistica e dell'informazione quantistica.

Successivamente, abbiamo indagato gli effetti delle collisioni inelastiche che coinvolgono gli atomi nello stato  $e$ . Abbiamo visto come il tempo di

vita appaia estremamente limitato per le perdite  $e - e$ , mentre nel canale  $e - g$  non sono state osservate collisioni inelastiche compatibilmente con i nostri tempi di osservazione e con la sensibilità del sistema sperimentale. I risultati ottenuti sono d'interesse anche per la simulazione quantistica: ad esempio nell'investigazione di modelli a due componenti di Bose-Hubbard con differente mobilità delle specie, come nel caso dello studio della fisica delle impurità (un reticolo *state-dependent* può essere usato per congelare il moto degli atomi nello stato  $e$  in modo da inibire le perdite inelastiche) o nel caso della realizzazione di modelli di reticoli dissipativi considerano le perdite  $e - e$ .

I risultati sperimentali ottenuti in questo lavoro di tesi, per la loro novità, sono in pubblicazione sulla rivista scientifica *New Journal of Physics* in Ref.[60] .

Misure simili sono state effettuate dal gruppo BEC del *Laboratoire Kastler Brossel* e sono mostrate nell'articolo [61], pre-pubblicato durante la stesura di questo elaborato.

I valori riportati per le lunghezze di *scattering* corrispondono a  $a_{eg} = (86 \pm 11) a_0$  e  $a_{ee} = (102 \pm 25) a_0$ . Essi risultano confrontabili, all'interno dell'errore sperimentale, con i risultati da noi ottenuti, anche se mostrano un'incertezza sulle misure molto più elevata. Ciò è legato alla nostra capacità di realizzare misure di spettroscopia ad alta risoluzione, grazie alla ridotta larghezza di riga del nostro laser di *clock*, che ci permette di osservare picchi di spettroscopia più stretti di circa un fattore 10 rispetto a quelli dell'articolo [61].

Per quanto riguarda invece le misure dei coefficienti di decadimento per le collisioni inelastiche, in [61] sono riportati i risultati  $\beta_{eg} \leq 10^{-15} \text{ cm}^3/\text{s}$  e  $\beta_{ee} = (2.6 \pm 0.3) \text{ cm}^3/\text{s}$ . Il valore presentato per le collisioni  $e - g$  costituisce, come nel nostro caso, solo un limite superiore a causa dell'impossibilità di osservare il decadimento sulla scala temporale dell'esperimento.

I risultati ottenuti per le collisioni  $e - e$ , invece, risultano confrontabili, ma le nostre misure presentano un'incertezza stimata molto maggiore. Ciò è dovuto sostanzialmente al diverso approccio sperimentale che abbiamo dovuto seguire: in [61], infatti, tutte le misure sono state effettuate su atomi intrappolati nel reticolo 3D, nel nostro caso invece, come illustrato in sezione 3.4, non è stato possibile svolgere questa misura in quanto la potenza laser della sorgente di spettroscopia non era sufficiente per preparare il campione nello stato iniziale in tempi compatibili con la dinamica del sistema. Per questo motivo abbiamo realizzato le misure in un reticolo ottico 1D nel quale il processo di decadimento risultava abbastanza lento da poter essere osservato. Tuttavia per questo sistema la stima del coefficiente di decadimento risulta più complicata rispetto al caso di un reticolo 3D. A differenza di quest'ultimo, infatti, la stima della densità atomica del campione non può essere

### 72 3 Spettroscopia con transizione di orologio su un BEC di $^{174}\text{Yb}$

ottenuta considerando semplicemente le funzioni di Wannier, ma necessita di un modello teorico con varie approssimazioni. Ciò introduce necessariamente un'incertezza sulla misura piuttosto rilevante.

# Capitolo 4

## Basi teoriche sulla duplicazione di frequenza

In questo capitolo vengono illustrate le basi teoriche fondamentali per la realizzazione sperimentale del nuovo sistema laser, sviluppato nell'ambito di questo lavoro di tesi, sfruttando il fenomeno della duplicazione di frequenza. Nella sezione 4.1 vengono presentate alcune nozioni di base di ottica non lineare necessarie per introdurre il fenomeno della generazione di seconda armonica, che verrà approfondito nella sezione 4.2. Uno sguardo particolare va alla condizione di *phase matching*, fondamentale per il processo di duplicazione, che verrà trattata nella sezione 4.3. Infine, nella sezione 4.4, vengono descritte le caratteristiche di una cavità di risonanza *bow-tie* e le condizioni che permettono di sfruttarla per migliorare l'efficienza del processo di duplicazione.

### 4.1 Ottica non lineare

L'ottica non lineare studia i fenomeni relativi a mezzi le cui proprietà ottiche, come la polarizzazione, non dipendono linearmente dal campo elettrico che si propaga al loro interno [62]. Per campi elettrici molto intensi, infatti, la polarizzazione del mezzo si può esprimere in modo generale come:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t) &= \mathbf{P}^{(1)}(t) + \mathbf{P}^{(2)}(t) + \mathbf{P}^{(3)}(t) + \dots = \\ &= \epsilon_0 [\chi^{(1)} \mathbf{E}(t) + \chi^{(2)} \mathbf{E}^2(t) + \chi^{(3)} \mathbf{E}^3(t) + \dots] \end{aligned} \quad (4.1)$$

dove  $\epsilon_0$  è la costante dielettrica del vuoto,  $\chi^{(1)}$  è la suscettività lineare e le  $\chi^{(i)}$  con  $i \neq 1$  sono le suscettività di ordine  $i$ -esimo. Sono proprio le componenti di ordine superiore al primo che danno origine a componenti del campo elettrico oscillanti a frequenze diversa da quella del campo incidente.

Consideriamo, a questo proposito, un campo incidente su un mezzo non lineare con  $\chi^{(2)} \neq 0$  costituito da due componenti di frequenza diversa:

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_1 e^{-i\omega_1 t} + \mathbf{E}_2 e^{-i\omega_2 t} + c.c. . \quad (4.2)$$

La polarizzazione al secondo ordine sarà:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{(2)}(t) &= \epsilon_0 \chi^{(2)} \mathbf{E}^2(t) = \\ &= \epsilon_0 \chi^{(2)} (|\mathbf{E}_1|^2 e^{-i2\omega_1 t} + |\mathbf{E}_2|^2 e^{-i2\omega_2 t} + 2\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 e^{-i(\omega_1 + \omega_2)t} + \\ &\quad + 2\mathbf{E}_1^* \mathbf{E}_2 e^{i(\omega_1 - \omega_2)t} + c.c.) + 2\chi^{(2)} (|\mathbf{E}_1|^2 + |\mathbf{E}_2|^2) \end{aligned} \quad (4.3)$$

che può essere espressa come

$$\mathbf{P}^{(2)}(t) = \sum_n \mathbf{P}(\omega_n) e^{-i\omega_n t} . \quad (4.4)$$

Le varie componenti in frequenza della polarizzabilità non lineare possono essere classificate in tre tipi:

- $P(2\omega)$ : termini oscillanti a frequenza doppia rispetto alla radiazione incidente che danno luogo alla generazione di seconda armonica (SHG),
- $P(\omega_1 \pm \omega_2)$ : termini oscillanti a frequenza somma o differenza delle frequenze della radiazione incidente che danno luogo, rispettivamente, ai fenomeni di generazione somma e differenza (SFG e DFG),
- $P(0)$ : termine costante non oscillante che dà luogo al fenomeno della rettificazione ottica.

Affrontiamo ora una trattazione più formale: consideriamo il campo elettrico incidente ed andiamo a scriverlo separandone le componenti in frequenza

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \sum_n \mathbf{E}(\omega_n) e^{-i\omega_n t} \\ &= \sum_n \mathbf{A}(\omega_n) e^{i(\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r} - \omega_n t)} \end{aligned} \quad (4.5)$$

dove  $\mathbf{A}(\omega_n)$  è l'ampiezza della componente a frequenza  $\omega_n$ . La stessa notazione può essere usata per scrivere la polarizzazione

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \sum_n \mathbf{P}(\omega_n) e^{-i\omega_n t} . \quad (4.6)$$

Possiamo ora definire le componenti del tensore suscettività del secondo ordine  $\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_n + \omega_m, \omega_n, \omega_m)$  come le costanti di proporzionalità che legano l'ampiezza della polarizzazione non lineare con il prodotto delle ampiezze del campo, secondo la relazione:

$$P_i(\omega_n + \omega_m) = \epsilon_0 \sum_{jk} \sum_{(nm)} \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_n + \omega_m, \omega_n, \omega_m) E_j(\omega_n) E_k(\omega_m) \quad (4.7)$$

dove gli indici  $ijk$  si riferiscono alle componenti cartesiane dei campi, mentre la notazione  $(nm)$  indica la somma di tutti i modi in cui  $\omega_n$  e  $\omega_m$  possono combinarsi lasciando fisso il valore  $\omega_n + \omega_m$ .

Consideriamo ora l'interazione di tre onde di frequenza  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  e  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ . Per determinare le polarizzazioni  $\mathbf{P}(\omega_i)$  con  $i = 1, 2, 3$  dobbiamo determinare sei tensori:

$$\begin{array}{ccc} \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_1, \omega_3, -\omega_2) & \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_1, -\omega_2, \omega_3) & \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_2, \omega_3, -\omega_1) \\ \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_2, -\omega_1, \omega_3) & \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_3, \omega_1, \omega_2) & \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_3, \omega_2, \omega_1) \end{array} \quad (4.8)$$

e altri sei in cui ogni frequenza è rimpiazzata dal suo opposto ( $\omega_i \rightarrow -\omega_i$  e  $-\omega_i \rightarrow \omega_i$ ).

La suscettività dielettrica può essere stimata sfruttando la teoria classica di Lorentz per la quale un atomo del mezzo può essere considerato come un oscillatore armonico sottoposto ad una forzante esterna sinusoidale. Seguendo la teoria è possibile dare una descrizione delle proprietà ottiche dei mezzi, compresi i fenomeni non lineari. In particolare si può dimostrare che un mezzo ha una suscettività del secondo ordine non nulla se non è centro-simmetrico, ovvero se, come effetto della forzante esterna, ciascun atomo del mezzo è soggetto ad un potenziale non simmetrico in qualche direzione in cui compaiano delle potenze dispari della componente spaziale. Infatti, nel caso di mezzi centro-simmetrici la funzione potenziale contiene solo potenze pari e come conseguenza di questo il primo ordine non lineare della suscettività dielettrica del mezzo risulta essere il terzo ( $\chi^{(2)} = 0$ ).

Nelle espressioni (4.8) dei tensori ogni indice  $i, j, k$  può corrispondere indipendentemente a ciascuna delle coordinate  $x, y, z$ . Di conseguenza, ciascuno dei 12 tensori può avere 27 componenti cartesiane, per un totale di 324 diversi numeri complessi da determinare per poter descrivere l'interazione. Tuttavia, il numero di incognite può essere notevolmente ridotto supponendo il mezzo privo di perdite ed andando a sfruttare le simmetrie di questi tensori: la realtà dei campi elettrici e delle polarizzazioni, la simmetria di permutazione intrinseca, la realtà della suscettività di secondo ordine, la simmetria di permutazione totale e la simmetria di Kleinmann [62].

Possiamo quindi introdurre il tensore

$$d_{ijk} = \frac{1}{2} \chi_{ijk}^{(2)} \quad (4.9)$$

nel quale, per semplicità, abbiamo soppresso gli argomenti. Esso ci permette di riscrivere la polarizzazione non lineare come

$$P_i(\omega_n + \omega_m) = \epsilon_0 \sum_{jk} \sum_{(nm)} 2d_{ijk} E_j(\omega_n) E_k(\omega_m). \quad (4.10)$$

Tenendo conto della simmetria di Kleinman possiamo ulteriormente semplificare la notazione assumendo che  $d_{ijk}$  sia simmetrico negli ultimi due indici e introducendo la forma contratta  $d_{il}$  con le seguenti corrispondenze:

$$\begin{array}{l} jk : \quad 11 \quad 22 \quad 33 \quad 23, 32 \quad 31, 13 \quad 12, 21 \\ l : \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \end{array} \quad (4.11)$$

Ne risulta una matrice  $d_{il}$   $3 \times 6$  che può essere scritta come:

$$d = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{16} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{14} & d_{12} \\ d_{15} & d_{24} & d_{33} & d_{23} & d_{13} & d_{14} \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

in cui compaiono solo 10 incognite indipendenti, che possono essere ulteriormente ridotte andando a considerare le simmetrie del cristallo.

Vediamo ora come le componenti della polarizzazione a frequenza diversa da quella incidente possano agire da sorgenti per nuove componenti del campo elettrico. Per fare questo consideriamo la forma dell'equazione di un'onda che si propaga in un mezzo non lineare. Partiamo dalle equazioni di Maxwell nei mezzi in unità SI

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \end{aligned} \quad (4.13)$$

dove  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ . Assumiamo che il materiale sia non magnetico ( $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ ) e di trovarci in una regione dello spazio in cui non vi siano correnti o cariche libere ( $\mathbf{J} = 0$ ,  $\rho = 0$ ). Con queste condizioni, facendo l'approssimazione di onde piane ( $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ ) si può ricavare l'equazione delle onde:

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r})}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}(\mathbf{r})}{\partial t^2}. \quad (4.14)$$

Considerando lo sviluppo della polarizzabilità  $\mathbf{P} = \epsilon_0\chi^{(1)}\mathbf{E} + \mathbf{P}^{(2)}$  e derivando rispetto al tempo si ottiene per ciascuna componente del campo a frequenza  $\omega_n$  l'equazione:

$$\nabla^2 \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) + \frac{\omega_n^2}{c^2} \epsilon(\omega_n) \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) = -\frac{\omega_n^2}{\epsilon_0 c^2} \mathbf{P}_n^{(2)}(\mathbf{r}) \quad (4.15)$$

con  $\epsilon = 1 + 4\pi\chi^{(1)}$  costante dielettrica lineare del mezzo.

Grazie questa equazione si vede come la risposta non lineare del mezzo agisca da sorgente di campo elettrico. Da qui possiamo partire per descrivere in modo quantitativo il processo di generazione di seconda armonica e le sue caratteristiche.

## 4.2 Generazione di seconda armonica

Come anticipato uno dei processi non lineari legati alla suscettività di ordine due è la generazione di seconda armonica (SHG). In questo caso l'equazione (4.10) può essere scritta, usando la notazione contratta  $d_{il}$  come:

$$\mathbf{P}(2\omega) = 2\epsilon_0 \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{31} & d_{21} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{32} & d_{14} & d_{12} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{23} & d_{13} & d_{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x^2(\omega) \\ E_y^2(\omega) \\ E_z^2(\omega) \\ 2E_y(\omega)E_z(\omega) \\ 2E_x(\omega)E_z(\omega) \\ 2E_x(\omega)E_y(\omega) \end{bmatrix}. \quad (4.16)$$

Per una geometria fissata (cioè fissate le direzioni di propagazione e la polarizzazione del campo elettrico) è possibile esprimere la polarizzazione non lineare che dà origine alla generazione di seconda armonica attraverso la relazione scalare

$$P(2\omega) = 2\epsilon_0 d_{eff} E^2(\omega) \quad (4.17)$$

dove  $d_{eff}$  è il coefficiente non lineare efficace.

Consideriamo ora un cristallo lungo  $L$ , con coefficiente non lineare efficace  $d_{eff}$  che viene illuminato da un'onda di frequenza  $\omega_1$  incidente lungo la direzione  $z$ . Come abbiamo visto all'interno del cristallo si genera una seconda componente del campo elettrico oscillante alla frequenza  $\omega_2 = 2\omega_1$ . Il campo totale nel mezzo risulta quindi

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{E}_1(z, t) + \mathbf{E}_2(z, t) \quad (4.18)$$

dove ciascuna componente può essere scritta nella forma

$$\mathbf{E}_i(z, t) = \mathbf{A}_i(z) e^{i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{z} - \omega_i t)} + c.c. \quad (4.19)$$

con  $k_i = n_i \omega_i / c$  e  $n_i^2 = \epsilon(\omega_i)$ . Supponiamo che per ciascuna di esse valga l'equazione delle onde (4.15) in forma scalare. Anche la polarizzazione non lineare può essere scritta in modo analogo

$$\mathbf{P}^{(2)}(z, t) = \mathbf{P}_1(z, t) + \mathbf{P}_2(z, t) \quad (4.20)$$

con componenti

$$\mathbf{P}_n(z, t) = \mathbf{P}_n(z) e^{-i\omega_n t} + c.c. \quad (4.21)$$

Si può dimostrare [62] che, sostituendo nell'equazione (4.15) le soluzioni (4.19) e l'espressione (4.17) per il contributo non lineare, e facendo l'approssimazione di campi debolmente variabili

$$\left| \frac{d^2 A_n}{dz^2} \right| \ll \left| k_n \frac{dA}{dz} \right| \quad (4.22)$$

si ricavano le seguenti equazioni per le ampiezze dei campi elettrici incidente e di seconda armonica:

$$\frac{dA_1}{dz} = \frac{2i\omega_1^2 d_{eff}}{k_1 c^2} A_2 A_1^* e^{-i\Delta k z} \quad (4.23)$$

$$\frac{dA_2}{dz} = \frac{i\omega_2^2 d_{eff}}{k_2 c^2} A_1^2 e^{i\Delta k z} \quad (4.24)$$

dove  $\Delta k = 2k_1 - k_2$  è detto "*momentum mismatch*" e gioca un ruolo fondamentale nel processo di duplicazione, come vedremo nella sezione successiva. Per risolvere queste equazioni è conveniente esprimere le ampiezze in una forma adimensionale introducendo le nuove variabili  $u_1(z)$  e  $u_2(z)$  tramite le relazioni:

$$A_1(z) = \sqrt{\frac{I}{2n_1 \epsilon_0 c}} u_1(z) e^{i\phi_1(z)} \quad (4.25)$$

$$A_2(z) = \sqrt{\frac{I}{2n_2 \epsilon_0 c}} u_2(z) e^{i\phi_2(z)} \quad (4.26)$$

dove è stata introdotta l'intensità totale  $I = I_1 + I_2$ , ricordando che l'intensità di ciascuna componente è legata all'ampiezza da  $I_i = 2n_i \epsilon_0 c |A_i|^2$ .

Sapendo che l'intensità totale è invariante durante la propagazione, e che per le nuove variabili vale la proprietà

$$u_1^2(z) + u_2^2(z) = 1, \quad (4.27)$$

si possono ricavare le equazioni:

$$\frac{du_1}{d\xi} = u_1(z) u_2(z) \sin \theta \quad (4.28)$$

$$\frac{du_2}{d\xi} = -u_1^2(z) \sin \theta \quad (4.29)$$

$$\frac{d\theta}{d\xi} = \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \log(u_1^2 u_2) \right] \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \Delta s \quad (4.30)$$

dove:

- $\xi = z/l$  con  $l = \sqrt{\frac{2n_1^2 n_2}{\epsilon_0 c I}} \frac{c}{2\omega_1 \text{def}}$  è la lunghezza caratteristica dell'interazione,
- $\theta = 2\phi_1 - \phi_2 + \Delta k z$  è la fase relativa dei campi,
- $\Delta s = \Delta k l$  è il *momentum mismatch* normalizzato.

Nel caso di perfetto *phase matching* in cui  $\Delta s = 0$ , differenziando l'ultima equazione si ottiene

$$\frac{d}{d\xi} \log(u_1^2 u_2 \cos \theta) = 0 \quad (4.31)$$

grazie alla quale possiamo definire la quantità conservata

$$\Gamma = u_1^2 u_2 \cos \theta . \quad (4.32)$$

Sfruttando le quantità conservate (4.27) e (4.32) è possibile disaccoppiare le equazioni (4.28) - (4.29) - (4.30), ottenendo ad esempio per l'ampiezza della seconda armonica:

$$\frac{du_2^2}{d\xi} = \pm 2[(1 - u_2^2)^2 u_2^2 - \Gamma^2] \quad (4.33)$$

le cui soluzioni possono essere espresse in termini delle funzioni ellittiche di Jacobi.

Le soluzioni diventano particolarmente semplici nel caso in cui  $\Gamma = 0$ . Ciò si verifica quando  $\theta = 0$ , cioè le componenti iniziali sono in fase. In questo caso la (4.33) assume la forma più semplice

$$\frac{du_2}{d\xi} = 1 - u_2^2 \quad (4.34)$$

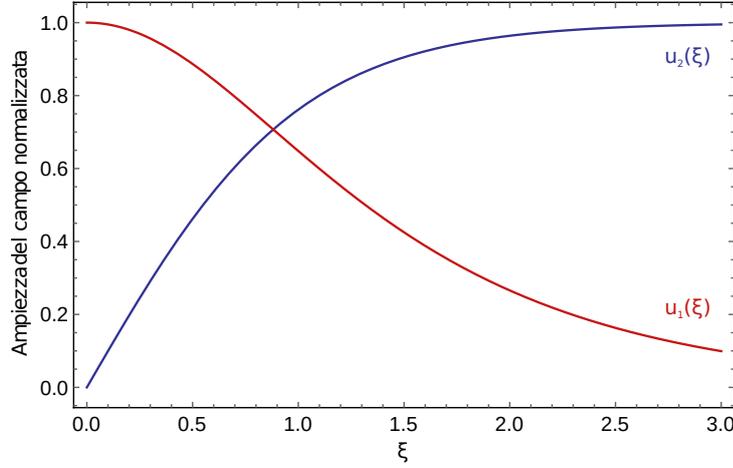
la cui soluzione è

$$u_2 = \tanh \xi . \quad (4.35)$$

Sfruttando la (4.27) si può ricavare immediatamente anche l'ampiezza dell'onda fondamentale:

$$u_1 = \text{sech } \xi . \quad (4.36)$$

Le due soluzioni sono mostrate graficamente in figura 4.1.



**Figura 4.1:** Ampiezze dei campi fondamentale  $u_1$  e di seconda armonica  $u_2$  in funzione della distanza di propagazione per la condizione di perfetto *phase matching*.

### 4.3 Phase matching

Il processo di SHG risulta veramente efficiente se è soddisfatta la condizione di *phase matching*  $\Delta k = 0$ . Ciò è evidente andando a ricavare l'espressione che dà l'intensità della radiazione emessa a frequenza  $\omega_2$ . Partendo dall'equazione (4.24) si può ricavare l'ampiezza del campo in uscita dal mezzo non lineare integrando tra  $z = 0$  a  $z = L$  e da essa ottenere l'espressione dell'intensità:

$$I_2 = \frac{4d_{eff}^2 \omega_2^2 I_1^2}{n_1^2 n_2 \epsilon_0 c^2} L^2 \frac{\sin^2(\Delta k L/2)}{(\Delta k L/2)}. \quad (4.37)$$

Da questa espressione è evidente come nel caso in cui sia  $\Delta k \neq 0$  l'efficienza del processo diminuisca drasticamente. Per questo motivo è opportuno cercare di soddisfare la condizione  $2k_1 = k_2$ , che può essere anche scritta come:

$$\frac{2n(\omega_1)\omega_1}{c} = \frac{n(\omega_2)\omega_2}{c}. \quad (4.38)$$

Questa condizione può essere ottenuta facilmente andando a utilizzare cristalli birifrangenti, ovvero cristalli che presentano indici di rifrazione differenti a seconda della direzione di polarizzazione della luce incidente, detti ordinario ( $n_o$ ) e straordinario ( $n_e$ ). In questo modo si può avere

$$n_{e,o}(\omega_1) = n_{o,e}(2\omega_1). \quad (4.39)$$

La radiazione di seconda armonica ottenibile risulta ortogonale a quella di pompa.

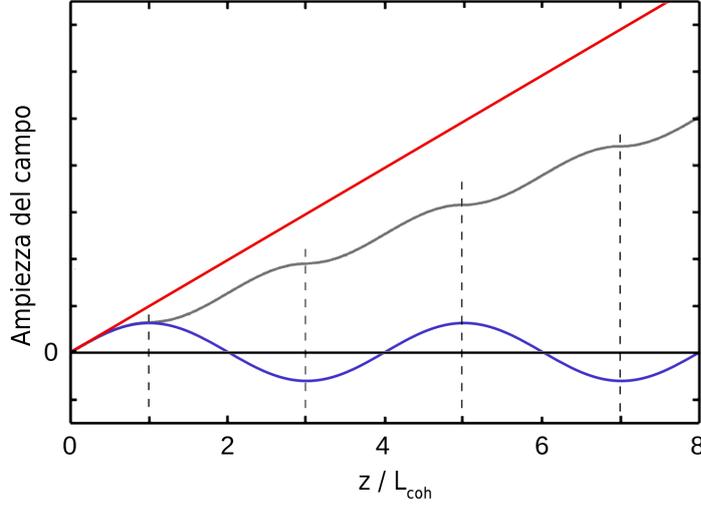
Questo tipo di *phase matching* viene detto di tipo I. Il tipo II indica invece i processi in cui si hanno due frequenze diverse in ingresso, polarizzate in modo ortogonale. Ovviamente la radiazione a frequenza più alta, nel nostro caso  $\omega_2$ , deve essere polarizzata nella direzione a cui corrisponde il minor indice di rifrazione tra quello ordinario e quello straordinario. La condizione di birifrangenza può essere controllata andando, ad esempio, a modificare l'angolo di incidenza della radiazione in quanto l'indice di rifrazione straordinario dipende proprio da quest'ultimo, secondo la relazione:

$$\frac{1}{n_e^2(\theta)} = \frac{\sin^2 \theta}{n_s^2} + \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2} \quad (4.40)$$

dove  $n_s$  è il valore principale dell'indice di rifrazione straordinario e  $\theta$  è l'angolo di incidenza tra la direzione di propagazione e l'asse ottico. Tuttavia, per valori  $\theta$  diversi da 0 e 90 gradi, il vettore di Pointing e il vettore d'onda della radiazione che si propaga con indice straordinario non sono più paralleli. Di conseguenza le direzioni dei fasci ordinario e straordinario vanno a divergere nel cristallo, e ciò diminuisce l'efficienza del processo. Per questo motivo è preferibile fissare l'angolo di incidenza ad uno dei due valori ottimali ed andare a cercare la condizione di *phase matching* regolando la temperatura del cristallo, dato che quest'ultima influenza fortemente la birifrangenza.

Vi sono però occasioni in cui non è possibile raggiungere la condizione di *phase matching*, in questo caso è possibile ricorrere alla tecnica del *quasi-phase-matching*. Questa si basa sull'utilizzo di un cristallo non lineare, chiamato *periodically poled* dotato di una struttura periodica in cui il coefficiente non lineare responsabile della SHG ( $d_{eff}$ ) cambia di segno con la periodicità. Questa alternanza periodica del segno di  $d_{eff}$  riesce a compensare, in media, il *mismatch* non nullo  $\Delta k$ .

In figura 4.2 è illustrata la natura di questo fenomeno. La curva rossa della figura mostra come, in condizione di perfetto *phase matching*, il campo elettrico di seconda armonica cresca linearmente con la distanza di propagazione. In caso di *mismatch* invece, come mostra la curva blu, l'ampiezza del campo oscilla periodicamente passando da un valore massimo ad un valore minimo su una distanza pari a due volte la lunghezza di coerenza  $L_{coh}$ , che corrisponde alla distanza dopo la quale il campo di seconda armonica si trova in opposizione di fase rispetto a quello generato inizialmente e dà luogo ad interferenza distruttiva. Nel caso di *quasi-phase-matching*, come mostrato dalla curva grigia, assumendo che il periodo del cristallo sia  $\Lambda = 2L_{coh}$ , ogni volta che l'ampiezza del campo comincia a diminuire per effetto del *mismatch*, l'inversione del segno di  $d_{eff}$  fa sì che continui a crescere in modo monotono.



**Figura 4.2:** Confronto della variazione spaziale dell'ampiezza del campo di seconda armonica per tre diverse condizioni di *phase matching*. La curva in rosso corrisponde alla condizione di perfetto *phase matching*, per la quale l'ampiezza cresce linearmente con la distanza di propagazione. La curva blu rappresenta il caso in cui  $\Delta k \neq 0$  e quindi l'ampiezza oscilla periodicamente con la distanza. Infine, la curva grigia corrisponde al caso di *quasi-phase-matching* ottenuta impiegando un cristallo *periodically poled* con un periodo pari a due volte la lunghezza di coerenza: in questa condizione l'ampiezza del campo cresce in modo monotono con la distanza anche se meno rapidamente rispetto al caso di perfetto *phase matching*. L'immagine è presa da [62].

Vediamo adesso una breve descrizione matematica del fenomeno. Introduciamo la dipendenza spaziale del coefficiente non lineare  $d(z)$  che possiamo rappresentare con un'onda quadra:

$$d(z) = d_{eff} \text{sign}(\cos 2\pi z/\Lambda) . \quad (4.41)$$

La dipendenza spaziale del coefficiente non lineare va a modificare le equazioni delle ampiezze per i campi. Per svolgere i conti è conveniente andare a riscrivere  $d(z)$  in termini di serie di Fourier:

$$d(z) = d_{eff} \sum_{m=-\infty}^{\infty} G_m e^{ik_m z} \quad (4.42)$$

dove  $k_m = 2\pi m/\Lambda$  e  $G_m = (2/m\pi) \sin(m\pi/2)$ . Andando ad introdurre la dipendenza spaziale del coefficiente nelle equazioni delle ampiezze (4.23) e

(4.24) si ottiene

$$\frac{dA_1}{dz} = \frac{2i\omega_1^2 d_Q}{k_1 c^2} A_2 A_1^* e^{-i(\Delta k_Q - 2k_m)z} \quad (4.43)$$

$$\frac{dA_2}{dz} = \frac{i\omega_2^2 d_Q}{k_2 c^2} A_1^2 e^{i\Delta k_Q z} \quad (4.44)$$

dove  $d_Q = d_{eff} G_m$ , e  $\Delta k_Q = 2k_1 - k_2 + k_m$  è il *mismatch* del vettore d'onda di ordine  $m$ . Dato che le componenti  $G_m$  diminuiscono con  $m$  possiamo approssimare lo sviluppo di Fourier al primo ordine  $m = 1$  per il quale  $d_Q = d_{eff} G_1 = d_{eff} 2\pi/\Lambda$  e ottenere

$$\Delta k_Q = 2k_1 - k_2 + 2\pi/\Lambda . \quad (4.45)$$

Da quest'ultima relazione si può ricavare il periodo di *poling* ottimale per la condizione di *phase matching*, che corrisponde a:

$$\Lambda = 2\pi/(2k_1 - k_2) . \quad (4.46)$$

## 4.4 Generazione di seconda armonica in cavità

L'efficienza del processo di duplicazione, anche in condizione di *phase matching*, può risultare piuttosto bassa; per questo motivo è conveniente incrementare la potenza incidente sul cristallo non lineare posizionandolo all'interno di una cavità risonante.

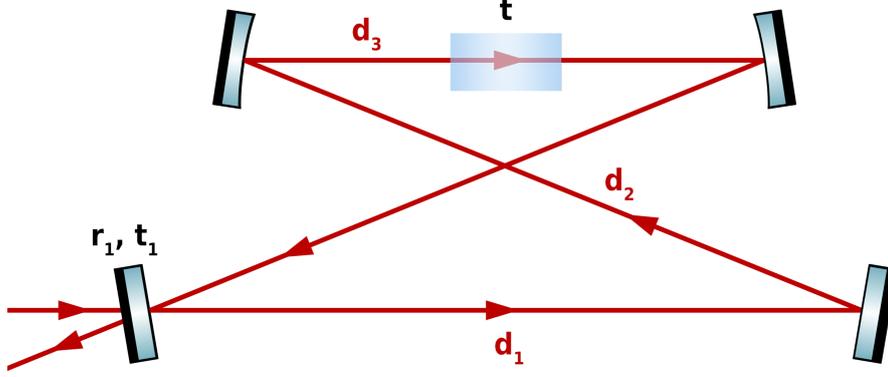
### 4.4.1 Cavità *bow-tie*

Un tipo di cavità che si presta molto bene per i nostri scopi è la cavità ad anello in configurazione detta *symmetrical bow-tie*, rappresentata in figura 4.3. Si tratta di una cavità composta da quattro specchi: due piani e due sferici con stesso raggio di curvatura posizionati in modo tale che essa risulti simmetrica rispetto ad un piano verticale passante a metà tra questi. La cavità ad anello è usata solitamente perché ha minori retro-riflessioni e la radiazione circolante produce un singolo fascio SHG anziché due fasci contropropaganti come accade nel caso di una *standing wave cavity*.

Consideriamo un fascio gaussiano, che si propaga lungo la direzione  $z$ , d'intensità

$$I(z, r) = I_0 \left( \frac{w_0}{w(z)} \right)^2 \exp \left( \frac{-2r^2}{w^2(z)} \right) \quad (4.47)$$

dove  $r$  è la coordinata radiale,  $I_0 = I(0, 0)$ ,  $w_0$  è il *waist* del fascio, ovvero il raggio minimo che si ha in corrispondenza di  $z = 0$ , e  $w(z) = w_0 \sqrt{1 + (z/z_R)^2}$



**Figura 4.3:** Rappresentazione schematica della cavità *bow-tie* con all'interno un mezzo dispersivo con coefficiente di trasmissione  $t$ . Sono anche riportati i coefficienti di riflessione e trasmissione dello specchio d'ingresso.

è il raggio del fascio nel punto  $z$ , con  $z_R = n\pi w_0^2/\lambda$  lunghezza di Rayleigh (distanza per la quale  $w(z) = \sqrt{2}w_0$ ).

Introduciamo anche il parametro complesso

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R} - i \frac{\lambda}{n\pi w^2} \quad (4.48)$$

con  $R$  raggio di curvatura e  $n$  indice di rifrazione del mezzo in cui la radiazione si propaga. Questo parametro contiene tutta l'informazione necessaria per lo studio della propagazione del fascio ed il suo andamento con la distanza  $z$  dal centro del fascio è descritto da

$$q(z) = q_0 + z = i \frac{n\pi w_0^2}{\lambda} + z. \quad (4.49)$$

Fissate le distanze tra gli specchi come riportato in figura 4.3, è possibile calcolare la matrice di propagazione in cavità e ricavare, seguendo la trattazione in [63], le condizioni di stabilità:

$$R \leq d_3 \leq \frac{R(d_1 + d_2)}{d_1 + 2d_2 - R}. \quad (4.50)$$

Data la simmetria della cavità avremo due *waist*: uno posizionato a metà tra gli specchi curvi  $w_0^{(up)}$  e l'altro a metà tra gli specchi piani  $w_0^{(down)}$ . Seguendo

la trattazione per le cavità ad anello [63] si trova che il loro valore, e quello delle lunghezze di Rayleigh corrispondenti, può essere stimato usando:

$$\begin{aligned} w_0^{2(up)} &= \frac{\lambda R \sqrt{g_1 g_2 (1 - g_1 g_2)}}{2n\pi g_1} & w_0^{2(down)} &= - \frac{\lambda R \sqrt{g_1 g_2 (1 - g_1 g_2)}}{2n\pi g_2} \\ z_R^{(up)} &= R \frac{\sqrt{g_1 g_2 (1 - g_1 g_2)}}{2g_1} & z_R^{(down)} &= R \frac{\sqrt{g_1 g_2 (1 - g_1 g_2)}}{2g_2} \end{aligned} \quad (4.51)$$

dove abbiamo introdotto i parametri adimensionali  $g_1 = 1 - \frac{d_1 + 2d_2}{R}$  e  $g_2 = 1 - \frac{d_3}{R}$ . Dalle relazioni precedenti si può ricavare anche una semplice relazione tra di due *waist*:

$$\frac{w_0^{(up)}}{w_0^{(down)}} = \sqrt{\frac{g_2}{g_1}}. \quad (4.52)$$

Dobbiamo poi trovare le frequenze di cavità, ovvero quelle per le quali il fascio dopo ogni *round trip* si mantiene identico a sé stesso (anche nella fase). Per ricavarle consideriamo la variazione di fase introdotta ad ogni giro in cavità:

$$\delta = kL - 2(n - m + 1) \left( \tan^{-1} \left( \frac{d_1 + d_2}{2z_R^{(down)}} \right) + \tan^{-1} \left( \frac{d_3}{2z_R^{(up)}} \right) \right). \quad (4.53)$$

Imponendo che questa quantità sia multiplo intero di  $2\pi$  si ottengono, risolvendo, le frequenze di risonanza:

$$\nu_{nmq} = \left( q + (n + m + 1) \frac{\cos^{-1} \pm \sqrt{g_1 g_2}}{\pi} \right) \frac{c}{L} \quad (4.54)$$

dove  $L = d_1 + 2d_2 + d_3$  è la lunghezza totale della cavità, mentre  $n$ ,  $m$ ,  $q$  sono numeri naturali ed in particolare  $q$  è legato ai modi longitudinali ( $\text{TEM}_{00}$ ) mentre  $m$  e  $n$  ai modi trasversi della cavità ( $\text{TEM}_{nm}$ ).

A questo punto possiamo introdurre il *free spectral range* (FSR) della cavità, che corrisponde alla spaziatura tra due valori di  $q$ , cioè tra due modi longitudinali.

Consideriamo adesso le relazioni tra le energie in gioco nella cavità. Ogni specchio del risonatore è caratterizzato da un certo coefficiente di riflessione e trasmissione, legati tra loro dalla relazione

$$r^2 + t^2 = R + T = 1 \quad (4.55)$$

L'obiettivo è quello di massimizzare l'intensità del campo in cavità e ridurre al minimo le perdite. Per semplicità consideriamo di aver specchi con riflettività del 100% ad eccezione di quello di ingresso che deve permettere alla luce di entrare in cavità. Consideriamo poi la presenza di un mezzo dissipativo

all'interno della cavità con coefficiente di trasmissione  $t$ . Indicando con  $E_0$  in campo in ingresso e con  $r_1$  e  $t_1$  i coefficienti relativi all'accoppiatore in ingresso, si ha che il campo riflesso dalla cavità è dato da:

$$\begin{aligned} E_r &= -E_0 r_1 + E_0 t_1^2 t e^{-i\delta} + E_0 r_1 t_1^2 t^2 e^{-2i\delta} + \dots \\ &= -E_0 r_1 + \frac{E_0 t_1^2}{r_1} (r_1 t e^{-i\delta} + (r_1 t e^{-i\delta})^2 + \dots) \\ &= E_0 \frac{t e^{-i\delta} - r_1}{1 - r_1 t e^{-i\delta}}. \end{aligned} \quad (4.56)$$

In maniera analoga è possibile stimare il campo circolante in cavità:

$$\begin{aligned} E_c &= E_0 t_1 + E_0 r_1 t_1 t e^{-i\delta} + E_0 r_1^2 t_1 t^2 e^{-2i\delta} + \dots \\ &= E_0 t_1 (1 + r_1 t e^{-i\delta} + (r_1 t e^{-i\delta})^2 + \dots) \\ &= E_0 \frac{t_1}{1 - r_1 t e^{-i\delta}}. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Ricordando la dipendenza quadratica dell'intensità dal campo è possibile ricavare, a partire delle relazioni precedenti, le intensità riflessa e circolante:

$$I_r = I_0 \frac{(r_1 - t)^2 + 4r_1 t \sin^2(\delta/2)}{(1 - r_1 t)^2 + 4r_1 t \sin^2(\delta/2)} \quad (4.58)$$

$$I_c = I_0 \frac{t_1^2}{(1 - r_1 t)^2 + 4r_1 t \sin^2(\delta/2)}. \quad (4.59)$$

Dalle relazioni precedenti si osserva che le intensità in questione sono funzioni periodiche di  $\delta$  con periodo  $2\pi$ .

In particolare, dalla (4.59) risulta evidente che il valore massimo per il campo circolante si ottiene in condizione di risonanza  $\delta = 0$ , per la quale diventa:

$$I_c = I_0 \frac{t_1^2}{(1 - r_1 t)^2} = I_0 \frac{1 - r_1^2}{(1 - r_1 t)^2}. \quad (4.60)$$

Questo valore può raggiungere il suo massimo per una scelta opportuna dei parametri  $r_1$  e  $t$ .

In analogia con una rete elettrica si definisce la condizione di *impedance matching*, ovvero quella per cui, in condizione di risonanza, si ha la massima potenza circolante in cavità. Consideriamo il parametro  $r_m$  che definisce la frazione del campo elettrico che rimane dopo un giro in cavità, trascurando la trasmissione dello specchio in ingresso. Essa corrisponde a  $r_m = t$ . Definiamo poi  $L_P$  come la potenza persa in un *round trip*, escludendo sempre la trasmissione dello specchio d'ingresso. Si avrà:

$$L_P + r_m^2 = L_P + t^2 = 1. \quad (4.61)$$

Ricaviamo ora il valore di  $r_1$  per il quale si ha il massimo dell'intensità circolante sfruttando l'equazione (4.60). Si ottiene così la condizione  $r_1 = t$ . Sfruttando la relazione appena trovata e la proprietà  $r^2 + t^2 = 1$  la condizione di *impedance matching* risulta:

$$L_P = t_1^2 . \quad (4.62)$$

In altre parole, la condizione è soddisfatta quando la trasmissione dello specchio d'ingresso della cavità è uguale alla somma di tutte le altre perdite, escluse quelle legate allo specchio stesso. Ciò vale anche nel caso in cui la cavità sia formata da specchi con riflettività minore del 100%. Quindi per ottenere la massima efficienza di conversione risulta fondamentale la scelta dello specchio d'ingresso della cavità.

#### 4.4.2 Cristallo non lineare in cavità

Consideriamo ora di mettere all'interno della cavità il nostro cristallo non lineare per la generazione di seconda armonica. La sua presenza introduce ulteriori perdite di cui devo tener conto, come ad esempio la riflessione superficiale. Questa può essere ridotta in due modi: prendendo un cristallo con opportuno trattamento anti-riflesso oppure tagliato in modo tale da avere incidenza all'angolo di Brewster. Dobbiamo poi tener conto delle perdite, non eliminabili, dovute alla generazione di seconda armonica. Occorre quindi una trattazione specifica che permetta di ricavare la condizione di *impedance matching*. Introduciamo, innanzi tutto, l'efficienza di conversione in seconda armonica  $\gamma$ :

$$I_2 = \gamma I_f^2 \quad (4.63)$$

dove  $I_2$  è l'intensità di seconda armonica e  $I_f$  è l'intensità del fascio fondamentale. Allora in condizione di *impedance matching* e trascurando le perdite, la potenza di SHG, in funzione dell'intensità in ingresso alla cavità, sarà

$$I_2 = \gamma \left( \frac{I_0}{T} \right)^2 \quad (4.64)$$

con  $T = t_1^2$ . A questo punto, è necessario ridefinire  $r_m$  per tener conto delle ulteriori perdite. Consideriamo di avere la potenza circolante in cavità stabilizzata al valore  $I_c$ : ad ogni singolo passaggio di intensità  $I_1$  attraverso il cristallo genera una perdita di seconda armonica pari a  $\gamma I_1 I_c$ . La frazione persa in ciascun giro sarà quindi pari a  $\gamma I_c$ , mentre quella rimanente  $1 - \gamma I_c$ . Di conseguenza sarà necessario andare a modificare  $r_m$  moltiplicandolo per la frazione di campo rimasta dopo ogni *round trip* a causa della duplicazione:

$$r_m \implies r_m \times \sqrt{1 - \gamma I_c} \approx r_m \left( 1 - \frac{\gamma I_c}{2} \right) = r_m \left( 1 - \frac{1}{2} \sqrt{\gamma I_2} \right) \quad (4.65)$$

dove abbiamo preso per l'intensità di seconda armonica  $I_2 = \gamma I_c$ .

A questo punto la potenza circolante e la potenza di seconda armonica risultano:

$$I_c = I_0 \frac{t_1^2}{\left[1 - r_1 r_m \left(1 - \frac{1}{2} \sqrt{\gamma I_2}\right)\right]^2}, \quad I_2 = I_0^2 \frac{\gamma t_1^4}{\left[1 - r_1 r_m \left(1 - \frac{1}{2} \sqrt{\gamma I_2}\right)\right]^4}. \quad (4.66)$$

Assumendo  $t_1^2 \ll 1$  e  $1 - r_m^2 \ll 1$ , e considerando le perdite in cavità ad ogni giro  $L_P \equiv 1 - r_m^2$  (escluse la duplicazione e la trasmissione dello specchio di ingresso), l'espressione dell'intensità di seconda armonica nella (4.66) può essere semplificata in

$$I_2 = \frac{16\gamma T^2 I_0^2}{\left[L + T + \sqrt{\gamma I_2}\right]^4} \quad (4.67)$$

da risolvere numericamente.

Da questa espressione si possono però ancora ricavare informazioni sulla condizione di *impedance matching*. Questa può essere definita in modo equivalente come il caso in cui la riflessione è minima. Definiamo  $r'_m$ , che include le perdite di duplicazione:

$$r'_m = r_m \sqrt{1 - \sqrt{\gamma I_2}}. \quad (4.68)$$

Le espressioni non approssimate che si ricavano in questo caso per la potenza circolante in cavità e riflessa sono:

$$I_c = I_0 \frac{T}{(1 - r_1 r'_m)^2}, \quad I_r = \left[ \frac{r'_m - r_1}{1 - r_1 r'_m} \right]^2. \quad (4.69)$$

Dall'ultima espressione si vede che la potenza riflessa è nulla per  $r_1 = r'_m$ :

$$r_1 = r'_m \implies \sqrt{1 - T} = \sqrt{1 - L_P} \sqrt{1 - \frac{\gamma I_0}{T}} \quad (4.70)$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che in condizione di *impedance matching*  $I_c = I_0/T$ . La soluzione di questa equazione, per  $L_P \ll 1$ , è

$$T_{matched} = \frac{L_P}{2} + \sqrt{\frac{L_P^2}{4} + \gamma I_0} \quad (4.71)$$

per la quale risulta

$$I_2 = \gamma \left( \frac{I_0}{T_{matched}} \right)^2 = \frac{4\gamma I_0^2}{(L_P + \sqrt{L_P^2 + 4\gamma I_0})^2}. \quad (4.72)$$

# Capitolo 5

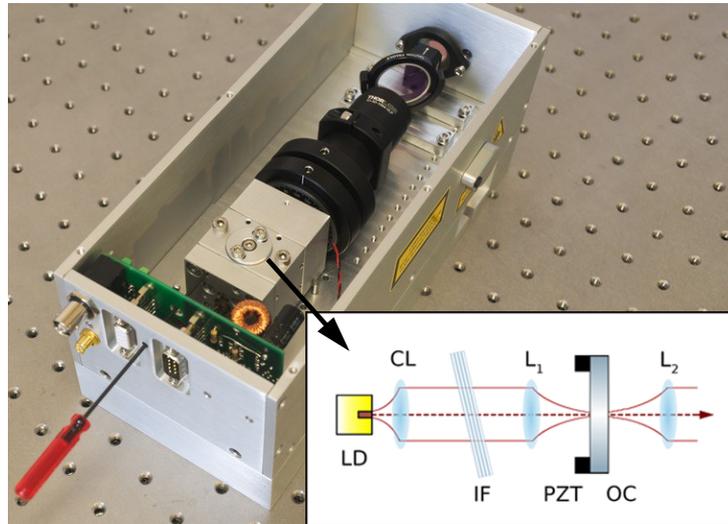
## Realizzazione di una nuova sorgente laser a 556 nm

In questo capitolo viene descritta la realizzazione di una nuova sorgente laser a 556 nm assemblata per completare il setup sperimentale in vista di misure future su atomi fermionici che richiedono l'utilizzo della radiazione verde in altri processi, oltre che per la realizzazione della MOT. Anche in questo caso la radiazione visibile è prodotta a partire da una sorgente infrarossa, descritta nella sezione 5.1, sfruttando una cavità ottica di duplicazione, il cui allestimento è illustrato in sezione 5.2. La cavità di duplicazione, sfruttata come trasduttore frequenza-ampiezza, ci ha permesso anche di dare una stima della larghezza di riga del laser infrarosso usato come segnale di ingresso, come illustrato in sezione 5.3. La radiazione prodotta a 556 nm mostra delle fluttuazioni in ampiezza, per questo motivo siamo andati ad indagare l'eventuale presenza di rumore nella sorgente laser a 1112 nm sfruttando un analizzatore di spettro, come mostrato in sezione 5.4. Infine, nella sezione 5.5, sono illustrati gli sviluppi futuri previsti per la sorgente realizzata che permetteranno di impiegarla per le misure su campioni atomici di Itterbio.

### 5.1 Sorgente infrarossa

La sorgente infrarossa è costituita da un *interference filter-based extended cavity diode* laser LEOS a 1112 nm amplificato tramite un *single frequency Raman fiber amplifier* MPB Communications RFA-SF-Series.

Il *seed* ECDL è mostrato in figura 5.1, la struttura tipica della cavità estesa con filtro interferenziale è mostrata nello specchietto in figura e descritta in Ref.[64, 65]. La radiazione è emessa da un diodo laser (DL) e collimata da una lente asferica (CL) con grande apertura numerica. La luce prodotta rag-



**Figura 5.1:** *Interference filter-based extended cavity diode laser* LEOS a 1112 nm con schema della struttura tipica di una cavità estesa con filtro interferenziale.

giunge uno specchio parzialmente riflettente chiamato *output-coupler* (OC), che la riflette indietro all'interno del diodo laser. L'OC è montato su un trasduttore piezoelettrico (PZT), permettendo così di variare la lunghezza della cavità estesa formata dallo specchio e dal diodo. La stabilità del feedback ottico è massimizzata posizionando una lente asferica (L1) prima dell'OC in modo da focalizzare il fascio. La luce trasmessa dallo specchio parzialmente riflettente viene poi ricollimata da una lente (L2) identica alla prima.

All'interno della cavità si trova un filtro interferenziale (IF) a banda stretta ed alta trasmissione, tipicamente intorno al 90%. Cambiando l'angolo di incidenza del filtro relativamente all'asse ottico è possibile regolare la lunghezza d'onda della laser. Il vantaggio di questa configurazione, rispetto a quella delle cavità estese che impiegano un reticolo di diffrazione, sta nel fatto che la discriminazione sulla frequenza e il feedback ottico sono effettuate da due elementi indipendenti, cioè rispettivamente dal filtro interferenziale e dall'*output-coupler*. Questo, combinato alle caratteristiche del setup della cavità, permette di ottenere una sorgente a singolo modo caratterizzata da una maggiore stabilità e tunabilità del sistema rispetto ad uno schema alla Littrow. Inoltre, la dipendenza dello spostamento spaziale del fascio in uscita dalla lunghezza d'onda della cavità è molto minore rispetto ad un setup che impiega un reticolo di diffrazione.

La lunghezza d'onda del nostro laser ECDL può essere selezionata nell'intervallo da 1095 nm a 1140 nm. Il dispositivo è fornito dal costruttore già

regolato per l'emissione a 1112 nm. Fissando la temperatura a 25°C, con 100 mA di alimentazione si ottengono 34 mW di potenza di uscita che viene mandata all'amplificatore tramite una fibra con efficienza di accoppiamento tipicamente del 70%.

L'RFA-SF è un amplificatore ottico *polarization maintaining* (PM) per l'amplificazione di segnali continui a banda stretta provenienti da una sorgente esterna a singola frequenza. Esso è costituito da un Raman Fiber Amplifier RFA-P-5-1111-SF e da un laser di pompa in fibra 2RU-YFL-P-25-1060.

Il processo di amplificazione si basa sostanzialmente sugli scattering Raman e Brillouin [66, 67]. Si tratta di due processi non lineari, legati alla suscettività del terzo ordine  $\chi^{(3)}$ , in cui una radiazione incidente su un mezzo non lineare viene in parte assorbita e trasformata in un nuovo segnale a frequenza maggiore o minore. Ciò è dovuto all'interazione dei fotoni con i modi vibrazionali del materiale. In linea di principio questo fenomeno può essere osservato in qualunque mezzo quando questo viene investito da una radiazione intensa monocromatica. La luce con cui viene irradiato il materiale viene chiamata fascio di pompa, mentre le radiazioni prodotte a frequenza minore e maggiore vengono chiamate rispettivamente onde Stokes e onde Anti-Stokes.

Uno dei mezzi attivi tipicamente sfruttati, come nel nostro caso, è una fibra ottica nella quale la manifestazione di processi non lineari è favorita dall'elevata intensità ottica e dalla grande lunghezza d'interazione. Il processo di conversione dell'energia del fascio di pompa alle radiazioni Stokes è caratterizzato da un parametro chiamato "guadagno Raman". Questo dipende fortemente dalle caratteristiche della fibra e dal materiale in cui è realizzata. Inoltre, è inversamente proporzionale alla lunghezza d'onda del fascio di pompa e dipende dalla polarizzazione della radiazione (è molto maggiore quando i fasci Stokes e di pompa hanno polarizzazione uguale). Tuttavia nelle fibre ottiche, a causa della birifrangenza, la polarizzazione delle due radiazioni varia continuamente e, se la fibra è abbastanza lunga, il guadagno Raman effettivo è dato dalla media tra quello per fasci paralleli e quello per fasci perpendicolari. Per questo motivo nella fibra il guadagno Raman può essere considerato indipendente dalla polarizzazione.

Per avere amplificazione è necessario sfruttare i processi di scattering Raman (SRS) e Brillouin (SBS) stimolati [68, 69]. Questi possono avvenire dopo la generazione di fotoni Stokes per scattering Raman spontaneo se questi vengono trattenuti all'interno del materiale, oppure iniettando in fibra, insieme al fascio di pompa (in direzione co- o contro-propagante), un'altra radiazione (segnale di ingresso), che funga da onda Stokes, con potenza sufficiente da superare la soglia dei processi. Nel caso in esame, il segnale di ingresso è la luce a 1112 nm prodotta dal *seed* che si desidera amplificare. In questo caso il rate di scattering Raman è molto più elevato rispetto a quello del processo

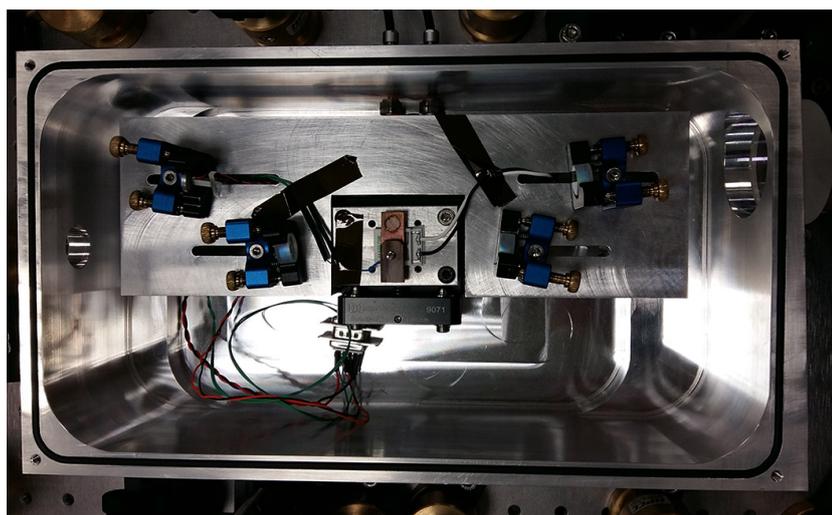
spontaneo e gran parte dei fotoni del fascio di pompa vengono convertiti in fotoni Stokes. Inoltre, più il loro numero aumenta più il processo si velocizza. Questo fa sì che in presenza di un potente fascio di pompa la luce Stokes attraversando la fibra venga notevolmente amplificata.

Nel nostro caso il fascio di pompa, inviato all'amplificatore tramite una fibra ottica PM rivestita in acciaio inossidabile, è caratterizzato da lunghezza d'onda pari a 1060 nm e potenza di 25 W, e permette di ottenere, a partire da un segnale di ingresso di  $\sim 30$  mW,  $\sim 5$  W di luce a 1112 nm.

## 5.2 Realizzazione della cavità di duplicazione

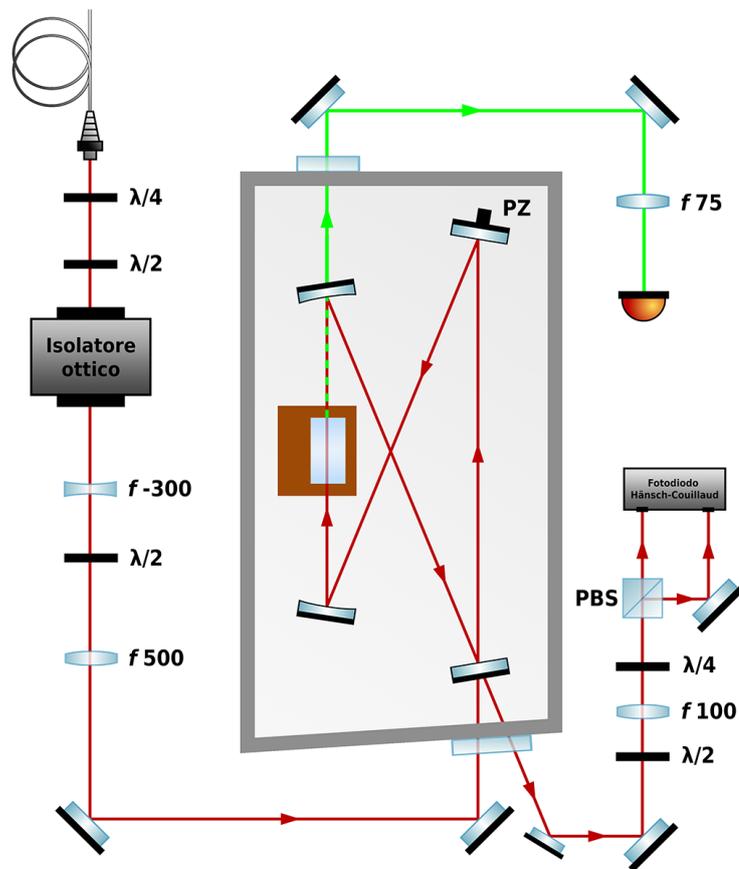
Per produrre la radiazione a 556 nm è necessario utilizzare un cristallo non lineare sfruttando il fenomeno della generazione di seconda armonica, descritto nella sezione 4.2. Essendo la duplicazione di frequenza un fenomeno tanto più efficiente quanto maggiore è la potenza della radiazione incidente sul cristallo, è conveniente sfruttare una cavità di duplicazione che amplifichi la potenza incidente rispetto alla condizione di singolo passaggio.

Come anticipato nella sezione 4.4.1, un tipo di cavità particolarmente impiegato per questo utilizzo è la *symmetrical bow-tie*. Si tratta di una cavità che, a differenza di un tradizionale risonatore Fabry-Perot, sfrutta un'onda viaggiante consentendo di produrre un singolo fascio di seconda armonica, anziché due fasci contropropaganti. Inoltre, la sua particolare geometria riduce la retroriflessione sul laser di iniezione.



**Figura 5.2:** Foto della cavità di duplicazione realizzata per generazione di luce a 556 nm.

La nostra cavità è mostrata in figura 5.2. Essa è formata da due specchi piani da mezzo pollice, un accoppiatore d'ingresso (*input coupler*) con riflettività del 90% a 1112 nm e uno con riflettività del 99.9% montato su un cristallo piezoelettrico che permette di variare finemente la lunghezza della cavità, e due sferici da mezzo pollice con raggio di curvatura  $R = 75$  mm, anch'essi con riflettività del 99.9% a 1112 nm ma con alta trasmissività a 556 nm, al centro dei quali è posto il cristallo non lineare.



**Figura 5.3:** Schema del setup sperimentale utilizzato per generare la radiazione a 556 nm. La luce visibile è generata dalla cavità di duplicazione SHG, all'interno della quale si trova il cristallo non lineare di  $\text{LiTaO}_3$ , partendo dalla sorgente, precedentemente descritta, a 1112 nm. Una piccola parte della luce infrarossa riflessa dalla cavità stessa viene raccolta e sfruttata per produrre il segnale d'errore per la stabilizzazione in frequenza, secondo il metodo Hänsch-Couillaud che sarà descritto in modo approfondito in seguito.

Il setup sperimentale è mostrato in figura 5.3. Subito dopo la fibra di uscita del RFA, che emette la radiazione infrarossa a 1112 nm, è posto un isolatore ottico per bloccare eventuali retro-riflessioni accidentali sul laser, da parte del cristallo e degli altri componenti ottici, che rischierebbero di bruciare la fibra o danneggiare il laser stesso. Per ottimizzare il passaggio nell'isolatore ottico prima di esso è collocata una lamina  $\lambda/2$ . Altre due lamine rispettivamente  $\lambda/2$  e  $\lambda/4$  sono posizionate dopo l'uscita dell'isolatore in modo da ottimizzare la polarizzazione del fascio per massimizzare l'efficienza di generazione di seconda armonica ed il segnale d'errore realizzato con il metodo Hänsch - Couillard, che sarà illustrato in seguito. Dopo l'isolatore è posizionata anche una lente di focale  $f = 300$  mm per rendere il fascio infrarosso collimato con waist di  $\sim 800$   $\mu\text{m}$ . Sono state fatte varie misure di controllo a varie distanze dalla lente per verificare che il fascio fosse realmente collimato, inoltre la condizione è stata controllata sia per il solo *seed* che con la sorgente amplificata. Il fascio a questo punto risulta polarizzato opportunamente e collimato, e può essere mandato all'interno della cavità e focalizzato aggiungendo una lente che ne regoli le dimensioni in corrispondenza del cristallo.

Nell'allestire la cavità di duplicazione è stato necessario tener conto di varie condizioni che devono essere soddisfatte dal setup sperimentale per ottimizzare il processo di generazione di seconda armonica:

- massima efficienza di duplicazione del cristallo;
- stabilità della cavità risonante (vedi sezione 4.4.1);
- *phase matching* (vedi sezione 4.3);
- *impedance matching* (vedi sezione 4.4.2);
- *mode matching* (la distribuzione spaziale del campo elettrico del fascio in ingresso deve essere tale da accoppiarsi ai modi del risonatore).

### 5.2.1 Duplicazione in singolo passaggio

Per prima cosa è stato necessario ottimizzare l'efficienza di duplicazione del cristallo non lineare e darne una stima. Infatti, come abbiamo visto in sezione 4.2 per soddisfare la condizione di *impedance matching* in cavità è necessario scegliere opportunamente la trasmittività dello specchio di ingresso in modo tale da compensare le perdite legate anche al processo di duplicazione.

La radiazione incidente sul cristallo ha un profilo gaussiano. Questo è un aspetto importante da tenere in considerazione in quanto per massimizzare

l'efficienza di conversione sarà necessario focalizzare il fascio all'interno del cristallo in modo da incrementarne l'intensità a parità di potenza.

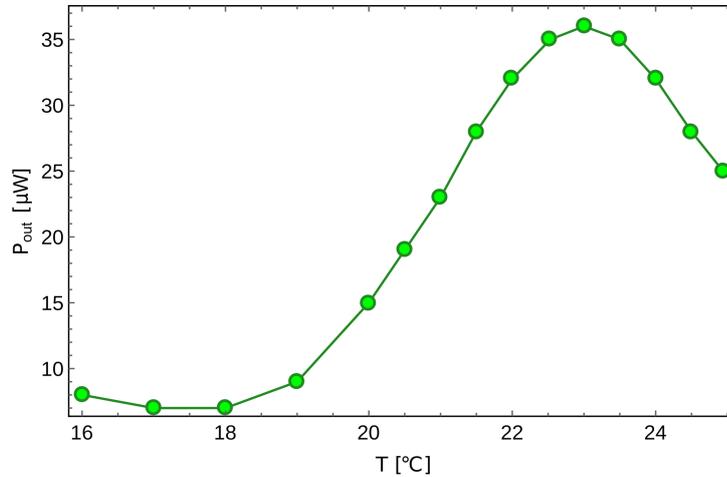
Vi possono essere tre modi diversi di focalizzare il fascio, a seconda del rapporto tra la lunghezza del cristallo  $L_c$  e della lunghezza di Rayleigh del fascio:

- *Strong focusing*: la lunghezza di Rayleigh è molto piccola ed il fascio risulta fortemente focalizzato, in questo modo la lunghezza del cristallo non viene sfruttata adeguatamente, in quanto in fascio si allarga rapidamente e la sua intensità locale nelle zone periferiche diventa troppo bassa per dare contributo significativo all'SHG;
- *Weak focusing*: la lunghezza di Rayleigh è molto grande ed il fascio risulta poco focalizzato, di conseguenza il volume del cristallo viene sfruttato in modo più omogeneo ma con un'intensità troppo bassa per rendere il processo SHG efficiente;
- *Optimum focusing*: si può dimostrare [63] che la condizione ottimale per ottenere la massima efficienza di duplicazione si ha quando  $L_c = 5.68 z_R$ . Per questo valore infatti la focalizzazione del fascio è tale da sfruttare il più possibile l'intera lunghezza del cristallo raggiungendo però un'intensità locale sufficientemente alta.

Il valore teorico che si ottiene per il *waist* del fascio al centro del cristallo è di  $\sim 20 \mu\text{m}$ , troppo piccolo per essere conciliabile con le condizioni per la nostra cavità. Per questo motivo abbiamo scelto un valore di  $\sim 40 \mu\text{m}$ .

Posizionando una lente di focale  $f = 500 \text{ mm}$  alla distanza opportuna il fascio è stato focalizzato al centro del cristallo di duplicazione. Il cristallo non lineare impiegato per la generazione di seconda armonica è un cristallo di Tantalato di Litio ( $\text{LiTaO}_3$ ) di dimensioni  $10 \times 2 \times 0.5 \text{ mm}$ , *periodically poled* con periodo  $\Lambda = 9.12 \text{ nm}$  e dotato di *coating* antiriflesso a  $1112 \text{ nm}$  sulla faccia di ingresso ( $R < 0.5\%$ ).

Poiché l'efficienza di duplicazione è fortemente influenzata dalla temperatura, il cristallo è montato su un supporto di rame stabilizzato termicamente grazie all'impiego di un sensore di temperatura NTC e di una cella Peltier TEC3-2.5 regolata tramite un circuito di controllo. Per ricavare la condizione di lavoro ottimale sono state fatte alcune misure del segnale SHG in singolo passaggio, con potenza d'ingresso fissata, al variare della temperatura del cristallo. Per fare questo l'uscita dal cristallo è stata prelevata dopo tre specchi dielettrici Thorlabs mod.E02 utilizzando una testa al silicio Ophir PD300-3W. I tre specchi sono necessari in quanto il fascio uscente dalla cavità è composto sia dalla radiazione a  $556 \text{ nm}$ , sia da quella a  $1112 \text{ nm}$ , poiché però il coating



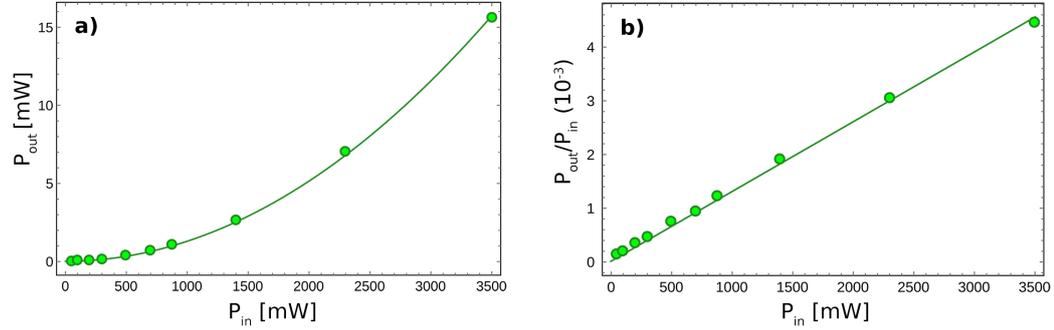
**Figura 5.4:** Potenza del segnale a 556 nm in uscita dal cristallo non lineare in singolo passaggio al variare della temperatura, con potenza di ingresso fissata a 140 mW. Risulta evidente un picco di efficienza a 23 °C.

riflettente degli specchi E02 non è efficace per la radiazione IR, soltanto la parte visibile viene riflessa e di conseguenza rilevata. Un ultimo residuo della radiazione a 1112 nm è stato eliminato introducendo uno specchio diecrico riflettente nell'intervallo del visibile.

Come si può osservare dalla figura 5.4 la potenza del segnale di uscita dal cristallo in funzione della temperatura mostra un picco in corrispondenza di 23 °C. Questa è la temperatura a cui abbiamo stabilizzato il cristallo.

In queste condizioni di lavoro abbiamo poi stimato l'efficienza di conversione andando a misurare la potenza in uscita in funzione della potenza in ingresso. Per evitare salti di modo del laser la potenza in ingresso è stata regolata inserendo lungo il cammino ottico un *beam splitter* polarizzatore (PBS) prima dell'ingresso della cavità e variando la potenza trasmessa tramite la lamina  $\lambda/2$ , anziché andando a modificare la corrente di alimentazione del laser. La potenza in ingresso è stata misurata con una testa termica Ophir 10A-V1.1-SH, mentre quella in uscita con una testa al silicio Ophir PD300-3W. I valori ottenuti sono riportati in figura 5.5.

In figura 5.5a è riportato l'andamento della potenza in uscita a 556 nm in funzione di quella in ingresso a 1112 nm. Come abbiamo visto dall'equazione (4.37) l'intensità di seconda armonica dipende dal quadrato dell'intensità in ingresso. Dato che l'intensità e la potenza sono direttamente proporzionali tra loro ci aspettiamo la stessa dipendenza. In effetti è possibile fare un fit parabolico di tipo  $y = ax^2$  che ben si accorda con i dati sperimentali, come



**Figura 5.5:** Misura della potenza di seconda armonica dal cristallo non lineare in singolo passaggio. **a)** Andamento della potenza in uscita a 556 nm in funzione di quella in ingresso a 1112 nm. Sui valori sperimentali è stato fatto un fit con una parabola pura. **b)** Andamento dell'efficienza di conversione in funzione della potenza in ingresso con fit lineare.

mostrato in figura.

Nella figura 5.5**b** è invece riportato l'andamento dell'efficienza di conversione  $P_{out}/P_{in}$ , in unità di  $10^{-3}$ , in funzione della potenza in ingresso. Come atteso l'andamento è di tipo lineare. Dal fit realizzato sui dati sperimentali si ottiene un valore di efficienza pari a  $\gamma = (1.30 \pm 0.02) \cdot 10^{-3} \text{ W}^{-1}$ .

### 5.2.2 Cavità di duplicazione

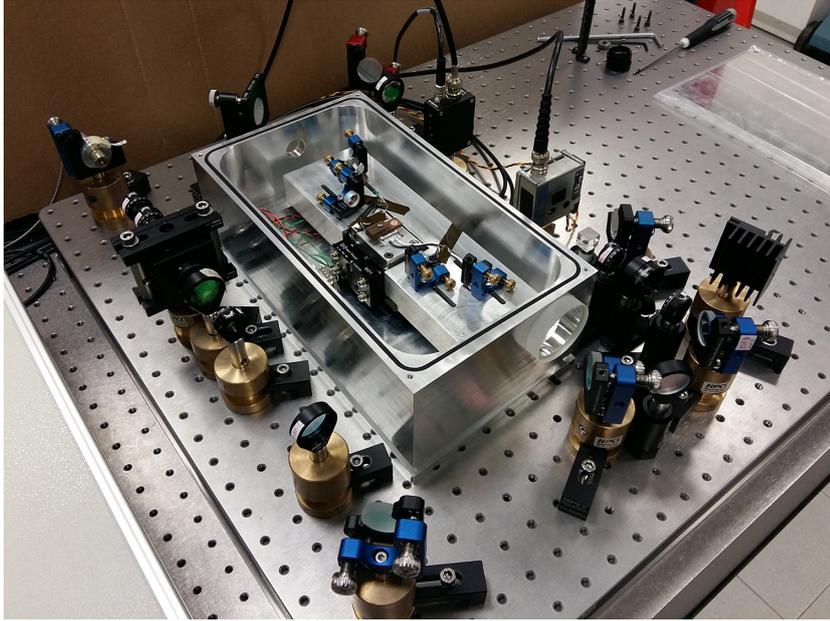
Nota l'efficienza di generazione di seconda armonica da parte del cristallo non lineare è stato possibile scegliere in maniera opportuna l'*input coupler* della cavità per soddisfare la condizione di *impedance matching*.

Come abbiamo visto precedentemente la condizione è soddisfatta quando la trasmittività dello specchio di ingresso è tale da compensare tutte le perdite in cavità, come espresso dalla relazione (4.71). Nel nostro caso, avendo impiegato specchi ad alta riflettività, le perdite in cavità  $L$ , esclusa la trasmissione dello specchio di ingresso e la duplicazione nel cristallo, risultano trascurabili e la trasmittività  $T$  può essere approssimata a

$$T = \sqrt{\gamma I_0} . \quad (5.1)$$

Considerando una potenza in ingresso di circa 4,5 W e tenendo conto del fatto che la nostra stima approssima  $T$  per difetto, è stato scelto uno specchio di ingresso con riflettività del 90% a 1112 nm.

Abbiamo a questo punto allestito la cavità di duplicazione, scegliendo in modo opportuno la distanza tra gli specchi in modo da soddisfare la condizione di stabilità (4.50) ed assicurare il *mode matching* con un *waist* sul



**Figura 5.6:** Foto del setup sperimentale.

crystallo più piccolo possibile. In questa fase la posizione del crystallo tra i due specchi sferici si è rivelata molto critica per ottenere l'allineamento del fascio sul modo  $TEM_{00}$  della cavità. Infatti, la presenza di un mezzo dielettrico non solo cambia il cammino ottico della radiazione, ma soprattutto va a modificare il fascio nel passaggio da aria a crystallo. Seguendo la trattazione in Ref.[70] si può vedere come, nell'attraversare un'interfaccia piana, il *waist* del fascio gaussiano rimanga lo stesso, ma la sua posizione venga spostata di una quantità legata agli indici di rifrazione:

$$z' = \frac{n_c}{n_a} z \quad (5.2)$$

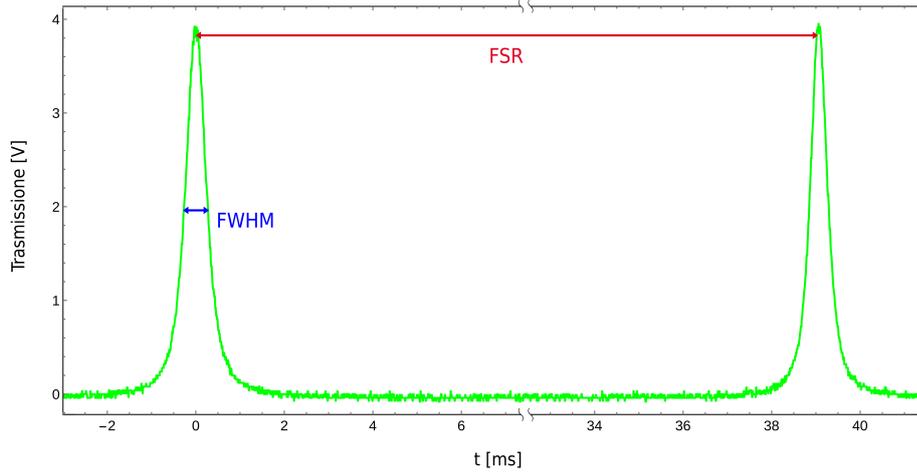
dove  $z$  e  $z'$  indicano distanza del *waist* dalla posizione dell'interfaccia piana in assenza ed in presenza del mezzo e  $n_c$ ,  $n_a$  sono gli indici di rifrazione rispettivamente del crystallo e dell'aria. Si ottiene allora che, date le ridotte dimensioni del crystallo, se gli specchi sferici sono posizionati in modo tale da far risultare il *waist* al centro della regione del crystallo, il fascio viene modificato finendo per essere focalizzato oltre il crystallo stesso.

La distanza ottimale trovata per gli specchi sferici intorno al crystallo corrisponde a  $d_3 = 86$  mm. Le altre distanze scelte risultano  $d_1 = 149$  mm e  $d_2 = 122$  mm. A questi valori corrispondono dei valori di *waist* di  $\sim 40$   $\mu\text{m}$  tra gli specchi sferici e *waist* di  $\sim 250$   $\mu\text{m}$  tra quelli piani.

A questo punto è possibile ricavare il cammino ottico totale della cavità

$L = d_1 + 2d_2 + d_3 + n_e L_c = 500$  mm, con  $n_e = 2.13$  indice di rifrazione straordinario del cristallo. Da questo si può ottenere il FSR della cavità, che risulta:

$$\text{FSR} = \frac{c}{L} = 600 \text{ MHz} . \quad (5.3)$$



**Figura 5.7:** FSR e FWHM dei picchi di trasmissione a 556 nm osservate sull'oscilloscopio per ricavare la *finesse* della cavità.

La *finesse* della cavità si può invece determinare sperimentalmente andando a misurare su un oscilloscopio la distanza tra due picchi di trasmissione consecutivi e loro la larghezza a mezza altezza (FWHM), come mostrato in figura 5.7, e facendone il rapporto:

$$\mathcal{F} = \frac{\text{FSR}}{\text{FWHM}} = 93 \pm 9 \quad (5.4)$$

L'uscita della cavità a 556 nm è stabilizzata in frequenza utilizzando il metodo Hänsch - Couillaud. Questo sfrutta la presenza di un mezzo birifrangente all'interno della cavità per generare un segnale d'errore in corrispondenza dei picchi di trasmissione. La luce riflessa dalla cavità viene raccolta da uno specchio e mandata, attraverso due lamine  $\lambda/2$  e  $\lambda/4$  su un *beam splitter* polarizzatore. Le due uscite, polarizzate una verticalmente l'altra orizzontalmente, vengono mandate su un fotodiode differenziale. Per massimizzare l'intensità dei segnali sul fotodiode i fasci sono stati focalizzati aggiungendo una lente prima del PBS a distanza opportuna.

Il metodo Hänsch - Couillaud [71] viene impiegato in cavità con un elemento polarizzatore al proprio interno il cui asse di trasmissione forma un angolo

$\theta$  con la polarizzazione del campo incidente. Quest'ultimo può essere scomposto in due componenti polarizzate ortogonalmente tra loro: una parallela all'asse di trasmissione e l'altra perpendicolare. La componente parallela è l'unica che può circolare in cavità (perché non riflessa dal mezzo polarizzatore), quindi compie un giro ed esce dalla cavità con un certo sfasamento dipendente dalla frequenza della radiazione, mentre quella perpendicolare viene assorbita e in piccola parte semplicemente riflessa e serve da riferimento. Le due componenti possono essere scritte come

$$E_{\parallel}^{(r)} = E_{\parallel}^{(i)} \left\{ \sqrt{R_1} - \frac{T_1}{\sqrt{R_1}} \frac{Re^{i\delta}}{1 - Re^{i\delta}} \right\} \quad (5.5)$$

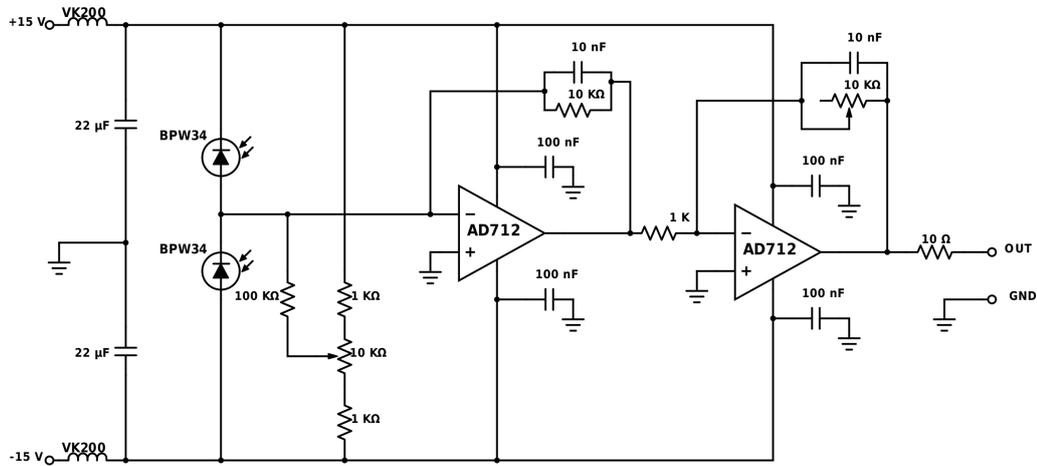
$$E_{\perp}^{(r)} = E_{\perp}^{(i)} \sqrt{R_1} \quad (5.6)$$

dove le  $E^{(i)}$  sono le componenti del campo incidente,  $R_1$  e  $T_1$  sono la riflettività e la trasmittività dello specchio di ingresso,  $\delta$  è lo sfasamento e  $R < 1$  è un fattore legato alla *finesse* della cavità che tiene conto delle perdite.

Per  $\delta = 2m\pi$ , con  $m$  reale, siamo in condizione di risonanza: entrambi i coefficienti sono reali e le due componenti del campo riflesso restano in fase tra loro. Di conseguenza il campo riflesso totale resta polarizzato linearmente anche se l'asse di polarizzazione risulta ruotato, rispetto a quello della radiazione incidente, di una quantità corrispondente all'angolo  $\theta$ . Lontano dalla risonanza, invece, la componente con polarizzazione parallela risulta sfasata rispetto a quella perpendicolare, ha una componente immaginaria non nulla ed in questo modo il fascio riflesso assume una polarizzazione ellittica con verso che dipende dal segno del *detuning*. Per rilevare l'ellitticità del fascio la luce è inviata a due lamine  $\lambda/4$  e  $\lambda/2$  e poi ad un *beam splitter* polarizzatore. La radiazione riflessa può essere considerata come l'effetto della sovrapposizione di due polarizzazioni di ampiezza diversa e verso opposto. Le lamine consentono di trasformare queste due polarizzazioni circolari in lineari così che possano essere divise dal cubo polarizzatore e che le loro intensità risultino facilmente misurabili separatamente. Si può dimostrare [71] che la differenza tra le intensità in uscita dal PBS è data da:

$$\Delta I = I^{(i)} 2 \cos \theta \sin \theta \frac{T_1 R \sin \delta}{(1 - R)^2 4 R \sin^2(\delta/2)} \quad (5.7)$$

dove  $I^{(i)}$  è l'intensità della radiazione incidente. Da questa espressione si vede come il segnale in funzione dello sfasamento  $\delta$  risulti antisimmetrico rispetto alla condizione di risonanza della cavità e presenti una forte pendenza nelle vicinanze di questa con code invece lentamente variabili. Un segnale di questo tipo risulta ideale come segnale d'errore dispersivo per stabilizzare la

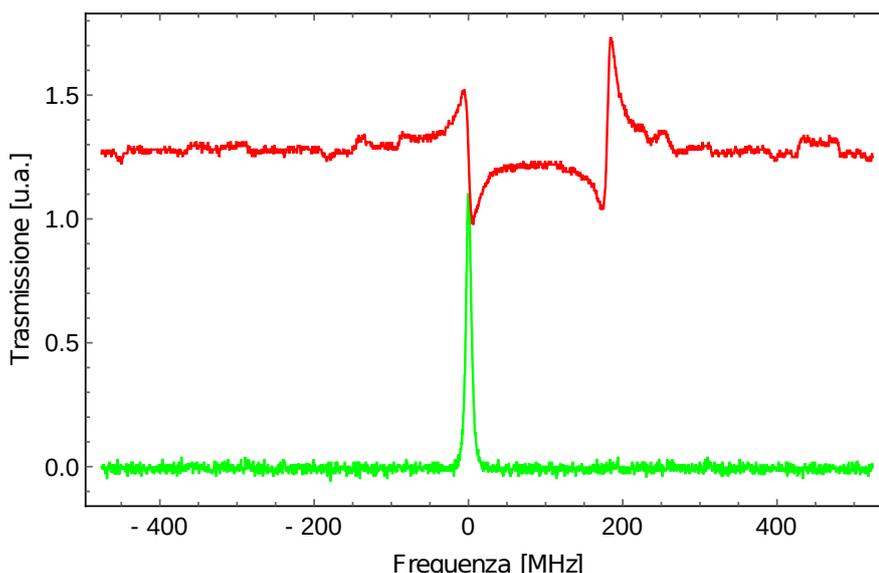


**Figura 5.8:** Schema del fotodiode differenziale assemblato. I fotodiode sono dei PIN al silicio BPW34.

frequenza del laser.

Nel nostro caso questo segnale dispersivo è ottenuto tramite un fotodiode differenziale che rivela separatamente le intensità delle due componenti e, tramite un semplice circuito (mostrato in figura 5.8), ne effettua la differenza. Il segnale di errore viene quindi inviato ad un controllore PID la cui uscita è collegata al piezoelettrico su cui è montato lo specchio piano della cavità (vedi figura 5.3) per attuare il feedback.

In figura 5.9 è riportato il segnale di trasmissione della cavità ed il segnale d'errore dispersivo corrispondente al picco di risonanza, ottenuto effettuando una scansione in frequenza della cavità inviando una rampa prodotta da un generatore di funzioni sul piezoelettrico. Come si può vedere in figura risulta molto evidente un altro picco dispersivo non corrispondente a picchi di trasmissione. Abbiamo potuto constatare che la sua distanza dal segnale di risonanza cambia in funzione della temperatura del cristallo. Ciò ci fa intuire che la sua origine sia legata al doppio indice di rifrazione del cristallo che rende la cavità risonante a frequenze leggermente diverse per le due polarizzazioni. Il secondo segnale corrisponde proprio alla condizione in cui la piccola frazione della radiazione polarizzata perpendicolarmente all'asse di trasmissione è risonante in cavità. Per questa polarizzazione la condizione di *phase matching* non è soddisfatta e non si ha un picco di trasmissione verde in uscita. Tuttavia andando a raccogliere la parte di luce infrarossa che riesce ad attraversare lo specchio di uscita della cavità si può osservare un piccolo picco di trasmissione IR proprio in corrispondenza di questo segnale



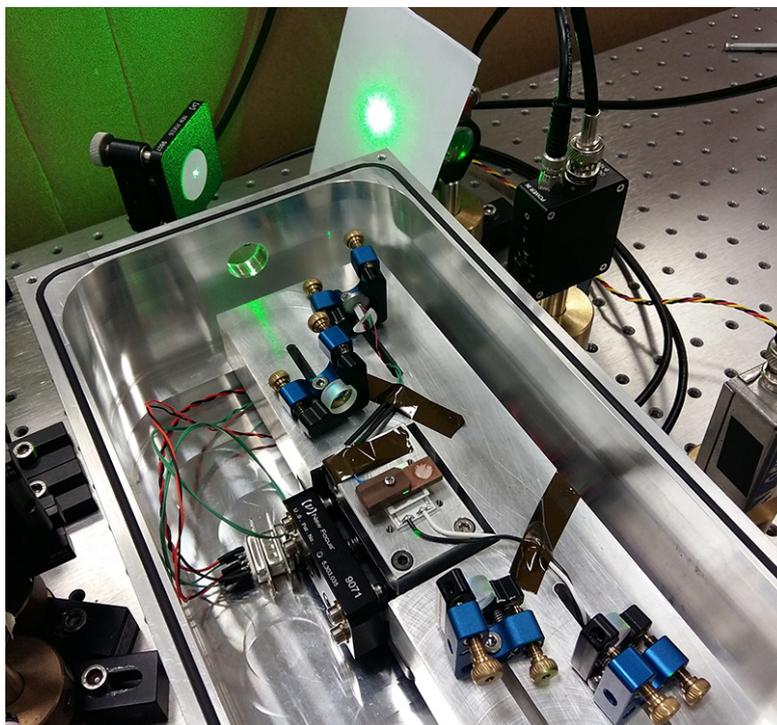
**Figura 5.9:** Picco di trasmissione a 556 nm della cavità di duplicazione (verde) e segnale d'errore dispersivo per l'aggancio della cavità realizzato secondo il metodo Hänsch - Couillaud. Sulla curva in rosso è stato aggiunto un *offset* per rendere i segnali non sovrapposti.

dispersivo, a conferma della nostra teoria.

Mantenendo il cristallo alla temperatura che ne ottimizza l'efficienza di duplicazione i due segnali dispersivi si sovrappongono ed il segnale d'errore non può più essere usato per agganciare in frequenza la cavità. Dato che questo effetto è legato al cristallo stesso non risulta eliminabile, per questo motivo, al fine di ottenere un segnale d'errore non deformato è stato necessario variare la temperatura del cristallo quanto basta per vedere i due segnali dispersivi distinti,  $\sim 0.5$  °C.

Agganciando la frequenza di risonanza della cavità alla frequenza del laser sfruttando il controllore PID si ottiene una luce continua a 556 nm ben visibile, come si può osservare in figura 5.10.

Per incrementare la stabilità della cavità di duplicazione e renderla insensibile a correnti d'aria e vibrazioni acustiche essa è stata allestita all'interno di una scatola da vuoto in alluminio. L'ingresso e l'uscita dei fasci laser è permesso dalla presenza di due finestre di vetro. Quella d'ingresso Thorlabs WG12012-C ha un coating antiriflesso di tipo C ed è più grande (2 pollici) per permettere di raccogliere in uscita anche il fascio riflesso dalla cavità, necessario per la generazione del segnale d'errore. Il fascio d'uscita a 556 nm passa invece da una finestra più piccola Thorlabs WG11050-A, con *coating* antiriflesso di tipo A. Le connessioni elettriche degli elementi della cavità



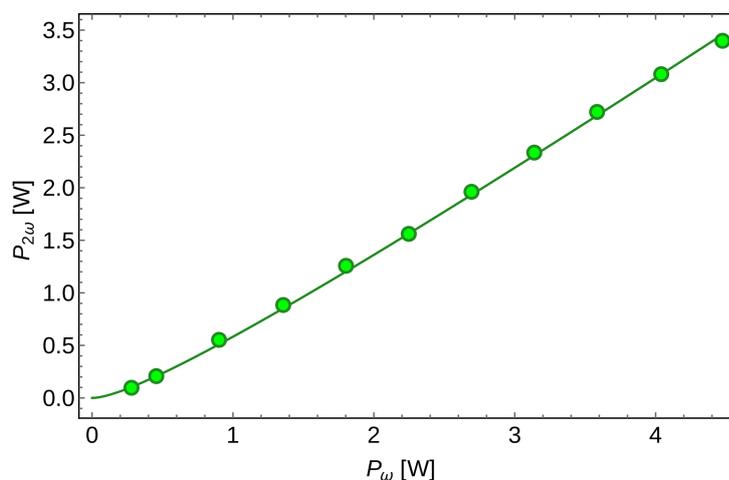
**Figura 5.10:** Foto della cavità di duplicazione. Risulta ben visibile la radiazione in uscita a 556 nm.



**Figura 5.11:** Foto del sistema da vuoto chiuso.

(piezoelettrico, sonda NTC e cella Peltier) passano attraverso dei connettori da vuoto Fischer DEE 102. All'interno della scatola la massiccia base in alluminio su cui è fissata la cavità di duplicazione è appoggiata su quattro piccoli supporti ricavati da un foglio di *sorbothane* Thorlabs SB12B con spessore di 1/4 di pollice, materiale che una volta schiacciato è in grado di assorbire fino al 95.5% dell'energia d'impatto e poi riassumere la forma originaria. In questo modo una buona parte delle vibrazioni acustiche esterne a cui è soggetta la scatola non si propagano alla cavità. Questo effetto è poi ulteriormente amplificato dal vuoto che viene creato all'interno della scatola stessa. Il vuoto all'interno della scatola è realizzato con una pompa a membrana PVR modello M71BX-08 in grado di raggiungere un livello di vuoto dell'ordine di  $10^{-2}$  Torr.

A questo punto la luce verde a 556 nm risulta ben stabilizzata in ampiezza ed è possibile andare a misurare la potenza di uscita dalla cavità per stimare l'efficienza di duplicazione. In figura 5.12 è riportata la potenza di seconda armonica in funzione della potenza in ingresso alla cavità, entrambe misurate usando una testa termica Ophir 10A-V1.1-SH.



**Figura 5.12:** Potenza del fascio di seconda armonica a 556 nm in uscita dalla cavità di duplicazione in funzione della potenza in ingresso nella cavità.

Come si può vedere in figura in questo caso l'andamento non è parabolico come visto per il cristallo in singolo passaggio (figura 5.5). Questo è dovuto sostanzialmente alle perdite della cavità di cui abbiamo parlato nella sezione 4.4.2. In particolare abbiamo visto che la potenza di seconda armonica è descritta dalla funzione (4.72) con la quale abbiamo realizzato il fit in figura 5.12 che ben si accorda con i dati sperimentali. Dal fit abbiamo

potuto ottenere il parametro  $\gamma/L_P^2$ , da cui, noto il valore di  $\gamma$  dalle misure di duplicazione in singolo passaggio (sezione 5.2.1), abbiamo potuto ricavare le perdite in cavità:  $L_P = 0.0198 \pm 0.0005$ .

Il valore ottenuto risulta più grande di quello stimabile in linea teorica in quanto la trasmissione degli specchi corrisponde allo 0.1% e la riflessione dell'interfaccia del cristallo è dichiarata dal costruttore  $< 0.5\%$ . Tuttavia dobbiamo tener conto del fatto che la relazione (4.72) è esatta solo nella condizione di *impedance matching*, che non possiamo considerare perfettamente soddisfatta. Di conseguenza è giustificabile che le perdite stimate risultino maggiori.

Dalle misure effettuate si può notare che con circa 4.5 W di luce infrarossa si ottengono quasi 3.4 W di potenza a 556 nm. Ciò corrisponde ad un'elevata efficienza del processo di duplicazione in cavità, corrispondente a  $\eta = 76\%$ , di cui possiamo essere soddisfatti.

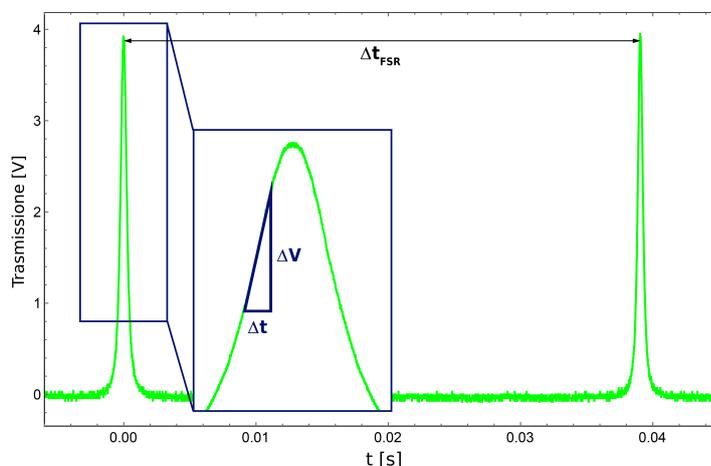
### 5.3 Larghezza di riga del laser infrarosso

La cavità di duplicazione può essere sfruttata come trasduttore frequenza-ampiezza per stimare la larghezza di riga del laser *seed* a 1112 nm. La luce trasmessa viene raccolta da un fotodiodo e monitorata tramite un oscilloscopio. Per associare i valori in frequenza alla scala orizzontale dell'oscilloscopio abbiamo misurato su di esso la distanza tra due picchi di trasmissione, separati da un FSR, di cui conosciamo il valore in Hz.

La stima della larghezza di riga del laser è stata fatta fissando la lunghezza della cavità (applicando al PZT della cavità un potenziale costante) in modo tale da posizionarci sul fianco del picco di trasmissione e misurando il valore *Root-Mean-Square*  $\Delta V_{RMS}$  delle fluttuazioni in ampiezza della fototensione di uscita dal fotodiodo, osservabili sull'oscilloscopio. Per convertire queste fluttuazioni in ampiezza in fluttuazioni di frequenza abbiamo precedentemente considerato il tratto lineare sul fianco del picco di trasmissione e misurato la pendenza  $\Delta V/\Delta t$ , come mostrato in figura 5.13. La scala temporale dell'oscilloscopio può essere convertita in Hz misurando su di esso il FSR[s], noto il valore FSR[Hz]:

$$\Delta t[\text{Hz}] = \frac{FSR[\text{Hz}]}{\Delta t_{FSR}[\text{s}]} \cdot \Delta t[\text{s}]. \quad (5.8)$$

Il rapporto  $\Delta V/\Delta t$  ci ha fornito il fattore di conversione da tensione a frequenza che ci permette di ricavare la larghezza di riga  $\Delta\nu$  a partire da  $\Delta V_{RMS}$



**Figura 5.13:** Metodo utilizzato per la stima della larghezza di riga della sorgente laser infrarossa. Il picco del segnale di trasmissione è ingrandito nell'inserito per mostrare in modo più chiaro le grandezze misurate:  $\Delta V$ ,  $\Delta t$ ,  $\Delta t_{FSR}$ .

attraverso la relazione:

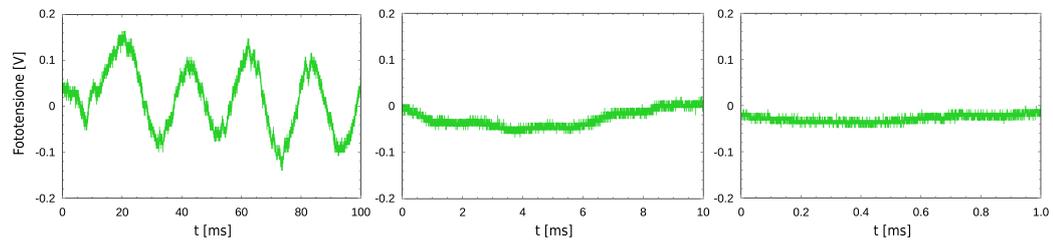
$$\Delta\nu = \frac{\Delta t[\text{Hz}]}{\Delta V[\text{V}]} \cdot \Delta V_{RMS}. \quad (5.9)$$

I valori medi ottenuti per la larghezza di riga a diversi tempi di acquisizione sono riportati in tabella 5.1.

Tempo di acquisizione [ms]	Larghezza di riga [kHz]
100	$280 \pm 60$
10	$140 \pm 80$
1	$37 \pm 4$

Tabella 5.1: Larghezza di riga della sorgente infrarossa per diversi tempi di acquisizione.

La caratteristica più evidente della misure da noi ottenute è la presenza di rumore non trascurabile a 50 Hz che costituisce il principale limite alla larghezza di riga del laser su scale temporali di acquisizione lunghe, come si può vedere dagli esempi, riportati in figura 5.14, di tracce ottenute per le diverse scale temporali di acquisizione. Va tenuto conto del fatto che durante la misura, per mantenere la cavità in risonanza, la lunghezza della stessa veniva regolata aggiustando a mano la differenza di potenziale applicata al



**Figura 5.14:** Fluttuazioni in ampiezza della fototensione di uscita dal fotodiode, osservabili sull'oscilloscopio per diverse scale temporali di acquisizione. Risulta evidente la presenza di rumore a bassa frequenza che produce l'allargamento della riga del laser soprattutto su tempi di acquisizione lunghi.

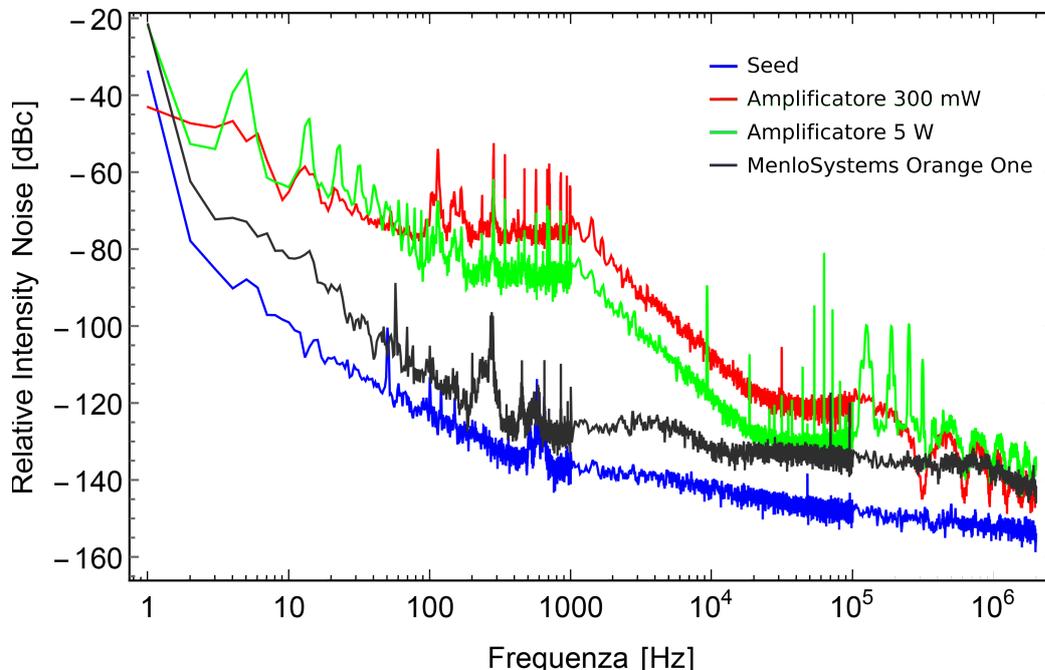
piezoelettrico. Ciò significa che le misure fatte sono influenzate da fluttuazioni a bassa frequenza e/o drift legati alla cavità. Anche questo effetto porta ad una sovrastima della larghezza di riga per tempi di acquisizione lunghi. Questi effetti sono ben visibili nelle tracce ottenute con 100 ms di osservazione che mostrano valori molto diversi della larghezza di riga, come si può vedere dall'errore sulla misura, realizzata mediando più acquisizioni. Inoltre anche le tracce a 10 ms mostrano valori molto diversi della frequenza RMS dipendenti dalla porzione osservata dell'oscillazione a 50 Hz. Di conseguenza risulta ragionevole assumere le stime ottenute come valori massimi per la larghezza di riga del laser, soprattutto su tempi di acquisizione più lunghi. Questo tenendo anche conto del fatto che non siamo in grado di distinguere dal rumore intrinseco della sorgente eventuali fluttuazioni introdotte da vibrazioni della cavità e possibili residui di rumore AM.

Poiché la cavità è risonante per la radiazione infrarossa la larghezza di riga stimata è relativa a quest'ultima. Dato che il processo di duplicazione SHG non introduce rumore la larghezza di riga associata alla radiazione a 556 nm corrisponde semplicemente al doppio del valore stimato.

## 5.4 Analisi del rumore in ampiezza della sorgente laser

Andando ad agganciare la cavità abbiamo potuto osservare un certa fluttuazione in ampiezza della potenza in uscita. Per capirne l'origine siamo andati, innanzitutto, a cercare queste fluttuazioni nella sorgente laser notando la presenza di rumore a bassa frequenza. Per questo motivo siamo andati ad analizzare lo spettro di rumore in ampiezza (*Relative Intensity Noise*, RIN)

della nostra sorgente per varie condizioni di lavoro, ovvero senza amplificazione e con amplificazione massima e minima.



**Figura 5.15:** Spettro di rumore in ampiezza RIN della sorgente infrarossa in varie condizioni di lavoro: solo *seed*, amplificatore al minimo (300 mW), amplificatore al massimo (5 W). Ciascuno spettro è dato dall'unione di tre parti, acquisite in modo indipendente, corrispondenti agli intervalli a bassa frequenza (da 1 Hz a 1 kHz) con RBW di 1 Hz, a media frequenza (da 1 kHz a 100 kHz) con RBW di 100 Hz, ad alta frequenza (da 100 kHz a 2 MHz) con RBW di 6.5 kHz. Le tre componenti sono state tutte riscalate ad una RBW di 1 Hz e poi unite. Per confronto è riportato anche lo spettro di rumore relativo alla sorgente a 1112 nm Menlo System ORANGE ONE, acquisito in modo analogo.

Gli spettri acquisiti, mediante un analizzatore di spettro Signal Hound USB-SA44B, sono riportati in figura 5.15. Ciascuno di essi è dato dall'unione di tre spettri in diversi intervalli: a bassa frequenza (da 1 Hz a 1 kHz) con *Resolution Bandwidth* (RBW) di 1 Hz, a media frequenza (da 1 kHz a 100 kHz) con RBW di 100 Hz, ad alta frequenza (da 100 kHz a 2 MHz) con RBW di 6.5 kHz. Le tre componenti sono state tutte riscalate ad una RBW di 1 Hz e poi unite.

Per acquisire gli spettri è stato necessario far passare il segnale di uscita del fotodiodo su un condensatore ( $C = 10 \mu\text{F}$ ) e poi accoppiarlo con l'ana-

lizzatore a 50 Ohm. Questo per eliminare la componente in continua che danneggerebbe l'analizzatore stesso. In pratica in questo modo abbiamo realizzato un filtro passa alto che però va a modificare anche la parte del nostro spettro al di sotto della sua frequenza di taglio corrispondente a  $\nu_f \sim 300$  Hz. Per correggere questo effetto è stato necessario andare a dividere i dati sperimentali per la funzione di trasferimento di un filtro passa alto. Tenendo conto del fatto che i nostri dati sono espressi in decibel (dBm) la relazione da usare per correggerli è:

$$V_{in}[\text{dBm}] = V_{out}[\text{dBm}] + 20 \log \left( \frac{1 + 2\pi\nu RC}{2\pi\nu RC} \right). \quad (5.10)$$

Infine, per poter essere confrontabili tra loro, tutti gli spettri completi sono stati normalizzati per il valore DC del segnale analizzato osservato con un oscilloscopio.

Come si può vedere in figura 5.15 l'amplificatore introduce un notevole rumore, soprattutto a bassa frequenza. In particolare si osserva che questo rumore con l'amplificatore al minimo risulta maggiore rispetto a quello alla massima potenza. Ciò potrebbe essere dovuto ad un rumore residuo costante del fascio di pompa, che conta quindi relativamente di più a bassa potenza. Per confronto in figura è anche riportato lo spettro di rumore in ampiezza relativo alla sorgente a 1112 nm Menlo System ORANGE ONE utilizzata in laboratorio per la cavità a 556 nm preesistente descritta in sezione 2.2.2. Come si può vedere il rumore a bassa frequenza dell'amplificatore MPB è discretamente maggiore rispetto a quello del laser Menlo.

## 5.5 Conclusioni e sviluppi futuri

Partendo da un laser infrarosso con potenza 4.5 W, sfruttando una cavità di duplicazione appositamente assemblata, è stata realizzata una sorgente di luce verde a 556 nm. La potenza in uscita è di 3.4 W con un'efficienza di duplicazione del 76%, valore del quale possiamo essere soddisfatti. Tuttavia, come mostrato nel paragrafo precedente, la sorgente infrarossa usata per la duplicazione ha un notevole rumore in ampiezza a bassa frequenza, e ciò dà luogo a delle fluttuazioni della potenza anche nella luce a 556 nm. Per questo motivo sarà necessario stabilizzare l'uscita sfruttando un AOM ed un controllore PID per agganciare la potenza ad un valore leggermente più basso, ma costante.

Come anticipato l'obbiettivo alla base della realizzazione di questa sorgente laser è quello di integrare quest'ultima nel setup sperimentale utilizzato per realizzare e manipolare dei gas di Itterbio ultrafreddi, soprattutto gli

isotopi fermionici. Nella sezione 2.2.2 è stato accennato che, per le misure sull'isotopo  $^{173}\text{Yb}$ , la radiazione a 556 nm viene impiegata non solo nella MOT, ma anche per la realizzazione di pompaggi ottici e per eccitare transizioni Raman (approfondite in sezione 1.3.2). Per questi scopi la sorgente attualmente usata non risulta sufficientemente adeguata in potenza. Inoltre, per eccitare le transizioni Raman la luce verde è *blue-detuned* rispetto alla frequenza di aggancio del laser di 2 GHz. Questo intervallo è piuttosto ampio e per realizzarlo, attualmente, il fascio Raman viene fatto passare attraverso una serie di AOM, in doppio passaggio, posizionati in cascata. Ciò produce una grande quantità di perdite della potenza. Per questo motivo, anziché sostituire la sorgente attualmente usata con una più potente è conveniente sfruttare due sorgenti distinte, una delle quali destinata principalmente all'eccitazione delle transizioni Raman e stabilizzata direttamente alla frequenza ottimale. A questo scopo l'intento è quello di selezionare la frequenza della nuova sorgente a 556 nm prendendo come riferimento quella del laser attuale e sfruttando per l'aggancio un *offset-lock* [72]. Questo sistema prevede di realizzare un battimento tra i due fasci laser e andare a fissarne la frequenza differenza; in questo modo è possibile selezionare e modificare facilmente il *detuning* della radiazione senza perdite di potenza.

# Conclusioni

Questo lavoro di tesi, svolto nell'ambito dell'esperimento dedicato alla realizzazione ed allo studio di gas degeneri di Itterbio, attivo presso il dipartimento di Fisica ed Astronomia dell'Università degli Studi di Firenze, ha avuto come primo obiettivo la caratterizzazione spettroscopica ad alta risoluzione della transizione d'orologio  $^1S_0 \rightarrow ^3P_0$  in un campione bosonico degenero di  $^{174}\text{Yb}$  intrappolato all'interno di un reticolo ottico tridimensionale in regime di Lamb-Dicke. La nostra risoluzione spettroscopica ha permesso di analizzare l'occupazione dei vari siti reticolari, ottenendo degli spettri con picchi risolti corrispondenti all'eccitazione dei diversi processi  $|(n)g\rangle \rightarrow |(n-1)ge\rangle$ , con  $n$  numero di atomi per sito reticolare.

Modificando il confinamento in reticolo è stato possibile osservare e misurare lo *shift* delle energie di interazione da cui sono state derivate le lunghezze di scattering per le collisioni  $e-g$  ed  $e-e$ , prima sconosciute per atomi ultrafreddi di  $^{174}\text{Yb}$ . I risultati ottenuti offrono importanti possibilità per le applicazioni nell'ambito della simulazione quantistica e dell'informazione quantistica, oltre che in ambito metrologico, per lo sviluppo di orologi atomici basati su isotopi bosonici di atomi a due elettroni.

Inoltre sono stati osservati gli effetti delle collisioni inelastiche, che coinvolgono gli atomi nello stato  $e$ , nei diversi processi  $e-g$  ed  $e-e$ . Il tempo di vita per le perdite  $e-e$  è risultato estremamente limitato, mentre nel canale  $e-g$  non sono state osservate collisioni inelastiche compatibilmente con i tempi di osservazione e con la sensibilità del sistema sperimentale. I coefficienti di decadimento associati a questi processi risultavano fin'ora sconosciuti.

I risultati sperimentali, alla quale è dedicata la prima parte di questo lavoro di tesi, per la loro novità, sono in pubblicazione sulla rivista scientifica *New Journal of Physics* in Ref.[60].

Parallelamente alle misure sperimentali, in questo lavoro di tesi è stato progettato e realizzato un sistema laser che, a partire da una sorgente infrarossa con lunghezza d'onda di 1112 nm e potenza 4.5 W, permette di ricavare 3.4 W di radiazione laser visibile a 556 nm, con un'efficienza di duplicazione del 76%. Questa sorgente verrà integrata nel setup sperimentale del

laboratorio presso il dipartimento di Fisica ed Astronomia dell'Università di Firenze utilizzato per realizzare e manipolare dei gas di Itterbio ultrafreddi sia bosonici che fermionici.

In particolare, una volta stabilizzata alla frequenza ottimale, sfruttando per l'aggancio un *offset-lock* [72] sulla radiazione a 556 nm attualmente presente nel setup, la nuova sorgente verrà sfruttata per eccitare transizioni Raman che accoppino stati di spin diverso dell'isotopo fermionico  $^{173}\text{Yb}$ , consentendo di sfruttare la così detta "dimensione sintetica", già realizzata in [19, 20], per nuovi esperimenti di simulazione quantistica.

# Bibliografia

- [1] M.H. Anderson, J.R. Ensher, M.R. Matthews, C.E. Wieman, and E.A. Cornell. *Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor*. Science **269**, 198-201 (1995).
- [2] K.B. Davis, M.O. Mewes, M.R. Andrews, N. J. van Druten, D.S. Durfee, D.M. Kurn, and W.Ketterle. *Bose-Einstein Condensation in a Gas of Sodium Atoms*. Phys. Rev. Lett. **75**, 3969-3973 (1995).
- [3] B. De Marco and D.S. Jin. *Onset of Fermi Degeneracy in a Trapped Atomic Gas*. Science **285**, 1703-1706 (1999).
- [4] A.G. Truscott, K.E. Strecker, W.I. McAlexander, G.B. Partridge, and R.G. Hulet. *Observation of Fermi Pressure in a Gas of Trapped Atoms*. Science **291**, 2570-2572 (2001).
- [5] I. Buluta and F. Nori. *Quantum Simulators*. Science **326**, 108–111 (2009).
- [6] R. Blatt and C.F. Roos. *Quantum simulations with trapped ions*. Nature Phys. **8**, 277–284 (2012).
- [7] I. Bloch, J. Dalibard, and S. Nascimbene. *Quantum simulations with ultracold quantum gases*. Nature Phys. **8**, 267–276 (2012).
- [8] R. P. Feynman. *Simulating physics with computers*. Int. J. of Theor. Phys. **21**, 467–488 (1982).
- [9] R. Grimm, M.Weidemuller, and Y.B. Ovchinnikov. *Optical Dipole Traps for Neutral Atoms*. Advances In Atomic, Molecular, and Optical Physics **42**, 95-170 (2000).
- [10] D. Jaksch, C. Bruder, J. Cirac, C. Gardiner, and P. Zoller. *Cold Bosonic Atoms in Optical Lattices*. Phys. Rev. Lett. **81**, 3108-3111 (1998).

- 
- [11] I. Bloch, J. Dalibard, and W. Zwerger. *Many-body physics with ultracold gases*. Rev. Mod. Phys. **80**, 885-964 (2008).
- [12] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T.W. Hänsch and I. Bloch. *Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms*. Nature **415**, 39-44 (2002).
- [13] G. Roati, C. D'Errico, L. Fallani, M. Fattori, C. Fort, M. Zaccanti, G. Modugno, M. Modugno and M. Inguscio. *Anderson localization of a non-interacting Bose-Einstein condensate*. Nature **453**, 895-898 (2008).
- [14] N. Poli, C.W. Oates, P. Gill and G.M. Tino. *Optical atomic clocks*. Riv. Nuovo Cimento **36**, 12 (2013).
- [15] M. Inguscio, L. Fallani. *Atomic Physics: Precise Measurements and Ultracold Matter*. Oxford University Press (2013).
- [16] F. Gerbier and J. Dalibard. *Gauge fields for ultracold atoms in optical superlattices*. New J. Phys. **12** 033007 (2010).
- [17] A. Celi *et al.* *Synthetic gauge fields in synthetic dimensions*. Phys. Rev. Lett. **112** 043001 (2014).
- [18] B.K. Stuhl, H.I. Lu, L.M. Ayccock, D. Genkina, and I.B. Spielman. *Visualizing edge states with an atomic Bose gas in the quantum Hall regime*. Science **349** 1514 (2015).
- [19] M. Mancini *et al.* *Observation of chiral edge states with neutral fermions in synthetic Hall ribbons*. Science **349** 1510 (2015).
- [20] L.F. Livi *et al.* *Synthetic dimensions and spin-orbit coupling with an optical clock transition*. Phys. Rev. Lett. **117** 220401 (2016).
- [21] S. Kolkowitz *et al.* *Spin-orbit-coupled fermions in an optical lattice clock*. Nature **542** 6670 (2017).
- [22] A. Traverso *et al.* *Inelastic and elastic collision rates for triplet states of ultracold strontium*. Phys. Rev. A **79** 060702 (2009).
- [23] X. Zhang *et al.* *Spectroscopic observation of  $SU(N)$ -symmetric interactions in Sr orbital magnetism*. Science **345** 1467 (2014).
- [24] G. Cappellini *et al.* *Direct observation of coherent inter-orbital spin-exchange dynamics*. Phys. Rev. Lett. **113** 120402 (2014).

- [25] F. Scazza *et al.* *Observation of two-orbital spin-exchange interactions with ultracold  $SU(N)$ -symmetric fermions.* Nature Phys. **10** 779784 (2014).
- [26] C.R. Hammond. *The Elements, in Handbook of Chemistry and Physics* (81st ed.) (2000).
- [27] Commission on isotopic abundances and atomic weights.
- [28] V.A. Dzuba *et al.* *Dynamic polarizabilities and related properties of clock states of the ytterbium atom.* Journal of Physics B **43** (2010).
- [29] Z. Barber. *Ytterbium Optical Lattice Clock.* PhD Thesis (2003).
- [30] C. Cohen-Tannoudji, D. Guéry-Odelin. *Advances in atomic physics.* World Scientific (2011).
- [31] N. Ashcroft and N. Mermin. *Solid State Physics.* Saunders College Publishing, Fort Worth, TX (1976).
- [32] M. Pini. *Atomi Ultrafreddi in Reticoli Ottici: Soluzioni Numeriche e Applicazioni in Computazione Quantistica.* Tesi triennale, Università di Firenze (2014).
- [33] C.J. Foot. *Atomic Physics.* Oxford University Press (2005).
- [34] G. Pagano. *Many-body physics with Ytterbium Fermi gases in optical lattices: from one-dimensional systems to orbital magnetism.* PhD thesis, Scuola Normale Superiore, Pisa (2015).
- [35] K. Deilamian, J.D. Gialspy and D.E. Kelleher. *Isotope Shifts and hyperfine splittings of the 398.8-nm Yb I line.* J.Opt.Soc.Am.B, **10**(5), 789 (1993).
- [36] W.A. van Wijngaarden and J. Li. *Measurement of isotope shifts and hyperfine splittings of ytterbium by means of acousto-optic modulation.* J.Opt.Soc.Am.B, **11**(11), 2163 (1994).
- [37] G. Cappellini. *Sviluppo di un sistema laser per la codifica di qubit su atomi degeneri di Itterbio.* Master Thesis, Università degli studi di Firenze (2012).
- [38] G. Cappellini. *Two-orbital quantum physics in Yb Fermi gases exploiting the  $^1S_0 \rightarrow ^3P_0$  clock transition.* PhD thesis, Università di Firenze (2015).

- [39] M. Mancini. *Quantum simulation with Ytterbium atoms in synthetic dimensions*. PhD thesis, Università di Firenze (2015).
- [40] M. Mancini. *Realizzazione sperimentale di un gas quantistico degenere di atomi di Itterbio*. Master thesis, Università di Milano (2012).
- [41] G. Pagano. *Raffreddamento e intrappolamento di atomi di Itterbio*. Master thesis, Università "La Sapienza" (2011).
- [42] E.D. Black. *An introduction to Pound-Drever-Hall laser frequency stabilization*. Am. J. Phys. **69** (2001).
- [43] L.F. Livi. *Creazione di stati atomici coerenti tramite transizioni proibite in gas di fermioni ultrafreddi*. Master thesis, Università degli studi di Firenze (2015).
- [44] B. Hundt. *Momentum-resolved optical lattice modulation spectroscopy on Bose-Fermi mixtures*. Master thesis, Università di Amburgo (2011).
- [45] W. Ketterle, D. Durfee, and D.M. Stamper-Kurn. *Making, probing and understanding Bose-Einstein condensates*. In *Proceedings of the International School of Physics "E. Fermi", Course CXL*, pages 67–176. IOS Press, Amsterdam (1999).
- [46] M. Weissbluth. *Atoms and Molecules*. Academic Press (1978).
- [47] S. G. Porsev and A. Derevianko. *Hyperfine quenching of the metastable  $^3P_0$ ; 2 states in divalent atoms*. Phys. Rev. A **69** 042506 (2004).
- [48] A.V. Taichenachev *et al.* *Magnetic field-induced spettroscopy of forbidden optical transitions with application to lattice-based optical atomic clocks*. Phys. Rev. Lett. **96** 083001 (2006).
- [49] A. D. Ludlow. *The Strontium Optical Lattice Clock: Optical Spectroscopy with Sub-Hertz Accuracy*. PhD thesis, University of Colorado (2008).
- [50] G. Cappellini *et al.* *A compact ultranarrow high-power laser system for experiments with 578nm Ytterbium clock transition*. Rev. Sci. Instr. **86** 073111 (2015).
- [51] N. Poli *et al.* *Frequency evaluation of the doubly forbidden  $^1S_0 \rightarrow ^3P_0$  transition in bosonic  $^{174}\text{Yb}$* . Phys. Rev. **77** 050501 (2008).
- [52] M. Kim, J. Lee, Y. Shin, and J. Mun. *Precise measurements of optical Feshbach resonances of  $^{174}\text{Yb}$  atoms*. Phys. Rev. A **94** 042703 (2016).

- [53] R.H. Dicke. *Coherence in spontaneous radiation processes*. Phys. Rev. **93**, 99-110 (1954).
- [54] G.K. Campbell *et al.* *Imaging the Mott insulator shells by using atomic clock shifts*. Science **313** 649 (2006).
- [55] S. Kato *et al.* *Laser spectroscopic probing of coexisting superfluid and insulating states of an atomic Bose–Hubbard system*. Nat. Commun. **7** 11341 (2016).
- [56] M. Kitagawa *et al.* *Two-color photoassociation spectroscopy of ytterbium atoms and the precise determinations of s-wave scattering lengths*. Phys. Rev. A **77** 012719 (2008).
- [57] F. Scazza. *Probing  $SU(N)$ -symmetric orbital interactions with ytterbium Fermi gases in optical lattices*. PhD Thesis, Universität München (2015).
- [58] P.R. Johnson *et al.* *Effective three-body interactions of neutral bosons in optical lattices*. New J. Phys. **11** 093022 (2009).
- [59] S. Will *et al.* *Time-resolved observation of coherent multi-body interactions in quantum phase revivals*. Nature **465** 197 (2010).
- [60] L. Franchi *et al.* *State-dependent interactions in ultracold  $^{174}\text{Yb}$  probed by optical clock spectroscopy*. New J.Phys. in press, <https://doi.org/10.1088/1367-2630/aa8fb4>(2017).
- [61] R. Bouganne *et al.* *Clock spectroscopy of interacting bosons in deep optical lattices*. Pre-print: arXiv:1707.04307 (2017).
- [62] R.W. Boyd. *Nonlinear optics*. AP (2003).
- [63] W. Nagouney. *Quantum Electronics for Atomic Physics*. Oxford University press (2010).
- [64] X. Baillard *et al.* *Interference-filter-stabilized external-cavity diode lasers*. Opt. Commun. **266**, 609–613 (2006).
- [65] M. Gilowski *et al.* *Narrow bandwidth interference filter-stabilized diode laser systems for the manipulation of neutral atoms*. Opt. Commun. **280**, 443–447 (2007).
- [66] C. Vergien, I. Dajani, and C. Robin. *Theoretical analysis of single-frequency Raman fiber amplifier system operating at 1178nm*. Opt. Lett. **37**, 1766–1768 (2012).

- 
- [67] A. Kobayakov, M. Sauer, and D. Chowdhury. *Stimulated Brillouin Scattering in Optical Fibers*. Adv. Opt. Photon. **2**, 1 (2009).
- [68] R. Billington. *Measurement methods for stimulated Raman and Brillouin scattering in optical fibres*. NPL Report COEM **31**, 1369-6807 (1999).
- [69] L. Wei *et al.* *Intrinsic mechanism for spectral evolution in single-frequency Raman fiber amplifier*. (2017).
- [70] S. Nemoto. *Waist shift of a Gaussian beam by plane dielectric interfaces*. Appl. Opt. **27** (9) 1833-1839 (1988).
- [71] T.W. Hänsch, B. Couillaud. *Laser Frequency Stabilization by Polarization Spectroscopy of a Reflecting Reference Cavity*. Opt. Commun. **35** (3), 441 (1980).
- [72] U. Schünemann, H. Engler, R. Grimm, M. Weidemüller, and M. Zielonkowski. *Simple scheme for tunable frequency offset locking of two lasers*. Rev. Sci. Instrum. **70**, 242 (1999).